EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2019r
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Wartość szkody S ma rozkład określony na zbiorze $\mathbf{N}$. Składka netto za nadwyżkę łącznej wartości szkód S ponad liczbę k wynosi:

k	1	2	3	4
$E[(S-k)_+]$	5.2500	4.5500	3.9075	3.3310

Wylicz $P(S=2)+P(S=3)$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Sześćdziesięciolatek podpisuje umowę ubezpieczeniową, w ramach której za rok powinien wpłacić sumę x, po czym od razu zacznie otrzymywać dożywotnią rentę wypłacaną ze stałą intensywnością 1000. Oblicz x zakładając, że przyszły czas życia sześćdziesięciolatka ma rozkład wykładniczy z parametrem $\frac{1}{90}$ oraz że natężenie oprocentowania wynosi $\frac{1}{10}$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Załóżmy, że mamy próbkę losową $(X_1, ..., X_n)$ z rozkładu wykładniczego z parametrem λ. Załóżmy, że chcemy oszacować średnią $1/\lambda$. W tym celu korzystamy z dwóch estymatorów

$$T_1 = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n),$$

oraz

$$T_2 = nM_n, \text{ gdzie } M_n = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}.$$

(a) Wykaż, ze oba estymatory są estymatorami nieobciążonymi średniej.

(b) Przyjmując za kryterium błąd średniokwadratowy, który z estymatorów wybierzesz do estymacji średniej?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Obliczyć całkę

$$\int_{|z|=2} \frac{ze^z}{(z-\operatorname{Log} i)^3} dz,$$

gdzie Log oznacza gałąź główną logarytmu zespolonego. Wynik wyrazić w postaci algebraicznej $a + bi$.

Przyjmujemy, że argument główny bierzemy z przedziału $[0, 2\pi)$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech dana będzie funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}$, $[0,1]$ i $[0,1]^2$ rozważamy metryki euklidesowe.

- Podaj definicję ciągłości funkcji $f\colon X \to \mathbb{R}$.
- Pokaż, że warunek „$f^{-1}[(a,b)]$ jest kulą dla każdego $a < b$" jest dostateczny do tego, by f była ciągła, ale nie jest konieczny.
- Czy istnieje ciągła surjekcja $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy istnieje ciągła surjekcja $h\colon \mathbb{R} \to [0,1]$? Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2019r
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Dane są punkty A, B, C, D leżące na wspólnym okręgu, przy czym proste AB i CD przecinają się w punkcie M. Udowodnić podobieństwa trójkątów: $\triangle ADM \sim \triangle CBM$ oraz $\triangle ACM \sim \triangle DBM$ oraz równość

$$\frac{AC \cdot AD}{AM} = \frac{BC \cdot BD}{BM}.$$

Zadanie **2. (8 punktów)**
Udowodnić że jeśli $n \in \mathbb{N}$, to liczba $13^{2n} + 6$ dzieli się przez 7.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Załóżmy, że mamy próbkę losową $(X_1, ..., X_n)$ z rozkładu wykładniczego z parametrem λ. Załóżmy, że chcemy oszacować średnią $1/\lambda$. W tym celu korzystamy z dwóch estymatorów

$$T_1 = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n),$$

oraz

$$T_2 = nM_n, \text{ gdzie } M_n = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}.$$

(a) Wykaż, ze oba estymatory są estymatorami nieobciążonymi średniej.

(b) Przyjmując za kryterium błąd średniokwadratowy, który z estymatorów wybierzesz do estymacji średniej?

Zadanie **4. (8 punktów)**
Obliczyć całkę

$$\int_{|z|=2} \frac{ze^z}{(z - \operatorname{Log} i)^3} dz,$$

gdzie Log oznacza gałąź główną logarytmu zespolonego. Wynik wyrazić w postaci algebraicznej $a + bi$.

Przyjmujemy, że argument główny bierzemy z przedziału $[0, 2\pi)$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną i niech dana będzie funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}$, $[0,1]$ i $[0,1]^2$ rozważamy metryki euklidesowe.

