

EGZAMIN WSTĘPNY (zadania otwarte)
16 lutego 2022 r.

Zadanie 1. Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(5) + f(7) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(6) ?$$

Zadanie 2. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6}$$

albo wykazać, że ta granica nie istnieje.

Zadanie 3. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$y'' + y = 2e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Zadanie 4. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka macierz A rozmiaru 5×5 o wyrazach całkowitych, że

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A.$$

Zadanie 5. Podać przykład skończonej grupy abelowej G oraz takich jej **różnych** elementów a, b i c , że rzędy elementów ab, bc i ac są równe 2.

Oczywista oczywistość: Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie 6. Rzucamy kostką do gry i wkładamy do urny tyle kul białych, ile oczek wypadło na kostce. Jeśli wypadło mniej niż sześć oczek, to dorzucamy do urny tyle kul czarnych, aby w urnie znajdowało się sześć kul. Następnie losujemy z urny kulę i okazuje się, że jest to kula biała. Kulę tę odkładamy na bok (nie wrzucamy jej z powrotem do urny), a następnie losujemy drugą kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga wylosowana kula jest czarna?