1. Podać w postaci uproszczonej kres górny zbioru.
Uwaga: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

a) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ m^2\leqslant 64n^2\right\}=$ ....

b) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ m^3\leqslant 64n^3\right\}=$ ....

c) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^m\leqslant 64^n\right\}=$ ....

d) $\sup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4^m\leqslant 64^n\right\}=$ ....

2. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x+1)\cdot(x+2)}=\ln C(a,b)\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(4,6)=$ .... **b)** $C(3,5)=$ ....

c) $C(2,4)=$ .... **d)** $C(1,3)=$ ....

3. Podać wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^{12}\,dx}{x^{13}+1}=$ .... **b)** $\int\limits_0^1 \frac{x^{10}\,dx}{x^{11}+1}=$ ....

c) $\int\limits_0^1 \frac{x^{18}\,dx}{x^{19}+1}=$ .... **d)** $\int\limits_0^1 \frac{x^{16}\,dx}{x^{17}+1}=$ ....

4. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $x > -1$, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_7(x+1))^n$, ...

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_2(x+1))^n$, ...

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_3(x+1))^n$, ...

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_5(x+1))^n$, ...

5. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = x^{50} \cdot e^{x^2}$. Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(70)}(0) =$ .... **b)** $f^{(90)}(0) =$ ....

c) $f^{(80)}(0) =$ .... **d)** $f^{(100)}(0) =$ ....

6. Podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^3 \cdot \overline{z}^3 = 1000$.

a) $z = 3 + ai$, $a =$ .... **b)** $z = \sqrt{5} + ai$, $a =$ ....

c) $z = 1 + ai$, $a =$ .... **d)** $z = 2 + ai$, $a =$ ....

7. Dla podanych liczb a i b wskazać taką liczbę c, aby wektory $(1,2,3)$, $(4,5,6)$ i (a,b,c) były liniowo zależne.

a) $a=1, \quad b=3, \quad c=$ ....

b) $a=1, \quad b=4, \quad c=$ ....

c) $a=1, \quad b=6, \quad c=$ ....

d) $a=1, \quad b=5, \quad c=$ ....

8. Podać takie liczby rzeczywiste a, b, aby macierz A spełniała równanie

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $A=\begin{pmatrix} 4 & a \\ 5 & b \end{pmatrix}$, $a=$ ...., $b=$ ....

b) $A=\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$, $a=$ ...., $b=$ ....

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$, $a=$ ...., $b=$ ....

d) $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$, $a=$ ...., $b=$ ....

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1,2,3,\ldots,p-2,p-1\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo p. Dla podanej liczby pierwszej p podać element odwrotny do 3.

a) $p=19$, ... **b)** $p=13$, ...

c) $p=7$, ... **d)** $p=17$, ...

10. Dla podanej liczby n podać największą taką liczbę naturalną k, że w grupie permutacji S_n istnieje element rzędu k.

a) $n=8$, $k=$ .... **b)** $n=7$, $k=$ ....

c) $n=5$, $k=$ .... **d)** $n=6$, $k=$ ....

11. W urnie znajduje się 5 kul białych i c kul czarnych. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(c)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowano dwie kule czarne. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5)=$ .... **b)** $P(2)=$ ....

c) $P(3)=$ .... **d)** $P(4)=$ ....

12. W urnie znajdują się 3 kule z liczbami 1, 2 i 3. Losujemy z urny n-krotnie kule (losowanie ze zwracaniem). Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną iloczynu liczb napisanych na wylosowanych kulach. Podać w postaci uproszczonej:

a) $E(3)=$ .... **b)** $E(4)=$ ....

c) $E(5)=$ .... **d)** $E(2)=$ ....