- Podaj definicję ciągłości funkcji $f\colon X \to \mathbb{R}$.
- Pokaż, że warunek „$f^{-1}[(a,b)]$ jest kulą dla każdego $a<b$" jest dostateczny do tego, by f była ciągła, ale nie jest konieczny.
- Czy istnieje ciągła surjekcja $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy istnieje ciągła surjekcja $h\colon \mathbb{R} \to [0,1]$? Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2019r
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

(i) Zmienna losowa X o rozkładzie Poissona z parametrem λ ma funkcję charakterystyczną $\exp(\lambda(e^{it}-1))$. Czy $\exp(\lambda(e^{iat}-1))$ jest funkcją charakterystyczną. Jakiej zmiennej losowej?

Niech X_k ($k = 1, 2, \ldots$), będą niezależnymi zmiennymi losowymi; X_k z funkcją charakterystyczną

$$\mathbb{E}e^{itX_k} = e^{\lambda_k(e^{ikt}-1)}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Oznaczmy przez $S = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$.

- (ii) Co trzeba założyć o λ_k (oprócz tego, że $\lambda_k > 0$) aby S było zbieżne według rozkładu. Uzasadnić odpowiedź.
- (iii) Obliczyć $\mathbb{E}S$ i $\mathbb{V}arS$ i podać warunki na ich skończoność. Uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (B_t)_t, P)$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że

$$Y_t = tB_t - \int_0^t B_u du \tag{1}$$

jest martyngałem. Ponadto udowodnij, że dla $t > s$ $E[(Y_t - Y_s)B_u] = 0$ dla każdego $u \leq s$. Uzasadnij wszystkie przejścia, powołując się na odpowiednie twierdzenia (sprawdź założenia) i własności.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu beta z parametrami α i β. Testujemy $H_0 : \alpha = 3, \beta = 1$ przeciwko $H_1 : \alpha = 5, \beta = 1$. Wyznacz test jednostajnie najmocniejszy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$. Jaka jest moc testu przy alternatywie?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Obliczyć całkę

$$\int_{|z|=2} \frac{ze^z}{(z - \operatorname{Log} i)^3} dz,$$

gdzie Log oznacza gałąź główną logarytmu zespolonego. Wynik wyrazić w postaci algebraicznej $a + bi$.

Przyjmujemy, że argument główny bierzemy z przedziału $[0, 2\pi)$.

Zadanie 5. **(8 punktów)**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech dana będzie funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}$, $[0,1]$ i $[0,1]^2$ rozważamy metryki euklidesowe.

- Podaj definicję ciągłości funkcji $f\colon X \to \mathbb{R}$.
- Pokaż, że warunek „$f^{-1}[(a,b)]$ jest kulą dla każdego $a < b$" jest dostateczny do tego, by f była ciągła, ale nie jest konieczny.
- Czy istnieje ciągła surjekcja $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy istnieje ciągła surjekcja $h\colon \mathbb{R} \to [0,1]$? Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2019r
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**

Biolodzy badający ekosystem Morza Bałtyckiego poinformowali przemysł rybacki o przełowieniu populacji ryb żyjących w tym akwenie. Zarząd przemysłu rybackiego zdecydował zaprzestać odłowów licząc na to, że populacja ryb po pewnym czasie odrodzi się i będzie można kontynuować działalność na Bałtyku. Załóżmy, że odłowy zostały zaprzestane w chwili $t = 0$ z populacja ryb równą x_0. Zakładamy, że populacja ryb rozwija się zgodnie z modelem logistycznym z parametrem wzrostu r i pojemnością środowiska K. Pytanie brzmi: kiedy należy wznowić odłowy? Niech $x(t)$ oznacza populację ryb, w chwili t, $b(t)$ - liczbę łodzi rybackich oraz q "zdolność połowową" przypadającą na jedną łódź na jednostkę czasu, dzięki czemu wskaźnik połowów wynosi $h(t) = qb(t)x(t)$.

(a) Niech t_P oznacza moment wznowienia połów. Napisz równania różniczkowe opisujące przyjęty model rozwoju populacji ryb dla $t < t_P$ i $t \geq t_P$.

(b) Załóżmy, że flota jest stała, $b(t) = B$. Dokonaj ubezwymiarowienia modelu z punktu (a), skalując czas i wielkość populacji przyjmując odpowiednio, że $s = rt$ i $u = x/K$.

