

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^{11} + x^2}} dx, \dots\dots\dots$ b) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^{13} + x^3}} dx, \dots\dots\dots$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^{17} + x^5}} dx, \dots\dots\dots$ d) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^{19} + x^7}} dx, \dots\dots\dots$

2. Podać wartość całki oznaczonej, gdzie $\{.\}$ oznacza część ułamkową.

a) $\int_0^{666} \sqrt{\{x\}} dx = \dots\dots\dots$ b) $\int_0^{90} \sqrt{\{x\}} dx = \dots\dots\dots$

c) $\int_0^{30} \sqrt{\{x\}} dx = \dots\dots\dots$ d) $\int_0^6 \sqrt{\{x\}} dx = \dots\dots\dots$

3. Niech $C(a, b)$ będzie zdefiniowane wzorem $C(a, b) = \int_a^b \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$.

Podać w postaci uproszczonej:

a) $C(4, 121) = \dots\dots\dots$ b) $C(1, 49) = \dots\dots\dots$

c) $C(4, 64) = \dots\dots\dots$ d) $C(1, 81) = \dots\dots\dots$

4. Podać kres dolny zbioru.

a) $\inf \left\{ \frac{x}{y} + \frac{9y}{x} : x, y \in (0, \infty) \right\} = \dots\dots\dots$

b) $\inf \left\{ \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} : x, y \in (0, \infty) \right\} = \dots\dots\dots$

c) $\inf \left\{ \frac{x}{y} + \frac{3y}{x} : x, y \in (0, \infty) \right\} = \dots\dots\dots$

d) $\inf \left\{ \frac{x}{y} + \frac{4y}{x} : x, y \in (0, \infty) \right\} = \dots\dots\dots$

5. Niech $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{19!}$. Podać wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w zerze.

a) $f^{(19)}(0) = \dots\dots\dots$ b) $f^{(21)}(0) = \dots\dots\dots$

c) $f^{(20)}(0) = \dots\dots\dots$ d) $f^{(22)}(0) = \dots\dots\dots$

6. Podać liczbę rozwiązań danego równania w liczbach zespolonych z .

a) $\bar{z}^7 \cdot z^{19} = 7, \dots\dots\dots$ b) $\bar{z}^5 \cdot z^{17} = 5, \dots\dots\dots$

c) $\bar{z}^2 \cdot z^{11} = 2, \dots\dots\dots$ d) $\bar{z}^3 \cdot z^{13} = 3, \dots\dots\dots$

7. Dla podanych liczb a i b wskazać takie liczby c , d i e , aby wektory $(0, 1, 2, 3, 4)$, $(2, 5, 8, 11, 14)$ i (a, b, c, d, e) były liniowo zależne.

a) $a=2$, $b=11$, $c= \dots\dots\dots$, $d= \dots\dots\dots$, $e= \dots\dots\dots$

b) $a=3$, $b=13$, $c= \dots\dots\dots$, $d= \dots\dots\dots$, $e= \dots\dots\dots$

c) $a=7$, $b=19$, $c= \dots\dots\dots$, $d= \dots\dots\dots$, $e= \dots\dots\dots$

d) $a=5$, $b=17$, $c= \dots\dots\dots$, $d= \dots\dots\dots$, $e= \dots\dots\dots$

8. Podać takie liczby rzeczywiste a , b , aby macierz A spełniała równanie

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & a \\ 5 & b \end{pmatrix}$, $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$, $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$, $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$, $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

9. Podać liczbę elementów rzędu 3 w podanej grupie.

a) $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9$, b) $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9$,

c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, d) $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9$,

10. Niech $C(n)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu \mathbb{Z} zawierających liczbę n . Wówczas

a) $C(100) = \dots\dots\dots$ b) $C(72) = \dots\dots\dots$

c) $C(32) = \dots\dots\dots$ d) $C(42) = \dots\dots\dots$

11. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n . Losujemy z urny kulę, zapisujemy liczbę na niej napisaną, powiedzmy k , a następnie wrzucamy kulę z powrotem do urny. Następnie losujemy z urny k kul (losowanie bez zwracania). Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną sumy liczb napisanych na tak wylosowanych k kulach. Podać w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(6) = \dots\dots\dots$ b) $E(3) = \dots\dots\dots$

c) $E(4) = \dots\dots\dots$ d) $E(5) = \dots\dots\dots$

12. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że liczby oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach różnią się o n . Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(2) = \dots\dots\dots$ b) $P(3) = \dots\dots\dots$

c) $P(4) = \dots\dots\dots$ d) $P(1) = \dots\dots\dots$