

**EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)**  
**29 czerwca 2021 r.**

*Zadanie 1.* Obliczyć wartość granicy ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

*Zadanie 2.* Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^{12}}$$

albo wykazać, że ta granica nie istnieje.

*Zadanie 3.* Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x''(t) + x(t) = 2 \cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

*Zadanie 4.* Dane są takie macierze kwadratowe  $A, B$  rozmiaru  $7 \times 7$  o wyrazach rzeczywistych, że macierz  $A$  jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej 7 różnych wyrazów, a ponadto  $AB = BA$ . Dowieść, że macierz  $B$  również jest macierzą diagonalną.

*Zadanie 5.* Podać przykład skończonej grupy abelowej mającej co najmniej 5 elementów rzędu 5.

*Oczywista oczywistość:* Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

*Zadanie 6.* W urnie znajdują się dwie kule: biała i czarna.

Losujemy z urny jedną kulę. Jeżeli jest to kula biała, kończymy procedurę. Jeżeli natomiast wylosowana kula jest czarna, wkładamy ją z powrotem do urny i dodatkowo dokładamy do urny jeszcze jedną kulę czarną. W urnie znajdują się wówczas 3 kule: biała i 2 czarne.

W tym przypadku ponownie losujemy z urny jedną kulę. Jeżeli jest to kula biała, kończymy procedurę. Jeżeli natomiast wylosowana kula jest czarna, wkładamy ją z powrotem do urny i dodatkowo dokładamy do urny jeszcze jedną kulę czarną. W urnie znajdują się wówczas 4 kule: biała i 3 czarne.

I tak dalej: Za każdym razem wylosowanie białej kuli kończy procedurę losowania kul, a wylosowanie kuli czarnej powoduje zwrócenie jej do urny wraz z dodatkową kulą czarną i ponowne losowanie.

Jeżeli dojdzie do tego, że będziemy po raz dziesiąty losować kulę z urny, to po dziesiątym losowaniu kończymy procedurę niezależnie od koloru wylosowanej kuli.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że dziesięciokrotnie wylosowano kulę czarną?