**1.** Podać **w uproszczonej postaci** wartość całki oznaczonej.

**a)** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} =$ ...................... **b)** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2} =$ ......................

**c)** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3} =$ ...................... **d)** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^4} =$ ......................

**2.** Podać wartość granicy ciągu.

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n+5}{6n+1}\right)^n =$ ............ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n =$ ............

**c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n =$ ............. **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n =$ .............

**3.** Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

**a)** $\sup\left\{\frac{1}{n^3-20}:\ n\in\mathbb{N}\right\} =$ .................................

**b)** $\sup\left\{\frac{1}{n^2-20}:\ n\in\mathbb{N}\right\} =$ .................................

**c)** $\sup\left\{\frac{1}{n^3-111}:\ n\in\mathbb{N}\right\} =$ ................................

**d)** $\sup\left\{\frac{1}{n^2-111}:\ n\in\mathbb{N}\right\} =$ ................................

**4.** Podać największą wartość funkcji $f$ na okręgu o równaniu $x^2+y^2=1$.

**a)** $f(x,y)=4x+5y$, ..........................................

**b)** $f(x,y)=x+2y$, ..........................................

**c)** $f(x,y)=2x+3y$, ..........................................

**d)** $f(x,y)=3x+4y$, ..........................................

**5.** Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru $p$, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

**a)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$, ............... **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, ...............

**c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^p+1}}$, ............... **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, ...............

**6.** Podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią $a$, aby liczba zespolona $z$ podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=z^{-1}$.

**a)** $z=\frac{4}{5}+ai$, $a=$ ............. **b)** $z=\frac{1}{4}+ai$, $a=$ .............

**c)** $z=\frac{2}{3}+ai$, $a=$ ............. **d)** $z=\frac{3}{5}+ai$, $a=$ .............

**7.** Wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ jest równy 10. Podać wyznacznik podanej macierzy.

**a)** $\det\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ 2d & 4e & 2f \\ g & 2h & i \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$ **b)** $\det\begin{pmatrix} 6a & 2b & 2c \\ 3d & e & f \\ 3g & h & i \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$

**c)** $\det\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$ **d)** $\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$

**8.** Podać takie liczby rzeczywiste $a$, $b$, aby podana macierz miała wartości własne 0 i 1.

**a)** $\begin{pmatrix} 5 & a \\ 6 & b \end{pmatrix}$ $a = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $b = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

**b)** $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ $a = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $b = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

**c)** $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ $a = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $b = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

**d)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ $a = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $b = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

**9.** Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 27, 28, 29\}$, natomiast działaniem jest dodawanie modulo 30. Dla podanego elementu $g$ tej grupy podać rząd elementu $g$.

**a)** $g = 27$, $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **b)** $g = 25$, $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

**c)** $g = 24$, $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **d)** $g = 26$, $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

**10.** Dla podanej liczby $n$ podać największą taką liczbę naturalną $k$, że w grupie permutacji $S_n$ istnieje element rzędu $k$.

**a)** $n=10$, $k=$ ................ **b)** $n=8$, $k=$ ................

**c)** $n=5$, $k=$ ................ **d)** $n=7$, $k=$ ................

**11.** Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest podzielny przez $n$. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

**a)** $P(5)=$ ...................... **b)** $P(2)=$ ......................

**c)** $P(3)=$ ...................... **d)** $P(4)=$ ......................

**12.** Zdarzenia losowe $A$, $B$ i $C$ są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ i $P(B\cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego $P(A\cap B\cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia $A$, $B$ i $C$ spełniające podane warunki. Wpisać **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

**a)** $P(A\cap B)=1/9$, $P(A\cap C)=1/9$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cap B\cap C)=$ ...............

**b)** $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=2/3$, $P(B\cap C)=1/3$,
$P(A\cap B\cap C)=$ ...............

**c)** $P(A\cap B)=1/4$, $P(A\cap C)=1/4$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cap B\cap C)=$ ...............

**d)** $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/2$, $P(B\cap C)=1/4$,
$P(A\cap B\cap C)=$ ...............