

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
14 września 2022 r.

Zadanie 1. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > -1$ zachodzi nierówność
$$e^x \geq 1 + \ln(x + 1).$$

Zadanie 2. Wyznaczyć największą wartość funkcji
$$f(x, y) = 11x + 13y$$

na elipsie

$$\{(x, y) : x^2 + xy + y^2 = 1\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartość największa jest osiągnięta.

Zadanie 3. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x' = -x + \cos t + \sin t, \quad y' = y, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Zadanie 4. Dana jest taka macierz A rozmiaru 10×10 o wyrazach **wymiernych**, że

$$A^7 = I,$$

gdzie I oznacza macierz identycznościową rozmiaru 10×10 .

Rozstrzygnąć, czy stąd wynika, że

$$A = I.$$

Zadanie 5. Podać przykład skończonej grupy G oraz takich jej elementów a i b rzędu 2, że element ab ma rząd 37.

Oczywista oczywistość: Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie 6. Początkowo w urnie jest 60 kul białych. Wyjmujemy z urny k kul białych i wkładamy $4k$ kul czarnych. Następnie z urny zostaje losowo usuniętych 60 kul. Dla której liczby k wartość oczekiwana liczby białych kul pozostałych w urnie jest największa?