EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2023 r.
Matematyka w ekonomii

Zadanie **1. (8 punktów)**
Rozważmy następujące modele regresji liniowej,

$$(1) \quad y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \epsilon_i,$$

$$(2) \quad x_i = \gamma_1 + \gamma_2 y_i + \nu_i$$

których parametry oszacowano metodą najmniejszych kwadratów. Wiemy, że współczynnik korelacji między zmiennymi y_i oraz x_i jest równy $0,75$ natomiast wariancje próbkowe są równe $\widehat{\sigma}_x^2 = \widehat{\sigma}_y^2 = 1$. Przy tych warunkach, zdecyduj które z poniższych stwierdzeń jest **fałszywe** oraz krótko uzasadnij swoją decyzję.

(i) Suma kwadratów reszt w obu modelach jest taka sama.

(ii) Estymatory $\widehat{\beta}_2$ oraz $\widehat{\gamma}_2$, wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów, spełniają następującą równość

$$\widehat{\beta}_2 = \frac{1}{\widehat{\gamma}_2}.$$

(iii) Wartości estymatorów $\widehat{\beta}_2$ i $\widehat{\gamma}_2$, są równe $0,75$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Sformułuj problem testowania dla dwóch średnich w rozkładzie normalnym przy nieznanych równych wariancjach. Podaj postać statystyki testowej. Jaki jest jej rozkład przy hipotezie zerowej? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Rozpatrzy szereg czasowy opisany równaniem

$$Y_t = (2 + B)X_t + Z_t,$$

gdzie B jest operatorem przesunięcia, natomiast $\{X_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ i $\{Z_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ są nieskorelowanymi procesami białego szumu, każdy ze średnią 0 i wariancją 3.

(i) Czy $\{Y_t\}$ jest procesem stacjonarnym w szerszym sensie?

(ii) Czy $\{Y_t\}$ jest procesem odwracalnym?

(iii) Wyznacz postać funkcji kowariancji $\gamma(t, s) = \mathrm{Cov}(Y_t, X_s),\ s, t \in \mathbb{Z}$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z $\mathbb{E}X_i = m_X$ i $\mathbb{V}arX_i = \sigma_X^2 < \infty$. Rozważyć ciąg

$$Y_1 = X_1, Y_2 = 2X_1, Y_3 = X_2, Y_4 = 2X_2, \ldots$$

Ogólnie możemy zapisać

$$Y_j = \begin{cases} X_{(j+1)/2} & \text{gdy } j \text{ jest nieparzyste,} \\ 2X_{j/2} & \text{gdy } j \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Niech $S_n = \sum_{j=1}^n Y_j$.
1. Do czego zmierza S_n/n. W jakim sensie; uzasadnić.
2. Znaleźć σ dla którego

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Wystarczy **tylko** rozważyć przypadek gdy n jest parzyste i zbiega do nieskończoności.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2023 r.
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $A \subseteq X$. Przypomnijmy definicję:

$$\text{wnętrza:} \quad \mathrm{Int}(A) = \{x \in A \colon \exists r > 0\ \forall y \in X\ d(x,y) < r \implies y \in A\}$$
$$\text{i domknięcia:} \quad \overline{A} = \{x \in A \colon \text{istnieje ciąg } (x_n) \text{ elementów } A \text{ zbieżny do } x\}.$$

a) Niech $X = \mathbb{R}^2$. Znajdź $\mathrm{Int}(A)$ i $\overline{A}$, jeżeli $A = \mathbb{Q} \times ((0,1) \setminus \mathbb{Q})$ (rozpatrujemy tu metrykę euklidesową). Uzasadnij.

b) Niech A będzie podzbiorem płaszczyzny (z metryką euklidesową). Czy muszą zachodzić inkluzje:
$$\mathrm{Int}(\overline{A}) \subseteq \overline{\mathrm{Int}(A)}?$$
$$\overline{\mathrm{Int}(A)} \subseteq \mathrm{Int}(\overline{A})?$$
Odpowiedzi uzasadnij.

c) Udowodnij, że każdy zbiór domknięty zawierający A zawiera też $\overline{A}$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Oblicz resztę z dzielenia 6^{31} przez 7. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Uzasadnij, że wielościan wypukły mający tyle samo ścian czworokątnych co pięciokątnych, i nie mający żadnych innych ścian, ma łącznie conajmniej 8 ścian. Uzasadnij też, że jeśli taki wielościan ma dokładnie 8 ścian, to każdy jego wierzchołek jest trójścienny (spotykają się w nim dokładnie 3 ściany). Podaj przykład takiego wielościanu o dokładnie 8 ścianach.

WSKAZÓWKA 1: Oznacz przez n liczbę ścian czworokątnych, wyznacz w zależności od n liczby S i K wszystkich ścian i wszystkich krawędzi takiego wielościanu; następnie korzystając z tego, że w każdym wierzchołku spotykają się przynajmniej 3 ściany, oszacuj od góry liczbę W wierzchołków takiego wielościanu; skorzystaj z tożsamości Eulera $S - K + W = 2$.

