

**EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)**  
**25 lutego 2023 r.**

*Zadanie 1.* Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych  $x > y > 1$  zachodzi nierówność

$$y + 2\operatorname{arctg}x < x + 2\operatorname{arctg}y.$$

*Zadanie 2.* Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

na zbiorze

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 = x\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

*Zadanie 3.* Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x' = x^2, \quad x(0) = -1.$$

*Zadanie 4.* Dana jest taka macierz  $A$  rozmiaru  $10 \times 10$  o wyrazach rzeczywistych, że

$$A^3 = A^2.$$

Rozstrzygnąć, czy stąd wynika, że

$$A^2 = A.$$

*Zadanie 5.* Z twierdzenia Sylowa wynika następujący wniosek:

Niech  $G$  będzie grupą skończoną, której rząd jest iloczynem różnych liczb pierwszych. Wówczas dla dowolnej liczby pierwszej  $p$  będącej dzielnikiem rzędu grupy  $G$ , liczba elementów rzędu  $p$  w grupie  $G$  daje przy dzieleniu przez  $p(p-1)$  resztę  $p-1$ .

Korzystając z powyższego wniosku udowodnić, że każda grupa rzędu 33 jest cykliczna.

*Zadanie 6.* Dysponujemy dwiema zewnętrźnie nierozróżnialnymi monetami, o których wiemy, że jedna jest prawdziwa (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła równe  $1/2$ ), a druga fałszywa (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła równe  $1/4$ ). Wybraliśmy losowo jedną z tych monet, a następnie wykonaliśmy nią 4 rzuty. Okazało się, że wypadł 1 orzeł.

Obliczyć prawdopodobieństwo, że wylosowana moneta jest prawdziwa.