

1. Podać wartość granicy:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \dots\dots\dots$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 3x} - 2x) = \dots\dots\dots$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - x) = \dots\dots\dots$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 3x^2} - 2x) = \dots\dots\dots$

2. Niech  $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ . Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji  $f$  w punkcie 1.

a)  $f^{(4)}(1) = \dots\dots\dots$     b)  $f'''(1) = \dots\dots\dots$

c)  $f''(1) = \dots\dots\dots$     d)  $f'(1) = \dots\dots\dots$

3. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \cdot x^n, \quad R = \dots\dots\dots$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \cdot x^{2n}, \quad R = \dots\dots\dots$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot x^{3n}, \quad R = \dots\dots\dots$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot x^n, \quad R = \dots\dots\dots$

4. Podać wartość całki oznaczonej.

a)  $\int_0^1 x^5 \cdot e^{x^6} dx = \dots\dots\dots$     b)  $\int_0^1 x^2 \cdot e^{x^3} dx = \dots\dots\dots$

c)  $\int_0^1 x^3 \cdot e^{x^4} dx = \dots\dots\dots$     d)  $\int_0^1 x^4 \cdot e^{x^5} dx = \dots\dots\dots$

5. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{8! \cdot x} & \text{dla } x \in (-1, \infty) \setminus \{0\} \\ \frac{1}{8!} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji  $f$  w zerze.

a)  $f^{(7)}(0) = \dots\dots\dots$     b)  $f^{(9)}(0) = \dots\dots\dots$

c)  $f^{(8)}(0) = \dots\dots\dots$     d)  $f^{(10)}(0) = \dots\dots\dots$

6. Podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią  $a$ , aby liczba zespolona  $z$  podanej postaci spełniała równanie  $\bar{z} = z^{-1}$ .

a)  $z = \frac{4}{5} + ai$ ,  $a = \dots\dots\dots$     b)  $z = \frac{1}{2} + ai$ ,  $a = \dots\dots\dots$

c)  $z = \frac{2}{3} + ai$ ,  $a = \dots\dots\dots$     d)  $z = \frac{12}{13} + ai$ ,  $a = \dots\dots\dots$

7. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru  $p$ , aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & p \end{pmatrix}$ ,  $p = \dots\dots\dots$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & p \end{pmatrix}$ ,  $p = \dots\dots\dots$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & p \end{pmatrix}$ ,  $p = \dots\dots\dots$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & p \end{pmatrix}$ ,  $p = \dots\dots\dots$

8. Dla podanych liczb  $a$  i  $b$  podać taką liczbę rzeczywistą  $c$ , że wektory  $(a, b, c)$  i  $(b, c, a)$  są prostopadłe.

a)  $a=2, b=3, c = \dots\dots\dots$     b)  $a=1, b=3, c = \dots\dots\dots$

c)  $a=1, b=2, c = \dots\dots\dots$     d)  $a=1, b=1, c = \dots\dots\dots$

9. Dla podanej liczby  $k$  podać najmniejszą taką liczbę naturalną  $n$ , że w grupie permutacji **parzystych**  $A_n$  istnieje element rzędu  $k$ .

a)  $k=10, n = \dots\dots\dots$     b)  $k=4, n = \dots\dots\dots$

c)  $k=2, n = \dots\dots\dots$     d)  $k=6, n = \dots\dots\dots$

**10.** Niech  $E(n)$  będzie liczbą elementów rzędu  $n$  w grupie cyklicznej rzędu  $n$ . Wówczas.

a)  $E(27) = \dots\dots\dots$     b)  $E(25) = \dots\dots\dots$

c)  $E(12) = \dots\dots\dots$     d)  $E(15) = \dots\dots\dots$

**11.** Przy rzucie fałszywą monetą orzeł wypada z prawdopodobieństwem  $1/3$ , a reszka z prawdopodobieństwem  $2/3$ . Dla podanej liczby  $k$  podać taką liczbę naturalną  $n > k$ , że przy  $n$ -krotnym rzucie fałszywą monetą prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie  $k$  orłów jest równe prawdopodobieństwu wyrzucenia dokładnie  $k + 1$  orłów.

a)  $k = 10, n = \dots\dots\dots$     b)  $k = 4, n = \dots\dots\dots$

c)  $k = 5, n = \dots\dots\dots$     d)  $k = 6, n = \dots\dots\dots$

**12.** W urnie znajduje się  $n$  kul z kolejnymi liczbami od 1 do  $n$ . Dwukrotnie losujemy z urny kulę (losowanie ze zwracaniem). Niech  $E(n)$  będzie wartością oczekiwaną iloczynu liczb napisanych na wylosowanych kulach. Podać w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a)  $E(6) = \dots\dots\dots$     b)  $E(7) = \dots\dots\dots$

c)  $E(8) = \dots\dots\dots$     d)  $E(5) = \dots\dots\dots$