

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
17 lutego 2021 r.

Zadanie 1. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{85} < \arctg 13 - \arctg 11 < \frac{1}{61}.$$

Zadanie 2. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^5 \int_x^{\sqrt{50-x^2}} e^{x^2+y^2} dy dx.$$

Zadanie 3. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x' = x + y, \quad y' = y, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Zadanie 4. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka macierz A rozmiaru 4×4 o wyrazach rzeczywistych, że

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 5. Dana jest skończona grupa nieabelowa G oraz takie jej elementy a, b , że:

- rząd elementu a jest równy 5,
- rząd elementu b jest nieparzystą liczbą pierwszą,
- zachodzi równość $ba = ab^3$.

Wyznaczyć rząd elementu b .

Zadanie 6. W Dakistanie rozwija się epidemia, na którą zapadło już 0,1% społeczeństwa. Na szczęście dostępny jest bardzo skuteczny test, który z prawdopodobieństwem 99,9% poprawnie określa, czy dana osoba jest zakażona. Dokładniej: Przetestowanie osoby zdrowej da wynik negatywny z prawdopodobieństwem 99,9% i pozytywny z prawdopodobieństwem 0,1%, a przetestowanie osoby zakażonej da wynik pozytywny z prawdopodobieństwem 99,9% i negatywny z prawdopodobieństwem 0,1%.

Przetestowano losowo wybranego obywatela Dakistanu i okazało się, że wynik testu jest pozytywny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przetestowany obywatel jest zakażony?