EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.02.2022 r.
Matematyka w ekonomii

Zadanie **1. (8 punktów)**

Zakładamy, że zmienna objaśniana Y może być opisana przez siedem zmiennych objaśniających $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_7$. Jednocześnie wiadomo, że zmienne X_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7$, związane są zależnościami:

$$\frac{X_1}{2X_2} = 1, \quad X_1 + X_4 = 1, \quad \frac{X_2}{X_5} = X_4, \quad X_6 = 3X_7 - 4.$$

Których z podanych modeli nie można estymować za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów i dlaczego?

(i) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_6 X_6 + \epsilon$,

(ii) $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_3 X_3 + \alpha_7 X_7 + \epsilon$,

(iii) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_4 X_4 + \alpha_5 X_5 + \epsilon$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$. Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru μ oraz parametru σ^8.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Załóżmy, że roczne zyski firmy bukmacherskiej "Oszust" są dobrze opisane modelem AR(2) postaci:

$$X_t = \frac{1}{4} X_{t-1} + \frac{1}{2} X_{t-2} + W_t,$$

gdzie $\{W_t\}$ to ciąg i.i.d zmiennych losowych o rozkładzie $N(0,\ 2)$.
Z raportów wiemy, że zyski w latach 2019, 2020, 2021 wyniosły odpowiednio 8 milionów, 11 milionów i 10 milionów. Wyznacz prognozę liniową dla zysków firmy w roku 2022 i podaj jej wartość.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, $X_1, \ldots, X_n$ niezależne o jednakowym rozkładzie $\mathbb{E}X_i = \mu$, $\mathbb{V}ar X_i = \sigma^2 < \infty$, $Y_1, \ldots, Y_n$ niezależne o jednakowym rozkładzie $\mathbb{E}Y_i = 0$, $\mathbb{V}ar Y_i = 2\sigma^2$. Policzyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{j=1}^{n} Y_j > n\mu + \sigma\sqrt{3n}x).$$

Dla jakiego x granica równa się $\frac{1}{2}$?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.02.2022 r.
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**
Rozważmy uporządkowany wektor p-wartości

$$0.0003, 0.0013, 0.0082, 0.0095, 0.0228, 0.0259, 0.2254, 0.2710,$$
$$0.3552, 0.4521, 0.5468, 0.6306, 0.6391, 0.7310, 0.8565\ \ .$$

Ile hipotez zostanie odrzuconych za pomocą:

a) Procedury Holma z nominalnym poziomem FWER $\alpha = 0.2$, (3pt)

b) Procedury Benjaminiego Hochberga z nominalnym poziomem FDR $q = 0.2$ (3pt) ?

Wektor indykatorów fałszywych hipotez przyjmuje postać

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\ \ .$$

Wyznacz proporcję fałszywych odkryć (FDP) dla zastosowanej procedury Benjaminiego-Hochberga. (2pt)

Zadanie **2. (8 punktów)**
Gęstość rozkładu wektora losowego $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ ma postać

$$f(x_1, x_2) = \frac{3}{4} x_1^{-1/2} \mathbb{1}(0 < x_1 < x_2 < 1).$$

Oblicz: $P(X_1 < 0,25)$, $P(X_2 < 0,25)$ oraz $P(X_2 < 0,25 | X_1 < 0,25)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ będzie próbą z rozkładu dwupunktowego $b(1,p)$, $p \in (0,1)$. Wyznacz estymator minimaksowy parametru p przy funkcji straty $L(p,a) = (p-a)^2$. Oblicz jego ryzyko.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Niech $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, $X_1, \ldots, X_n$ niezależne o jednakowym rozkładzie $\mathbb{E}X_i = \mu$, $\mathbb{V}arX_i =$

$\sigma^2 < \infty$, $Y_1, \ldots, Y_n$ niezależne o jednakowym rozkładzie $\mathbb{E}Y_i = 0$, $\mathbb{V}arY_i = 2\sigma^2$. Policzyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{j=1}^{n} Y_j > n\mu + \sigma\sqrt{3n}x).$$

Dla jakiego x granica równa się $\frac{1}{2}$?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.02.2022 r.
Aktuarialno-finansowa

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{W(t) := B(t) - ct; t \geq 0\}$, gdzie $\{B(t); t \geq 0\}$ jest standardowym ruchem Browna oraz $c > 0$. Znaleźć wszystkie $\theta \in \mathbb{R}$, dla których proces

$$M(t) := e^{\theta W(t)}, \quad t \geq 0$$

jest martyngałem. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, $X_1, \ldots, X_n$ niezależne o jednakowym rozkładzie $\mathbb{E}X_i = \mu$, $\mathbb{V}arX_i = \sigma^2 < \infty$, $Y_1, \ldots, Y_n$ niezależne o jednakowym rozkładzie $\mathbb{E}Y_i = 0$, $\mathbb{V}arY_i = 2\sigma^2$. Policzyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{j=1}^{n} Y_j > n\mu + \sigma\sqrt{3n}x).$$

Dla jakiego x granica równa się $\frac{1}{2}$?

Zadanie **3. (8 punktów)**

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X dany jest w tabeli:

x	0	1	2	5	10	20
$P(X = x)$	0.8	0.1	0.03	0.03	0.03	0.01

Wyznacz d, jeśli wiadomo, że $E[I_d(X)] = 0.37.$($I_d(Y) = (Y - d)_+$).

Zadanie **4. (8 punktów)**

Rozważ kontrakt forward, w którym jesteś zobowiązana(y) do dostarczenia 1 USD w chwili T w zamian za płatną w momencie dostawy kwotę F złotych. Stała ciągła stopa wolna od ryzyka wynosi r dla PLN oraz r_f dla USD. Niech $V(S,t)$ oznacza wolną od arbitrażu wartość twojej pozycji w chwili $t \in [0,T]$ w zależności od bieżącej ceny aktywa S, oznaczającego wartość 1 USD w PLN.

1. Wyznacz wartość $V(S,t)$.

2. Sprawdź, że wyprowadzony przez Ciebie wzór spełnia odpowiednią wersję różniczkowego równania Blacka-Scholesa.