WSKAZÓWKA 2: Szukając przykładu, możesz rozważyć obcinanie fragmentów znanych brył, np. sześcianu.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Czy istnieje zbiór częściowo uporządkowany $(X, \leq)$ spełniający następujące warunki:

$$\forall x \in X \, \exists y \in X : \neg(x \leq y) \text{ oraz } \neg(y \leq x),$$
$$\forall x, y \in X \, \exists z \in X : x \leq z \text{ oraz } y \leq z?$$

Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2023 r.
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozważmy układ równań różniczkowych

$$x' = ax - bxy,$$
$$y' = cy - dxy - ey^2$$

gdzie $a/b > c/e$. Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ dla każdego rozwiązania startującego z warunku początkowego $x(t_0) > 0$, $y(t_0) > 0$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Wyjaśnij czym jest dyfuzja. Sformułuj zagadnienie matematyczne opisujące dyfuzję substancji na kwadracie (podzbiorze płaszczyzny) z warunkami brzegowymi typu "brak przepływu".

Podaj rozwiązanie tego zagadnienia.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Błądzeniem klasycznym na grafie $G(V, E)$, ze zbiorem wierzchołków V i zbiorem krawędzi E, nazywamy proces, w którym cząstka znajdująca się w jakimś wierzchołku grafu w każdym kroku przemieszcza się do jednego z sąsiadów tego wierzchołka, wybranego z jednakowym prawdopodobieństwem. Rozpatrzmy błądzenie losowe na grafie $G(V, E)$, dla którego $V = \{1, 2, 3, 4\}$ natomiast $E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$.

(i) Opisz łańcuch Markowa w czasie dyskretnym opisujący błądzenie losowe, na tak zdefiniowanym grafie.

(ii) Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia w wierzchołku 1, cząsteczki która w chwili początkowej znajdowała się w wierzchołku 1, a jej ruch jest opisany przez łańcuch Markowa z podpunktu (i), w przypadku gdy cząsteczka błądziła dostatecznie długo.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z $\mathbb{E}X_i = m_X$ i $\mathbb{V}arX_i = \sigma_X^2 < \infty$. Rozważyć ciąg

$$Y_1 = X_1, Y_2 = 2X_1, Y_3 = X_2, Y_4 = 2X_2, \ldots$$

Ogólnie możemy zapisać

$$Y_j = \begin{cases} X_{(j+1)/2} & \text{gdy } j \text{ jest nieparzyste,} \\ 2X_{j/2} & \text{gdy } j \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Niech $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$.
1. Do czego zmierza S_n/n. W jakim sensie; uzasadnić.
2. Znaleźć σ dla którego

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1).$$

Wystarczy **tylko** rozważyć przypadek gdy n jest parzyste i zbiega do nieskończoności.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2023 r.
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $A \subseteq X$. Przypomnijmy definicję:

wnętrza: $\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \colon \exists r > 0\ \forall y \in X\ d(x, y) < r \implies y \in A\}$

i domknięcia: $\overline{A} = \{x \in A \colon$ istnieje ciąg (x_n) elementów A zbieżny do $x\}$.

a) Niech $X = \mathbb{R}^2$. Znajdź $\operatorname{Int}(A)$ i $\overline{A}$, jeżeli $A = \mathbb{Q} \times ((0, 1) \setminus \mathbb{Q})$ (rozpatrujemy tu metrykę euklidesową). Uzasadnij.

b) Niech A będzie podzbiorem płaszczyzny (z metryką euklidesową). Czy muszą zachodzić inkluzje:

$$\operatorname{Int}(\overline{A}) \subseteq \overline{\operatorname{Int}(A)}?$$
$$\overline{\operatorname{Int}(A)} \subseteq \operatorname{Int}(\overline{A})?$$

Odpowiedzi uzasadnij.

c) Udowodnij, że każdy zbiór domknięty zawierający A zawiera też $\overline{A}$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

(a)(2pkt) Podać definicję warstwy podgrupy H grupy G.
(b)(6pkt) Niech A i B będą podgrupami abelowej grupy $(G, +)$. Dowieść, że następujące warunki są równoważne:

1. każda warstwa podgrupy A kroi się niepusto z każdą warstwą podgrupy B,
2. podgrupa A kroi się niepusto z każdą warstwą podgrupy B,
3. $A + B = G$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $(B(t))_{t \geq 0}$ będzie ruchem Browna.

a) Uzasadnij, że wektor losowy $(B(1), B(2))$ ma rozkład normalny.

b) Oblicz $\mathrm{cov}(B(1), B(2))$.

c) Oblicz $\mathbb{P}[B(1) > 0, B(2) > 0]$

Zadanie **4. (8 punktów)**

Rozważmy kostkę Cantora 2^ω.

a) Pokaż, że zbiór $A \subseteq 2^\omega$, który składa się ze wszystkich ciągów, które nie są od pewnego miejsca stale równe 0, jest typu G_δ.

b) Pokaż, że przestrzeń Baire'a ω^ω jest homeomorficzna ze zbiorem A z poprzedniego podpunktu.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2023 r.
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozważmy następujący ukryty model Markowa:

(Ukryte) stany: $\mathcal{S} = \{0, 1\}$. Macierz prawdopodobieśtw przejść między stanami jest nastepująca:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{array} \right].$$

Zbiór obserwacji: $\mathcal{V} = \{A, B\}$.

