EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2021 r.
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech X będzie odcinkiem $[0,1]$, a Y okręgiem jednostkowym (obydwie przestrzenie rozważamy wyposażone w metrykę euklidesową).

1) Wskaż funkcję ciągłą z X na Y.
2) Wskaż funkcję ciągłą z Y na X.
3) Pokaż, że X i Y nie są homeomorficzne.
4) Czy istnieje ciągła bijekcja z X na Y? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Oblicz

$$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}}.$$

Czy jest to liczba wymierna? Czy jest to liczba algebraiczna? Odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Dany jest czworościan foremny o krawędziach długości a. Oblicz wysokość tego czworościanu, oraz rozstrzygnij, wraz z uzasadnieniem, czy miara kąta dwuściennego w tym czworościanie jest mniejsza czy większa niż $60°$, czyli $\pi/3$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Dla

$$X = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

znajdź zbiór potęgowy $\mathcal{P}(X)$ oraz część wspólną $X \cap \mathcal{P}(X)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2021 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech X będzie odcinkiem $[0,1]$, a Y okręgiem jednostkowym (obydwie przestrzenie rozważamy wyposażone w metrykę euklidesową).

1) Wskaż funkcję ciągłą z X na Y.
2) Wskaż funkcję ciągłą z Y na X.
3) Pokaż, że X i Y nie są homeomorficzne.
4) Czy istnieje ciągła bijekcja z X na Y? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową a $\mathrm{End}(V)$ oznacza pierścień endomorfizmów przestrzeni V. Załóżmy, że $T \in \mathrm{End}(V)$ jest idempotentem, tzn. $T^2 = T$.

(a)(3pkt) Dowieść, że $V = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T)$ oraz $T(v+w) = v$ dla dowolnego $v \in \mathrm{Im}(T)$ i $w \in \mathrm{Ker}(T)$.
(b)(2pkt) Czy T jest diagonalizowalny? Odpowiedź uzasadnić.
(c)(3pkt) Podać przykłady trzech różnych idempotentów w $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Rozważmy $\mathbb{R}^2$ z normą $\|(x,y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ dla $1 \leq p < \infty$ lub z normą $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$ gdy $p = \infty$. Na podprzestrzeni $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\}$ dany jest funkcjonał $\phi : Y \to \mathbb{R}$ zdefiniowany wzorem $\phi(x,y) = x$.

Przypomnijmy, że rozszerzeniem Hahna-Banacha funkcjonału ϕ jest funkcjonał $\tilde{\phi}$ na $\mathbb{R}^2$, który zgadza się z ϕ na Y oraz $\|\phi\| = \|\tilde{\phi}\|$.

1. (2 pkt.) Udowodnij, że dla $p \in (1,\infty)$ funkcjonał ϕ ma jedyne rozszerzenie Hahna-Banacha (za rozwiązanie dla $p = 2$ otrzymasz połowę punktów).

2. (2 pkt.)Udowodnij, że dla $p = \infty$ funkcjonał ϕ ma jedyne rozszerzenie Hahna-Banacha.

3. (2 pkt.)Znajdź wszystkie rozszerzenia Hahna-Banacha funkcjonału ϕ gdy $p = 1$.
4. (2 pkt.)Czy dla $p = \infty$ istnieje jednowymiarowa podprzestrzeń Z przestrzeni $\mathbb{R}^2$ oraz funkcjonał $\psi : Z \to \mathbb{R}$, który ma więcej niż jedno przedłużenie Hahna-Banacha? Jeśli tak, podaj przykład ψ.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Udowodnij, że G_δ podzbiór prostej rzeczywistej, który jest gęsty i ma gęste dopełnienie, jest homemorficzny z przestrzenią liczb niewymiernych. Pokaż, że nie można zastąpić prostej przez płaszczyznę.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2021 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech X będzie odcinkiem $[0,1]$, a Y okręgiem jednostkowym (obydwie przestrzenie rozważamy wyposażone w metrykę euklidesową).

1) Wskaż funkcję ciągłą z X na Y.

2) Wskaż funkcję ciągłą z Y na X.

3) Pokaż, że X i Y nie są homeomorficzne.

4) Czy istnieje ciągła bijekcja z X na Y? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową a $\mathrm{End}(V)$ oznacza pierścień endomorfizmów przestrzeni V. Załóżmy, że $T \in \mathrm{End}(V)$ jest idempotentem, tzn. $T^2 = T$.

