1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_2 x)^n$, ... **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log_3 x)^n}{\sqrt{n}}$, ...

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log_5 x)^n}{n}$, ... **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log_7 x)^n}{n^2}$, ...

2. Podać wartość granicy:

a) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\left(\sqrt[6]{6}-\sqrt{2}\right)\cdot x\right) =$ ....

b) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\left(\sqrt[5]{5}-\sqrt{2}\right)\cdot x\right) =$ ....

c) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\left(\sqrt[4]{4}-\sqrt{2}\right)\cdot x\right) =$ ....

d) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}\right)\cdot x\right) =$ ....

3. Podać sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2019}{2020}\right)^n =$ .... **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n =$ ....

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{34}{55}\right)^n =$ .... **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{21}{55}\right)^n =$ ....

4. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem

$$C(a,b)=\int\limits_a^b \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(0,2)=$ .... **b)** $C(0,1)=$ ....

c) $C(1,3)=$ .... **d)** $C(2,3)=$ ....

5. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podane wyrażenie przyjmuje tylko wartości nieujemne przy $x,y\in\mathbb{R}$. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $x^2+pxy+y^2$, ...

b) $9x^2+pxy+y^2$, ...

c) $x^2+pxy+4y^2$, ...

d) $9x^2+pxy+4y^2$, ...

6. Dla podanej liczby a podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią b, aby dla liczby zespolonej $z=a+bi$ liczba $z+\frac{1}{z}$ była rzeczywista.

a) $a=\frac{4}{5}$, $b=$ .... **b)** $a=\frac{3}{5}$, $b=$ ....

c) $a=\frac{1}{5}$, $b=$ .... **d)** $a=\frac{2}{5}$, $b=$ ....

7. Wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{pmatrix}$ jest równy 1. Podać wyznacznik podanej macierzy.

a) $\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c & 2d \\ 2e & 2f & 2g & 2h \\ 2i & 2j & 2k & 2l \\ 2m & 2n & 2p & 2q \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $\det\begin{pmatrix} 4a & 2b & 2c & 2d \\ 2e & f & g & h \\ 2i & j & k & l \\ 2m & n & p & q \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\det\begin{pmatrix} 4a & 2b & 2c & 2d \\ 6e & 3f & 3g & 3h \\ 6i & 3j & 3k & 3l \\ 2m & n & p & q \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $\det\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c & 3d \\ 3e & 3f & 3g & 3h \\ 3i & 3j & 3k & 3l \\ 3m & 3n & 3p & 3q \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

8. Podać taką liczbę rzeczywistą p, aby liczba 1 była wartością własną podanej macierzy.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 6 \end{pmatrix}$ $p = \ldots\ldots\ldots$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 5 \end{pmatrix}$ $p = \ldots\ldots\ldots$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 4 \end{pmatrix}$ $p = \ldots\ldots\ldots$ **d)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 3 \end{pmatrix}$ $p = \ldots\ldots\ldots$

9. Dla podanej liczby r podać liczbę elementów rzędu r w grupie izometrii 60-kąta foremnego.

a) $r = 5$, ... **b)** $r = 3$, ...

c) $r = 2$, ... **d)** $r = 4$, ...

10. Dla podanej liczby k podać najmniejszą taką liczbę naturalną n, że w grupie permutacji S_n istnieje element rzędu k.

a) $k = 66$, $n =$ .... **b)** $k = 65$, $n =$ ....

c) $k = 63$, $n =$ .... **d)** $k = 64$, $n =$ ....

11. Gracz obstawia, że przy 6-krotnym rzucie monetą wypadnie dokładnie n orłów. Jeżeli tak się stanie, gracz wygra n złotych, w przeciwnym razie nie wygra nic. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną wygranej gracza (w złotych). Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(5) =$ .... **b)** $E(2) =$ ....

c) $E(3) =$ .... **d)** $E(4) =$ ....

12. W urnie jest 6 kul białych i 4 kule czarnych. Losujemy (bez zwracania) trzy kule. Niech $P(b)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowano dokładnie b kul białych. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(1) =$ .... **b)** $P(2) =$ ....

c) $P(3) =$ .... **d)** $P(0) =$ ....