(c) Przy założeniu, że po wznowieniu odłowów populacja pozostanie na stałym poziomie wyznacz optymalną liczbę łodzi przy której odłów będzie największy.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $\{N(t), t \geq t\}$ będzie procesem Poissona. Czy proces $\{A(t), t \geq t\}$ zdefiniowany jako $A(t) = N(at)$, gdzie $a > 0$ jest ustaloną stałą, jest procesem Poissona? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Załóżmy, że mamy próbkę losową $(X_1, ..., X_n)$ z rozkładu wykładniczego z parametrem λ. Załóżmy, że chcemy oszacować średnią $1/\lambda$. W tym celu korzystamy z dwóch estymatorów

$$T_1 = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n),$$

oraz

$$T_2 = nM_n, \text{ gdzie } M_n = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}.$$

(a) Wykaż, ze oba estymatory są estymatorami nieobciążonymi średniej.

(b) Przyjmując za kryterium błąd średniokwadratowy, który z estymatorów wybierzesz do estymacji średniej?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Obliczyć całkę

$$\int_{|z|=2} \frac{ze^z}{(z - \operatorname{Log} i)^3} dz,$$

gdzie Log oznacza gałąź główną logarytmu zespolonego. Wynik wyrazić w postaci algebraicznej $a + bi$.

Przyjmujemy, że argument główny bierzemy z przedziału $[0, 2\pi)$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech dana będzie funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}$, $[0,1]$ i $[0,1]^2$ rozważamy metryki euklidesowe.

- Podaj definicję ciągłości funkcji $f\colon X \to \mathbb{R}$.
- Pokaż, że warunek „$f^{-1}[(a,b)]$ jest kulą dla każdego $a < b$" jest dostateczny do tego, by f była ciągła, ale nie jest konieczny.
- Czy istnieje ciągła surjekcja $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy istnieje ciągła surjekcja $h\colon \mathbb{R} \to [0,1]$? Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2019r
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie takim ciągiem zmiennych losowych, że
$\sqrt{n}(X_n - 1) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 2)$. Jaki jest graniczny rozkład zestandaryzowanego ciągu $\{\sqrt{X_n}\}_{n=1}^{\infty}$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech Θ będzie zbiorem parametrycznym, a $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$ rodziną rozkładów. Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ będzie próbą z rozkładu $P_{\boldsymbol{\theta}}$, a $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ podzbiorami zbioru Θ. Dla $i = 1, \ldots, k$, rozważamy test $\varphi_i = \varphi_i(\boldsymbol{X})$, na poziomie istotności α, hipotezy $H_{0i} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_i$ przeciwko alternatywie $H_{1i} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_i^C$, gdzie Θ_i^C jest dopełnieniem zbioru Θ_i. Niech $\Theta_0 = \cup_{i=1}^{k}\Theta_i$. Weryfikujemy $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ przeciwko $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0^C$ testem $\varphi = \varphi(\boldsymbol{X})$, który odrzuca H_0 na korzyść H_1, gdy wszystkie testy φ_i odrzucają H_{0i}. Oszacuj, możliwie najdokładniej, rozmiar testu φ.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Załóżmy, że mamy próbkę losową $(X_1, ..., X_n)$ z rozkładu wykładniczego z parametrem λ. Załóżmy, że chcemy oszacować średnią $1/\lambda$. W tym celu korzystamy z dwóch estymatorów

$$T_1 = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n),$$

oraz

$$T_2 = nM_n, \text{ gdzie } M_n = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}.$$

(a) Wykaż, ze oba estymatory są estymatorami nieobciążonymi średniej.

(b) Przyjmując za kryterium błąd średniokwadratowy, który z estymatorów wybierzesz do estymacji średniej?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Obliczyć całkę

$$\int_{|z|=2} \frac{ze^z}{(z - \operatorname{Log} i)^3} dz,$$

gdzie Log oznacza gałąź główną logarytmu zespolonego. Wynik wyrazić w postaci algebraicznej $a + bi$.

Przyjmujemy, że argument główny bierzemy z przedziału $[0, 2\pi)$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech dana będzie funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}$, $[0,1]$ i $[0,1]^2$ rozważamy metryki euklidesowe.

- Podaj definicję ciągłości funkcji $f\colon X \to \mathbb{R}$.
- Pokaż, że warunek „$f^{-1}[(a,b)]$ jest kulą dla każdego $a < b$" jest dostateczny do tego, by f była ciągła, ale nie jest konieczny.
- Czy istnieje ciągła surjekcja $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy istnieje ciągła surjekcja $h\colon \mathbb{R} \to [0,1]$? Odpowiedź uzasadnij.