EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2018r
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

W modelu rezerwy $R_n = u + n - (W_1 + \cdots + W_n)$ wiemy, że W_i są iid o rozkładzie geometrycznym na $0, 1, 2, \ldots$ z parametrem $p = 3/4$. Policz prawdopodobieństwo ruiny w tym modelu dla $u = 0$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Oblicz $\mathbb{P}\left(\bar{a}_x < \bar{a}_{T_x}\right)$, gdzie T_x jest przyszłym czasem życia x-latka, natężenie oprocentowania jest stałe i równe 1 oraz natężenie śmiertelności jest również stałe i wynosi 1. Napisz własnymi słowami interpretację finansowo-ubezpieczeniową obliczonego prawdopodobieństwa.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X_i ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma_i^2)$. Zakładamy, że wariancje $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n^2$ są znane, a wartość oczekiwana μ jest jednakowa dla wszystkich zmiennych. Podaj wzór na estymator największej wiarogodności parametru μ w oparciu o obserwacje $X_1, X_2, ..., X_n$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Podać przykłady (z uzasadnieniem) lub wyjaśnić, dlaczego nie istnieją ciągi funkcji $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, spełniające następujące założenia:

1. $(f_n)_n$ jest zbieżny punktowo, ale nie jest zbieżny jednostajnie na $[0, 1]$;
2. $(f_n)_n$ jest zbieżny punktowo i jednostajnie na $[0, 1]$;
3. $(f_n)_n$ jest zbieżny jednostajnie na $[0, 1]$, ale nie jest zbieżny punktowo.

Uwaga: każdy podpunkt rozpatrujemy osobno.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Obliczyć całkę zespoloną

$$\int_{|z-\frac{\pi}{4}|=\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z - 1}{z(e^{2iz}+1)}\mathrm{d}z,$$

po krzywej sparametryzowanej dodatnio.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2018r
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, kąt ABC jest prosty a miara kąta BAC wynosi 2α. Na boku AC leżą punkty D, E w taki sposób, że miara kąta DBC wynosi 3α a miara kąta DBE wynosi 2α. Udowodnić, że $BD = BE$ i obliczyć α.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X_i ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma_i^2)$. Zakładamy, że wariancje $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n^2$ są znane, a wartość oczekiwana μ jest jednakowa dla wszystkich zmiennych. Podaj wzór na estymator największej wiarogodności parametru μ w oparciu o obserwacje $X_1, X_2, ..., X_n$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Podać przykłady (z uzasadnieniem) lub wyjaśnić, dlaczego nie istnieją ciągi funkcji $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, spełniające następujące założenia:

1. $(f_n)_n$ jest zbieżny punktowo, ale nie jest zbieżny jednostajnie na $[0,1]$;
2. $(f_n)_n$ jest zbieżny punktowo i jednostajnie na $[0,1]$;
3. $(f_n)_n$ jest zbieżny jednostajnie na $[0,1]$, ale nie jest zbieżny punktowo.

Uwaga: każdy podpunkt rozpatrujemy osobno.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Obliczyć całkę zespoloną

$$\int_{|z-\frac{\pi}{4}|=\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z - 1}{z(e^{2iz}+1)} \mathrm{d}z,$$

po krzywej sparametryzowanej dodatnio.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2018r
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Pokaż, że tranzytywna abelowa grupa permutacji jest regularna.

(*Grupa permutacji* to podgrupa G pełnej grupy permutacji S_n.

Grupa permutacji G jest tranzytywna, jeśÂśli dla każdych $x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}$ istnieje $\sigma \in G$, takie że $\sigma(x) = y$.

Grupa G jest *regularna*, jeśÂśli dla każdych $x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}$ istnieje jedyne $\sigma \in G$, takie że $\sigma(x) = y$.)