Prawdopodobieństwa obserwacji będąc w każdym ze stanów $s \in \mathcal{S}$:

$$P(o_t = A | q_t = 1) = 0.9 \qquad P(o_t = B | q_t = 1) = 0.1$$

$$P(o_t = A | q_t = 2) = 0.5 \qquad P(o_t = B | q_t = 2) = 0.5$$

Znamy również rozkład początkowy łańcucha:

$$P(X_1 = 0) = 1, \ P(X_1 = 1) = 0.$$

Zaobserwowaliśmy ABA, tzn., $O = o_1 o_2 o_3 = ABA$. Niech $Q^* = q_1^* q_2^* q_3^*$ oznacza najbardziej prawdopodobny ciąg ukrytych stanów, tj.

$$Q^* = \arg\max_{Q = q_1 q_2 q_3} P(Q | O, \lambda).$$

Używając algorytmu Viterbiego wylicz stan q_3^*, tj. stan w chwili $t = 3$ najbardziej prawdopodobnej ścieżki $Q^* = q_1^* q_2^* q_3^*$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Podaj definicję rozkładu Wisharta. Podaj definicję rozkładu Hotellinga. Podaj przykład statystyki testowej, która ma rozkład Hotellinga oraz uzasadnij ten fakt.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Sformułuj problem testowania dla dwóch średnich w rozkładzie normalnym przy nieznanych równych wariancjach. Podaj postać statystyki testowej. Jaki jest jej rozkład przy hipotezie zerowej? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z $\mathbb{E}X_i = m_X$ i $\mathbb{V}arX_i = \sigma_X^2 < \infty$. Rozważyć ciąg

$$Y_1 = X_1, Y_2 = 2X_1, Y_3 = X_2, Y_4 = 2X_2, \ldots$$

Ogólnie możemy zapisać

$$Y_j = \begin{cases} X_{(j+1)/2} & \text{gdy } j \text{ jest nieparzyste,} \\ 2X_{j/2} & \text{gdy } j \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Niech $S_n = \sum_{j=1}^n Y_j$.

1. Do czego zmierza S_n/n. W jakim sensie; uzasadnić.
2. Znaleźć σ dla którego

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1).$$

Wystarczy **tylko** rozważyć przypadek gdy n jest parzyste i zbiega do nieskończoności.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2023 r.
Aktuarialno-finansowa

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{B_1(t); t \geq 0\}$, $\{B_2(t); t \geq 0\}$ będą wzajemnie niezależnymi standardowymi ruchami Browna. Znaleźć taką funkcę $f : (0, \infty) \to \mathrm{R}$ oraz wszystkie $a \in \mathrm{R}$, dla których

$$W(t) = \begin{cases} f(t)B_1(3006/t) & \text{dla } t \in (0, 3006] \\ \\ B_1(1) + 2023B_2(a(t-3006)) & \text{dla } t > 3006 \end{cases}$$

jest standardowym ruchem Browna dla $t > 0$. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z $\mathbb{E}X_i = m_X$ i $\mathbb{V}arX_i = \sigma_X^2 < \infty$. Rozważyć ciąg

$$Y_1 = X_1, Y_2 = 2X_1, Y_3 = X_2, Y_4 = 2X_2, \ldots$$

Ogólnie możemy zapisać

$$Y_j = \begin{cases} X_{(j+1)/2} & \text{gdy } j \text{ jest nieparzyste,} \\ 2X_{j/2} & \text{gdy } j \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Niech $S_n = \sum_{j=1}^n Y_j$.
1. Do czego zmierza S_n/n. W jakim sensie; uzasadnić.
2. Znaleźć σ dla którego

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1).$$

Wystarczy **tylko** rozważyć przypadek gdy n jest parzyste i zbiega do nieskończoności.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Załóżmy, że w populacji prawdziwe jest prawo Gompertza, a więc

$$\mu_t = Bc^t,$$

dla $B > 0, c > 1$. Przyjmując, że przyszłe czasy trwania życia są niezależne oblicz prawdopodobieństwo (podając jako funkcję parametrów B i c), że w grupie 2 osób w wieku 30 lat co najmniej jedna osoba przeżyje następny rok.

Zadanie **4. (8 punktów)**

W świecie Blacka-Scholesa rozważ akcję o dzisiejszej cenie równej 100 oraz zależną od tej akcji pewną opcję europejską typu path-independent o dzisiejszej wartości 10. Masz następujące informacje:

- ciągła stopa wolna od ryzyka wynosi 2%,
- delta opcji jest równa -0.5,
- gamma opcji jest równa 0.

Wyznacz dzisiejszą thetę opcji.

Wskazówka: Dla dość dowolnych opcji typu path-independent zdyskretyzowana theta (pochodna wartości opcji po czasie) jest wyznaczana przy użyciu zdyskretyzowanych innych wskaźników greckich w algorytmie explicit finite difference.