1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$, $(\mathbf{0},\mathbf{1})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{\sqrt{n}}$, $[\mathbf{0},\mathbf{2/3})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{n}$, $[\mathbf{1/3},\mathbf{1})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(6x-3)^n}{n^2}$, $[\mathbf{1/3},\mathbf{2/3}]$

2. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^{28}+1}{x^{29}+29x+5}\,dx=\frac{\mathbf{ln7}}{\mathbf{29}}$

b) $\int\limits_0^1 \frac{x^4+1}{x^5+5x+3}\,dx=\frac{\mathbf{ln3}}{\mathbf{5}}$

c) $\int\limits_0^1 \frac{x^5+1}{x^6+6x+7}\,dx=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{6}}$

d) $\int\limits_0^1 \frac{x^6+1}{x^7+7x+2}\,dx=\frac{\mathbf{ln5}}{\mathbf{7}}$

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx=\boldsymbol{\pi}$

b) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\boldsymbol{\pi/4}$

c) $\int\limits_0^4 \sqrt{32-x^2}\,dx=\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}+\mathbf{8}$

d) $\int\limits_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx=\boldsymbol{\pi}+\mathbf{2}$

4. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^3+2x$. Podać w postaci uproszczonej wartości pochodnej funkcji f w podanych punktach.

a) $f'(33)=\mathbf{1/29}$ **b)** $f'(0)=\mathbf{1/2}$

c) $f'(3)=\mathbf{1/5}$ **d)** $f'(12)=\mathbf{1/14}$

5. Podać w możliwe prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{|x|}^{1} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=\mathbf{-y}$ $D=\mathbf{y}$

b) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\sqrt{\mathbf{y}}$

c) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=\sqrt{\mathbf{y}}$ $D=\mathbf{1}$

d) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_{A}^{B}\int\limits_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=-\sqrt{\mathbf{1-y}}$ $D=\sqrt{\mathbf{1-y}}$

6. Podać w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^2 \cdot \overline{z}^2 = 25$.

a) $z = \frac{2}{3} + ai, \quad a = \boldsymbol{\frac{\sqrt{41}}{3}}$

b) $z = \frac{3}{2} + ai, \quad a = \boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{2}}$

c) $z = 1 + ai, \quad a = \mathbf{2}$

d) $z = \frac{2}{5} + ai, \quad a = \mathbf{11/5}$

7. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą c, że wektory (a, b, c) i (b, c, a) są prostopadłe.

a) $a = 1, \ b = 5, \ c = \mathbf{-5/6}$

b) $a = 1, \ b = 4, \ c = \mathbf{-4/5}$

c) $a = 3, \ b = 5, \ c = \mathbf{-15/8}$

d) $a = 2, \ b = 5, \ c = \mathbf{-10/7}$

8. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby liczba 1 była jej wartością własną.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 16 & 32 \\ 8 & 17 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{37}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 8 & 13 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{19}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{13}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{10}$

9. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie cyklicznej rzędu 12! (dwanaście silnia). Wówczas:

a) $E(32)=\mathbf{16}$ **b)** $E(27)=\mathbf{18}$

c) $E(26)=\mathbf{0}$ **d)** $E(30)=\mathbf{8}$

10. Dla podanej liczby n podać liczbę elementów rzędu 3 w grupie permutacji S_n.

a) $n=6$, **80** **b)** $n=5$, **20**

c) $n=3$, **2** **d)** $n=4$, **8**

11. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że maksimum liczb oczek wyrzuconych w obu rzutach jest równe n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(2)=\mathbf{1/12}$ **b)** $P(6)=\mathbf{11/36}$

c) $P(5)=\mathbf{1/4}$ **d)** $P(3)=\mathbf{5/36}$

12. W urnie znajduje się n monet, z których $n-1$ jest normalnych (orzeł/reszka), a jedna ma orły po obu stonach. Wylosowano z urny monetę, a następnie wykonano nią 3 rzuty. Okazało się, że wypadły same orły. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowana moneta miała orły po obu stronach. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5)=\mathbf{2/3}$ **b)** $P(9)=\mathbf{1/2}$

c) $P(25)=\mathbf{1/4}$ **d)** $P(3)=\mathbf{4/5}$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{n}$, $[\mathbf{1/3,\ 1})$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{\sqrt{n}}$, $[\mathbf{0,\ 2/3})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$, $(\mathbf{0,\ 1})$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(6x-3)^n}{n^2}$, $[\mathbf{1/3,\ 2/3}]$

2. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^6+1}{x^7+7x+2}\,dx=\frac{\mathbf{ln5}}{\mathbf{7}}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5+1}{x^6+6x+7}\,dx=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{6}}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{28}+1}{x^{29}+29x+5}\,dx=\frac{\mathbf{ln7}}{\mathbf{29}}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^5+5x+3}\,dx=\frac{\mathbf{ln3}}{\mathbf{5}}$

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{32-x^2}\,dx=\boldsymbol{4\pi+8}$

b) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx=\boldsymbol{\pi}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\boldsymbol{\pi/4}$

d) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx=\boldsymbol{\pi+2}$

4. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^3+2x$. Podać w postaci uproszczonej wartości pochodnej funkcji f w podanych punktach.

a) $f'(33)=\mathbf{1/29}$ **b)** $f'(12)=\mathbf{1/14}$

c) $f'(3)=\mathbf{1/5}$ **d)** $f'(0)=\mathbf{1/2}$

5. Podać w możliwe prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int_{A}^{B}\int_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=-\sqrt{\mathbf{1-y}}$ $D=\sqrt{\mathbf{1-y}}$

b) $$\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy\,dx=\int_{A}^{B}\int_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\sqrt{\mathbf{y}}$

c) $$\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int_{A}^{B}\int_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=\sqrt{\mathbf{y}}$ $D=\mathbf{1}$

d) $$\int_{-1}^{1}\int_{|x|}^{1} f(x,y)\,dy\,dx=\int_{A}^{B}\int_{C}^{D} f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=-\mathbf{y}$ $D=\mathbf{y}$

6. Podać w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^2 \cdot \overline{z}^2 = 25$.

a) $z = \dfrac{3}{2} + ai, \quad a = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{11}}}{\mathbf{2}}$

b) $z = \dfrac{2}{5} + ai, \quad a = \mathbf{11/5}$

c) $z = \dfrac{2}{3} + ai, \quad a = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{41}}}{\mathbf{3}}$

d) $z = 1 + ai, \quad a = \mathbf{2}$

7. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą c, że wektory (a, b, c) i (b, c, a) są prostopadłe.

a) $a = 1, \ \ b = 5, \ \ c = \mathbf{-5/6}$

b) $a = 1, \ \ b = 4, \ \ c = \mathbf{-4/5}$

c) $a = 2, \ \ b = 5, \ \ c = \mathbf{-10/7}$

d) $a = 3, \ \ b = 5, \ \ c = \mathbf{-15/8}$

8. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby liczba 1 była jej wartością własną.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{10}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 8 & 13 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{19}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{13}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 16 & 32 \\ 8 & 17 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{37}$

9. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie cyklicznej rzędu 12! (dwanaście silnia). Wówczas:

a) $E(27) = \mathbf{18}$ **b)** $E(30) = \mathbf{8}$

c) $E(26) = \mathbf{0}$ **d)** $E(32) = \mathbf{16}$

10. Dla podanej liczby n podać liczbę elementów rzędu 3 w grupie permutacji S_n.

a) $n = 4$, **8** **b)** $n = 6$, **80**

c) $n = 5$, **20** **d)** $n = 3$, **2**

11. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że maksimum liczb oczek wyrzuconych w obu rzutach jest równe n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3) = \mathbf{5/36}$ **b)** $P(2) = \mathbf{1/12}$

c) $P(5) = \mathbf{1/4}$ **d)** $P(6) = \mathbf{11/36}$

12. W urnie znajduje się n monet, z których $n-1$ jest normalnych (orzeł/reszka), a jedna ma orły po obu stonach. Wylosowano z urny monetę, a następnie wykonano nią 3 rzuty. Okazało się, że wypadły same orły. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowana moneta miała orły po obu stronach. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5) = \mathbf{2/3}$ **b)** $P(9) = \mathbf{1/2}$

c) $P(3) = \mathbf{4/5}$ **d)** $P(25) = \mathbf{1/4}$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{n}$, $[\mathbf{1/3,\ 1})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$, $(\mathbf{0,\ 1})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(6x-3)^n}{n^2}$, $[\mathbf{1/3,\ 2/3}]$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{\sqrt{n}}$, $[\mathbf{0,\ 2/3})$

2. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^{28}+1}{x^{29}+29x+5}\,dx = \frac{\mathbf{ln7}}{\mathbf{29}}$

b) $\int\limits_0^1 \frac{x^5+1}{x^6+6x+7}\,dx = \frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{6}}$

c) $\int\limits_0^1 \frac{x^6+1}{x^7+7x+2}\,dx = \frac{\mathbf{ln5}}{\mathbf{7}}$

d) $\int\limits_0^1 \frac{x^4+1}{x^5+5x+3}\,dx = \frac{\mathbf{ln3}}{\mathbf{5}}$

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi/4}$

b) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi}$

c) $\int\limits_0^4 \sqrt{32-x^2}\,dx = \boldsymbol{4\pi+8}$

d) $\int\limits_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi+2}$

4. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^3+2x$. Podać w postaci uproszczonej wartości pochodnej funkcji f w podanych punktach.

a) $f'(33)=\mathbf{1/29}$ **b)** $f'(3)=\mathbf{1/5}$

c) $f'(12)=\mathbf{1/14}$ **d)** $f'(0)=\mathbf{1/2}$

5. Podać w możliwe prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=\sqrt{\mathbf{y}}$ $D=\mathbf{1}$

b) $$\int\limits_{-1}^1\int\limits_{|x|}^{1} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=-\mathbf{y}$ $D=\mathbf{y}$

c) $$\int\limits_{-1}^1\int\limits_{0}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=-\sqrt{\mathbf{1-y}}$ $D=\sqrt{\mathbf{1-y}}$

d) $$\int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_A^B\int\limits_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\sqrt{\mathbf{y}}$

6. Podać w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^2 \cdot \overline{z}^2 = 25$.

a) $z=\frac{3}{2}+ai, \quad a=\mathbf{\frac{\sqrt{11}}{2}}$

b) $z=\frac{2}{5}+ai, \quad a=\mathbf{11/5}$

c) $z=\frac{2}{3}+ai, \quad a=\mathbf{\frac{\sqrt{41}}{3}}$

d) $z=1+ai, \quad a=\mathbf{2}$

7. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą c, że wektory (a,b,c) i (b,c,a) są prostopadłe.

a) $a=1, \ b=4, \ c=\mathbf{-4/5}$

b) $a=2, \ b=5, \ c=\mathbf{-10/7}$

c) $a=1, \ b=5, \ c=\mathbf{-5/6}$

d) $a=3, \ b=5, \ c=\mathbf{-15/8}$

8. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby liczba 1 była jej wartością własną.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 16 & 32 \\ 8 & 17 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{37}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 8 & 13 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{19}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{13}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{10}$

9. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie cyklicznej rzędu 12! (dwanaście silnia). Wówczas:

a) $E(27) = \mathbf{18}$ **b)** $E(32) = \mathbf{16}$

c) $E(26) = \mathbf{0}$ **d)** $E(30) = \mathbf{8}$

10. Dla podanej liczby n podać liczbę elementów rzędu 3 w grupie permutacji S_n.

a) $n = 3$, **2** **b)** $n = 6$, **80**

c) $n = 5$, **20** **d)** $n = 4$, **8**

11. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że maksimum liczb oczek wyrzuconych w obu rzutach jest równe n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(2) = \mathbf{1/12}$ **b)** $P(5) = \mathbf{1/4}$

c) $P(6) = \mathbf{11/36}$ **d)** $P(3) = \mathbf{5/36}$

12. W urnie znajduje się n monet, z których $n-1$ jest normalnych (orzeł/reszka), a jedna ma orły po obu stonach. Wylosowano z urny monetę, a następnie wykonano nią 3 rzuty. Okazało się, że wypadły same orły. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowana moneta miała orły po obu stronach. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(9) = \mathbf{1/2}$ **b)** $P(25) = \mathbf{1/4}$

c) $P(3) = \mathbf{4/5}$ **d)** $P(5) = \mathbf{2/3}$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2x-1)^n, \quad \mathbf{(0, 1)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(6x-3)^n}{n^2}, \quad \mathbf{[1/3, 2/3]}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \mathbf{[0, 2/3)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}, \quad \mathbf{[1/3, 1)}$

2. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^{28}+1}{x^{29}+29x+5}\,dx = \frac{\mathbf{ln7}}{\mathbf{29}}$

b) $\int\limits_0^1 \frac{x^6+1}{x^7+7x+2}\,dx = \frac{\mathbf{ln5}}{\mathbf{7}}$

c) $\int\limits_0^1 \frac{x^4+1}{x^5+5x+3}\,dx = \frac{\mathbf{ln3}}{\mathbf{5}}$

d) $\int\limits_0^1 \frac{x^5+1}{x^6+6x+7}\,dx = \frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{6}}$

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_0^4 \sqrt{32-x^2}\,dx = \boldsymbol{4\pi+8}$

b) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi}$

c) $\int\limits_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi+2}$

d) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi/4}$

4. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^3+2x$. Podać w postaci uproszczonej wartości pochodnej funkcji f w podanych punktach.

a) $f'(33)=\mathbf{1/29}$ **b)** $f'(12)=\mathbf{1/14}$

c) $f'(0)=\mathbf{1/2}$ **d)** $f'(3)=\mathbf{1/5}$

5. Podać w możliwe prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $$\int_0^1\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=\sqrt{\mathbf{y}}$ $D=\mathbf{1}$

b) $$\int_{-1}^1\int_{|x|}^{1} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=-\mathbf{y}$ $D=\mathbf{y}$

c) $$\int_0^1\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=\mathbf{0}$ $D=\sqrt{\mathbf{y}}$

d) $$\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int_A^B\int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$$

$A=\mathbf{0}$ $B=\mathbf{1}$ $C=-\sqrt{\mathbf{1-y}}$ $D=\sqrt{\mathbf{1-y}}$

6. Podać w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^2 \cdot \overline{z}^2 = 25$.

a) $z = \frac{3}{2} + ai, \quad a = \boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{2}}$

b) $z = \frac{2}{5} + ai, \quad a = \mathbf{11/5}$

c) $z = \frac{2}{3} + ai, \quad a = \boldsymbol{\frac{\sqrt{41}}{3}}$

d) $z = 1 + ai, \quad a = \mathbf{2}$

7. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą c, że wektory (a, b, c) i (b, c, a) są prostopadłe.

a) $a = 3, \ b = 5, \ c = \mathbf{-15/8}$

b) $a = 1, \ b = 4, \ c = \mathbf{-4/5}$

c) $a = 2, \ b = 5, \ c = \mathbf{-10/7}$

d) $a = 1, \ b = 5, \ c = \mathbf{-5/6}$

8. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby liczba 1 była jej wartością własną.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 16 & 32 \\ 8 & 17 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{37}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 8 & 13 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{19}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{13}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{10}$

9. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie cyklicznej rzędu 12! (dwanaście silnia). Wówczas:

a) $E(32) = \mathbf{16}$

b) $E(26) = \mathbf{0}$

c) $E(27) = \mathbf{18}$

d) $E(30) = \mathbf{8}$

10. Dla podanej liczby n podać liczbę elementów rzędu 3 w grupie permutacji S_n.

a) $n = 4$, **8**

b) $n = 3$, **2**

c) $n = 6$, **80**

d) $n = 5$, **20**

11. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że maksimum liczb oczek wyrzuconych w obu rzutach jest równe n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(2) = \mathbf{1/12}$

b) $P(3) = \mathbf{5/36}$

c) $P(6) = \mathbf{11/36}$

d) $P(5) = \mathbf{1/4}$

12. W urnie znajduje się n monet, z których $n-1$ jest normalnych (orzeł/reszka), a jedna ma orły po obu stonach. Wylosowano z urny monetę, a następnie wykonano nią 3 rzuty. Okazało się, że wypadły same orły. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowana moneta miała orły po obu stronach. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(25) = \mathbf{1/4}$

b) $P(9) = \mathbf{1/2}$

c) $P(5) = \mathbf{2/3}$

d) $P(3) = \mathbf{4/5}$