Zadanie **2. (8 punktów)**

Udowodnij, że dla każdej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbf{R}^n$ taki, że dla każdego $w \in \mathbf{R}^n$ zachodzi implikacja: $(v \perp w) \Rightarrow (Av \perp Aw)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Uzasadnij, że dla każdego $x > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

Zadanie **4. (8 punktów)**

Podać przykłady (z uzasadnieniem) lub wyjaśnić, dlaczego nie istnieją ciągi funkcji $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, spełniające następujące założenia:

1. $(f_n)_n$ jest zbieżny punktowo, ale nie jest zbieżny jednostajnie na $[0, 1]$;
2. $(f_n)_n$ jest zbieżny punktowo i jednostajnie na $[0, 1]$;
3. $(f_n)_n$ jest zbieżny jednostajnie na $[0, 1]$, ale nie jest zbieżny punktowo.

Uwaga: każdy podpunkt rozpatrujemy osobno.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Obliczyć całkę zespoloną

$$\int_{|z-\frac{\pi}{4}|=\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z - 1}{z(e^{2iz}+1)} \mathrm{d}z,$$

po krzywej sparametryzowanej dodatnio.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2018r
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**

W celu zbadania wpływu spożycia wapnia (Ca) na ciśnienie krwi, grupie 10 mężczyzn podawano wapń jako suplement diety przez 12 tygodni, a kontrolnej grupie 11 mężczyzn podawano w tym czasie placebo. Wcześniejsze eksperymenty na szczurach sugerują, że dodatkowe spożycie wapnia obniża ciśnienie krwi i badania zostały przeprowadzone, aby to potwierdzić lub sfalsyfikować. Wyniki–jako spadek wysokości ciśnienia–podsumowano w następującej tabeli

	wapń	placebo
n	10	11
$\bar{x}$	5.000	-0.273
s	8.743	5.901

Dodatnia wartość $\bar{x}$ oznacza tu spadek, a ujemna-wzrost średniego ciśnienia u badanych.

- Podaj model probabilistyczny dla tego problemu.
- Sformułuj hipotezę zerową i alternatywną.
- Oblicz odpowiednią statystykę testową.
- Oszacuj P-wartość.
- Podaj konkluzję statystyczną i naukową.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Wektory $X_1, \ldots, X_n$, $X_i \in R^5$ zostały niezależnie wylosowane z populacji o wielowymiarowym rozkładzie normalnym $N(\mu, 3I_{5\times 5})$.

- Podaj wzów na estymator największej wiarogodności $\hat{\mu}_{NW}$ dla wektora μ.

- Wyznacz błąd średniokwadratowy tego estymatora $MSE = E||\mu - \hat{\mu}_{NW}||^2$.
- Podaj stałą c dla której estymator $\hat{\mu}_c = c\hat{\mu}_{NW}$ na najmniejszy błąd średniokwadratowy.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech X_1, $X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X_i ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma_i^2)$. Zakładamy, że wariancje σ_1^2, σ_2^2, ..., σ_n^2 są znane, a wartość oczekiwana μ jest jednakowa dla wszystkich zmiennych. Podaj wzór na estymator największej wiarogodności parametru μ w oparciu o obserwacje X_1, $X_2, ..., X_n$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Podać przykłady (z uzasadnieniem) lub wyjaśnić, dlaczego nie istnieją ciągi funkcji $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, spełniające następujące założenia:

1. $(f_n)_n$ jest zbieżny punktowo, ale nie jest zbieżny jednostajnie na $[0,1]$;
2. $(f_n)_n$ jest zbieżny punktowo i jednostajnie na $[0,1]$;
3. $(f_n)_n$ jest zbieżny jednostajnie na $[0,1]$, ale nie jest zbieżny punktowo.

Uwaga: każdy podpunkt rozpatrujemy osobno.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Obliczyć całkę zespoloną

$$\int_{|z-\frac{\pi}{4}|=\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z - 1}{z(e^{2iz}+1)} \mathrm{d}z,$$

po krzywej sparametryzowanej dodatnio.