(a)(3pkt) Dowieść, że $V = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T)$ oraz $T(v+w) = v$ dla dowolnego $v \in \mathrm{Im}(T)$ i $w \in \mathrm{Ker}(T)$.
(b)(2pkt) Czy T jest diagonalizowalny? Odpowiedź uzasadnić.
(c)(3pkt) Podać przykłady trzech różnych idempotentów w $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Rozważmy $\mathbb{R}^2$ z normą $\|(x,y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ dla $1 \leq p < \infty$ lub z normą $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$ gdy $p = \infty$. Na podprzestrzeni $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\}$ dany jest funkcjonał $\phi : Y \to \mathbb{R}$ zdefiniowany wzorem $\phi(x,y) = x$.

Przypomnijmy, że rozszerzeniem Hahna-Banacha funkcjonału ϕ jest funkcjonał $\tilde{\phi}$ na $\mathbb{R}^2$, który zgadza się z ϕ na Y oraz $\|\phi\| = \|\tilde{\phi}\|$.

1. (2 pkt.) Udowodnij, że dla $p \in (1,\infty)$ funkcjonał ϕ ma jedyne rozszerzenie Hahna-Banacha (za rozwiązanie dla $p = 2$ otrzymasz połowę punktów).

2. (2 pkt.)Udowodnij, że dla $p = \infty$ funkcjonał ϕ ma jedyne rozszerzenie Hahna-Banacha.

3. (2 pkt.)Znajdź wszystkie rozszerzenia Hahna-Banacha funkcjonału ϕ gdy $p = 1$.

4. (2 pkt.)Czy dla $p = \infty$ istnieje jednowymiarowa podprzestrzeń Z przestrzeni $\mathbb{R}^2$ oraz funkcjonał $\psi : Z \to \mathbb{R}$, który ma więcej niż jedno przedłużenie Hahna-Banacha? Jeśli tak, podaj przykład ψ.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech S_n będzie prostym symetrycznym spacerem losowym na kracie $\mathbb{Z}^2$ (tzn. $S_0 = (0, 0)$ i w każdym kroku cząsteczka przemieszcza się do jednego z sąsiadów z prawdopodobieństwem 1/4). Oznaczmy przez D_n odległość S_n od zera.

- Pokaż, że $D_n^2 - n$ jest martyngałem.
- Niech $T_r = \inf\{n : D_n > r\}$. Pokaż, że $T_t < \infty$ z prawdopodobieństwem 1.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2021 r.
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**

Mamy dane 4 punkty z $\mathbb{R}^2 : (-1,-1), (1,3), (2,1), (-2,-3)$. Stosując algorytm *Składowych Głównych* (ang. PCA - *Principal Component Analysis*), wykonaj redukcję tych punktów do wymiaru 1 (tj. używając pierwszej składowej głównej). Podaj współrzędne tych 4 punktów po takiej redukcji.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N$ będzie próbą z rozkładu $N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, gdzie $|\Sigma| > 0$, $N > n$, a macierz kowariancji jest znana. Rozważamy problem testowania $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ przeciwko $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$ na poziomie istotności α. Podaj postać statystyki testowej w powyższym zagadnieniu. Jaki jest jej rozkład przy H_0? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(\mu, 1)$. Wyznacz test ilorazu wiarogodności w problemie testowania

$H_0 : \mu = 0;$

$H_1 : \mu \neq 0,$

na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Para zmiennych losowych (X, Y) ma łączny rozkład zadany natępującą tablicą funkcji prawdopodobieństwa $p(i,j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$:

Tabela 1: Funkcja prawdopodobieństwa $p(i,j)$ łącznego rozkładu (X, Y)

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	1/8	1/8	1/8	1/8
1	1/8	0	0	0
2	1/8	0	0	0
3	1/8	0	0	1/8

1 Czy zmienne losowe X, Y są niezależne. Uzasadnij odpowiedź.

2 Niech $Z = \min(2, XY)$. Obliczyć $\mathbb{E}Z$.

3 Rozkład pary zmiennych losowych (W, V) ma funkcję prawdopodobieństwa $p_{W,V}(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j | X + Y \leq 2)$. Policzyć kowariancję $\mathrm{cov}(W, V)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2021 r.
Aktuarialno-finansowa

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech B_t będzie ruchem Browna. Wyznacz gęstość warunkową $(B_s), 0 \leq s < 1$ pod warunkiem $B(1) = 0$. Wyznacz $E(B_s|B_1 = 0)$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Para zmiennych losowych (X, Y) ma łączny rozkład zadany natępującą tablicą funkcji prawdopodobieństwa $p(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$:

Tabela 2: Funkcja prawdopodobieństwa $p(i, j)$ łącznego rozkładu (X, Y)

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	1/8	1/8	1/8	1/8
1	1/8	0	0	0
2	1/8	0	0	0
3	1/8	0	0	1/8

