

**EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)**  
**4 lipca 2023 r.**

**Zadanie 1.** Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x \in (4, 8)$  zachodzi nierówność

$$\log_2 x > 1 + \frac{x}{4}.$$

**Zadanie 2.** Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^{10}}$$

albo wykazać, że ta granica nie istnieje.

**Zadanie 3.** Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x'' - x = 2 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

**Zadanie 4.** Dana jest taka macierz  $A$  rozmiaru  $3 \times 3$  o wyrazach rzeczywistych, że

$$A^3 = I,$$

gdzie  $I$  oznacza macierz identycznościową rozmiaru  $3 \times 3$ .

Udowodnić, że liczba 1 jest wartością własną macierzy  $A$ .

**Zadanie 5.** W pierścieniu  $C[0,1]$  ciągłych funkcji rzeczywistych na przedziale  $[0,1]$  (z działaniami dodawania i mnożenia funkcji) wskazać element  $f$  różny od funkcji zerowej, który nie jest dzielnikiem zera i nie jest odwracalny w pierścieniu  $C[0,1]$ .

*Oczywista oczywistość:* Uzasadnij poprawność podanego przykładu. Za przykład bez uzasadnienia otrzymasz zero punktów.

**Zadanie 6.** W urnie znajduje się pewna liczba kul, niektóre kule są białe, a pozostałe kule są czarne. Powiemy, że urna jest *cudowna*, jeżeli przy losowaniu z urny dwóch kul (bez zwracania) prawdopodobieństwo wylosowania kul różnych kolorów (tzn. jednej białej i jednej czarnej) jest równe  $1/2$ .

Udowodnić, że liczba kul w *cudownej* urnie jest kwadratem liczby naturalnej.