1. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

a) $\sup\left\{\frac{mn}{4m^2+25n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=$ ....

b) $\sup\left\{\frac{mn}{4m^2+49n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=$ ....

c) $\sup\left\{\frac{mn}{9m^2+25n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=$ ....

d) $\sup\left\{\frac{mn}{9m^2+49n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=$ ....

2. Podać wartość granicy.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1-6x}{\ln(1+6x^2)}=$ .... **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1-4x}{\ln(1+6x^2)}=$ ....

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-3x}{\ln(1+6x^2)}=$ .... **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{\ln(1+6x^2)}=$ ....

3. Podać w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0} x^4\sqrt{x^5+1}\,dx=$ .... **b)** $\int\limits_{-1}^{0} x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=$ ....

c) $\int\limits_{-1}^{0} x^8\sqrt{x^9+1}\,dx=$ .... **d)** $\int\limits_{-1}^{0} x^6\sqrt{x^7+1}\,dx=$ ....

4. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(9p-2)^n}{n^2}$, ... **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3p-2)^n$, ...

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(5p-2)^n}{\sqrt{n}}$, ... **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(7p-2)^n}{n}$, ...

5. Podać w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A, B, C, D, aby dla każdej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{|x|}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B} \int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$

$A=$ .... $B=$ .... $C=$ .... $D=$ ....

b) $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{1}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B} \int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$

$A=$ .... $B=$ .... $C=$ .... $D=$ ....

c) $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B} \int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$

$A=$ .... $B=$ .... $C=$ .... $D=$ ....

d) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{A}^{B} \int\limits_{C}^{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$

$A=$ .... $B=$ .... $C=$ .... $D=$ ....

6. Dla podanej liczby a podać taką liczbę rzeczywistą b, aby dla liczby $z_0=a+bi$ układ równań $|z-1|=|z-i|=|z-z_0|$ nie miał rozwiązań zespolonych z.

a) $a=5$, $b=$ .... **b)** $a=4$, $b=$ ....

c) $a=2$, $b=$ .... **d)** $a=3$, $b=$ ....

7. Podać takie liczby rzeczywiste a, b, aby podana macierz miała wartości własne 0 i 3.

a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ $a=$ .... $b=$ ....

b) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ $a=$ .... $b=$ ....

c) $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 5 & b \end{pmatrix}$ $a=$ .... $b=$ ....

d) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ $a=$ .... $b=$ ....

8. Dla podanych liczb a i b wskazać taką liczbę c, aby wektory $(1,2,3)$ i (a,b,c) były prostopadłe.

a) $a=3$, $b=5$, $c=$ .... **b)** $a=1$, $b=1$, $c=$ ....

c) $a=0$, $b=1$, $c=$ .... **d)** $a=1$, $b=2$, $c=$ ....

9. Dla podanej liczby r podać liczbę elementów rzędu r w grupie $\mathbb{Z}_{210}\times\mathbb{Z}_{210}$.

a) $r=7$, ... **b)** $r=3$, ...

c) $r=2$, ... **d)** $r=5$, ...

10. Dla podanych liczb a i b podać zbiór wszystkich takich liczb naturalnych $n \in [a, b]$, że istnieje ciało skończone rzędu n.

a) $a = 40$, $b = 49$, $n \in \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

b) $a = 30$, $b = 39$, $n \in \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

c) $a = 10$, $b = 19$, $n \in \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

d) $a = 20$, $b = 29$, $n \in \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Dwukrotnie losujemy z urny kulę (losowanie ze zwracaniem). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że za drugim razem wylosowano kulę z większym numerem niż za pierwszym. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(13) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **b)** $P(10) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $P(11) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **d)** $P(12) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$ i $P(A \cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego największą możliwą wartość prawdopodobieństwa $P(B \cap C)$.

a) $P(A \cap B) = 1/3$, $P(A \cap C) = 1/6$, $P(B \cap C) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $P(A \cap B) = 1/4$, $P(A \cap C) = 1/9$, $P(B \cap C) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $P(A \cap B) = 1/6$, $P(A \cap C) = 1/12$, $P(B \cap C) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $P(A \cap B) = 1/2$, $P(A \cap C) = 1/3$, $P(B \cap C) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$