EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2022 r.
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozważmy równanie dyfuzji $u_t = u_{xx}$ na prostej $x \in \mathbb{R}$ i warunkiem początkowym $u(x,0) = 4x(1-x)$ dla $x \in (0,1)$ oraz $u(x,0) = 0$ poza tym odcinkiem.

Skonstruuj rozwiązanie $u(x,t)$ tego zagadnienia.

Udowodnij, że $0 \leq u(x,t) \leq 1$ dla wszystkich $t > 0$ i $x \in \mathbb{R}$.

Udowodnij, że $u(x,t) \to 0$, gdy $t \to +\infty$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

(Kurczenie się mięśnia). W 1938 roku Av Hill w artykule *"The heat of shortening and the dynamic constants of muscle"* zaproponował model matematyczny opisujący $v\,[mm/s]$, szybkość kurczenia się mięśnia podczas pracy przeciw obciążeniu $p\,[g]$. Jego tak zwana krzywa *siła-prędkość* jest dana przez związek

$$(p+a)v = b(p_0 - p),$$

gdzie a, b, p_0 są dodatnimi stałymi.

(a) Wyznacz tempo zmiany prędkości skracania w odniesieniu do obciążenia.

(b) Jakie jest największe obciążenie, przy którym mięsień kurczy się?

Wskazówka. *Kurczący się mięsień ma dodatnią prędkość skracania, podczas gdy mięsień z bardzo dużym obciążeniem raczej się rozciąga niż kurczy.*

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $\{B(t),\, t \geq 0\}$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że dla $\theta > 0$ proces $\{X(t),\, t \geq 0\}$ zdefiniowany, dla $t \geq 0$, jako

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} B(\theta t),$$

jest również ruchem Browna.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Para zmiennych losowych (X, Y) ma łączny rozkład zadany następującą tablicą funkcji prawdopodobieństwa $p(i,j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$:

Tabela 1: Funkcja prawdopodobieństwa $p(i,j)$ łącznego rozkładu (X, Y)

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	1/8	1/8	1/8	1/8
1	1/8	0	0	0
2	1/8	0	0	0
3	1/8	0	0	1/8

1 : Czy zmienne losowe X, Y są niezależne. Uzasadnij odpowiedź.

2 : Niech $Z = \min(2, XY)$. Obliczyć $\mathbb{E}Z$.

3 : Rozkład pary zmiennych losowych (W, V) ma funkcję prawdopodobieństwa $p_{W,V}(i,j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j | X + Y \leq 2)$. Policzyć kowariancję $\text{cov}(W, V)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2022 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń metryczną (X, d) i funkcję ciągłą $f: X \to \mathbb{R}$ (przy czym $\mathbb{R}$ jest wyposażony w metrykę euklidesową).

- Podaj przykład ciągu (x_n), który nie jest zbieżny w $[0, 1]$ z metryką euklidesową. Odpowiedź uzasadnij.
- Podaj przykład przestrzeni (X, d) i ciągu (x_n) jej elementów, który nie ma podciągu zbieżnego. Odpowiedź uzasadnij.
- Pokaż, że jeżeli ciąg (x_n) w przestrzeni (X, d) jest zbieżny, to każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy.
- Rozważmy ciąg (x_n) elementów X i oznaczmy $y_n = f(x_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Czy zbieżność (x_n) pociąga za sobą zbieżność (y_n)? Czy zbieżność (y_n) implikuje zbieżność (x_n)? Odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie **2. (8 punktów)**

(a)(1pkt) Podać definicję ideału pierścienia R.
(b)(5pkt) Dla podanych ideałów I, J pierścienia $\mathbb{R}[X, Y]$ rozstrzygnąć z uzasadnieniem, czy $I \subseteq J$, $I = J$, $J \subseteq I$.

(i) $I = (X^2, Y^2, XY)$, $J = ((X - Y)^2, XY, X^2)$.

(ii) $I = (X^2 + 1, Y^2 + 1)$, $J = (X - Y, X^2 + 1)$.

(c)(2pkt) Udowodnić, że produkt dwóch ciał jest pierścieniem mającym dokładnie cztery ideały.

Uwaga. W punkcie (c) nie trzeba dowodzić, że produkt ciał jest pierścieniem; chodzi tylko o dowód, że ma on dokładnie cztery ideały.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $a, b \in D^3$ będą dwoma różnymi punktami z wnętrza 3-wymiarowej kuli D^3 (tzn. $a, b \notin \partial D^3$). Wyznacz wszystkie grupy homologii przestrzeni $D^3 \setminus \{a, b\}$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Załóżmy, że $K \subseteq K_1 \subseteq M$, $K \subseteq K_2 \subseteq M$ są wieżami ciał, gdzie rozszerzenie $K \subseteq M$ jest skończone. Czy prawdą jest, że:

$$[M : K_1 \cap K_2] \leqslant [M : K_1][M : K_2]?$$

Odpowiedź uzasadnić!

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2022 r.
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozważmy model regresji liniowej

$$Y = X\beta + \epsilon \ ,$$

gdzie X jest macierzą ortogonalną ($X'X = I$) wymiaru 50×10 a $\epsilon \sim N(0, I)$. Do estymacji wektora współczynników regresji zastosujemy metodę najmniejszych kwadratów i LASSO w formie

$$\hat{\beta}_L = argmin_\beta ||Y - X\beta||^2 + 4||\beta||_1 \ .$$

- Nośnik wektora β (wektor indykatorów zmiennych wpływających na Y) wynosi $(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$. Jakie jest p-stwo, że LASSO zwróci co najmniej jedno fałszywe odkrycie? (4pt)

Wektor estymatorów liczonych metodą najmniejszych kwadratów wynosi

$$\hat{\beta}_{OLS} = (2, 6, -3, 1, -1, 0.5, 0.5, 4, 2, -4).$$

- Podaj wektor estymatorów uzyskanych metodą LASSO. (2pt)
- Wyznacz frakcję fałszywych odkryć (FDP) i frakcję istotnych odkryć (TPP, empiryczna moc) dla metody LASSO. (2pt)

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ oraz $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)'$ będą niezależnymi wektorami losowymi o trójwymiarowych rozkładach normalnych z parametrami

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz rozkład wektorów losowych $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}$ oraz $\boldsymbol{\mu}_1 \boldsymbol{\mu}_2^T \boldsymbol{X}$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego ze średnią $\mu = 0$ i nieznaną wariancją σ^2. Rozważmy jednostajnie najmocniejszy test hipotezy

$H_0 : \sigma^2 = 2$ przeciwko alternatywie $H_1 : \sigma^2 = 4$,

na poziomie istotności α. Wyznacz moc testu.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Para zmiennych losowych (X, Y) ma łączny rozkład zadany następującą tablicą funkcji prawdopodobieństwa $p(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$:

Tabela 2: Funkcja prawdopodobieństwa $p(i, j)$ łącznego rozkładu (X, Y)

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	1/8	1/8	1/8	1/8
1	1/8	0	0	0
2	1/8	0	0	0
3	1/8	0	0	1/8

1 : Czy zmienne losowe X, Y są niezależne. Uzasadnij odpowiedź.

2 : Niech $Z = \min(2, XY)$. Obliczyć $\mathbb{E}Z$.

3 : Rozkład pary zmiennych losowych (W, V) ma funkcję prawdopodobieństwa $p_{W,V}(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j | X + Y \leq 2)$. Policzyć kowariancję $\operatorname{cov}(W, V)$.