1 Czy zmienne losowe X, Y są niezależne. Uzasadnij odpowiedź.

2 Niech $Z = \min(2, XY)$. Obliczyć $\mathbb{E}Z$.

3 Rozkład pary zmiennych losowych (W, V) ma funkcję prawdopodobieństwa $p_{W,V}(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j|X + Y \leq 2)$. Policzyć kowariancję $\mathrm{cov}(W, V)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niezależne szkody mają rozkłady $P(X_i = k) = exp(-1)/k!$, $P(Y_i = k) = \binom{4+k}{k}(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^k$, $k = 0, 1, \ldots$. Niech $S = X_1 + \ldots + X_{500} + Y_1 + \ldots + Y_{500}$. Składka pobierana od szkody S jest postaci $(1+\theta)ES$, dla pewnej stałej $\theta > 0$. Wylicz wartość tej stałej, aby szansa, że zebrana składka od wszystkich 1000 szkód pokryje szkodę wynosiła 0.95.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Rozważmy kontrakt forward oraz opcje (europejskie waniliowe) call i put na to samo aktywo bazowe XYZ (akcję niewypłacającą dywidend) oraz z taką samą zapadalnością T lat. Ceny wykonania obu opcji są równe 110 zł. Dzisiejsza cena akcji XYZ wynosi 100 zł, natomiast jej cena forward w rozważanym kontrakcie (czyli cena, którą trzeba będzie zapłacić w przyszłości w momencie dostawy akcji) to 125 zł. Dodatkowo wiemy, że cena opcji put wynosi 22 zł. Inwestor chce zbudować portfel składający się z obu tych opcji (tj. 1 call i 1 put, obie opcje w pozycji długiej). Ile będzie musiał zapłacić za taki portfel, jeśli na rynku nie ma arbitrażu? Narysuj też payoff z tego portfela (jako funkcję zależną od wartości akcji XYZ w chwili wykonania opcji).

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2021 r.
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozważamy równanie dyfuzji

$$u_t = u_{xx}$$

na odcinku $(0, 1)$ z warunkiem brzegowym $u(0, t) = u(1, t) = 0$ i warunkiem początkowym $u(x, 0) = x(1 - x)$.

Udowodnić, że:

1. istnieje rozwiązanie tego zagadnienia;
2. jest ono dokładnie jedno;
3. jest ono nieujemne;
4. zbiega do zera, gdy czas zbiega do nieskończoności.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Rozpatrzmy reakcję biochemiczną, w której substancja S jest zarówno produkowana, jak i konsumowana. Niech $c(t)$ oznacza stężenie substancji S w chwili t. Zakładamy, że zmiany $c(t)$ podczas reakcji opisane są przez równanie

$$\frac{dc}{dt} = K_{max}\frac{c}{k + c} - rc,$$

gdzie K_{max}, k i r są dodatnimi stałymi. Pierwszy wyraz różnicy opisuje, zależną od stężenia, produkcję substancji S natomiast drugi wyraz opisuje konsumpcję.

(i) Jakie jest maksymalne tempo produkcji substancji?

(ii) Jeśli produkcja zostanie zatrzymana, substancja jest nadal konsumowana. Ile w tej sytuacji upłynie jednostek czasu zanim stężenie spadnie o 50%?

(iii) Przy jakiej wartości stężenia tempo produkcji jest równoważone przez konsumpcję?

Zadanie **3. (8 punktów)**

Rozpatrzmy rzuty symetryczną kostką i umówmy się, że $X_n = j$, jeżeli j jest największą liczbą oczek, wyrzuconych w pierwszych n rzutach.

(i) Czy $\{X_n\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa?

(ii) Jeżeli tak, to wyznacz jego macierz prawdopodobieństw przejść w jednym kroku.

(iii) Czy istnieje rozkład stacjonarny dla tego łańcucha? Jeśli tak to jaka jest jego postać.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Para zmiennych losowych (X, Y) ma łączny rozkład zadany natępującą tablicą funkcji prawdopodobieństwa $p(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$:

Tabela 3: Funkcja prawdopodobieństwa $p(i, j)$ łącznego rozkładu (X, Y)

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	1/8	1/8	1/8	1/8
1	1/8	0	0	0
2	1/8	0	0	0
3	1/8	0	0	1/8

1 Czy zmienne losowe X, Y są niezależne. Uzasadnij odpowiedź.

2 Niech $Z = \min(2, XY)$. Obliczyć $\mathbb{E}Z$.

3 Rozkład pary zmiennych losowych (W, V) ma funkcję prawdopodobieństwa $p_{W,V}(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j | X + Y \leq 2)$. Policzyć kowariancję $\mathrm{cov}(W, V)$.