

**EGZAMIN WSTĘPNY/LICENCJACKI (zadania otwarte)**  
**13 lutego 2024 r.**

*Zadanie 1.* Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x \in (2, 4)$  zachodzi nierówność

$$\log_2 x > \frac{x}{2}.$$

*Zadanie 2.* Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = 3x + 4y + 7z$$

na zbiorze

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2z \wedge z = x^2 + y^2\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

*Zadanie 3.* Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x' = x, \quad y' = -x, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad .$$

*Zadanie 4.* Podać przykład takiej macierzy  $A$  rozmiaru  $3 \times 3$  o wyrazach rzeczywistych, że

$$A^3 = I,$$

a ponadto macierz  $A$  nie jest diagonalizowalna. Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

*Uwaga:*  $I$  oznacza macierz identycznościową rozmiaru  $3 \times 3$ .

*Zadanie 5.* Załóżmy, że grupa  $G$  jest skończona, zaś niepusty zbiór  $X \subset G$  jest zamknięty na działanie w grupie  $G$ . Udowodnić, że  $X$  jest podgrupą grupy  $G$ . Podać przykład wskazujący, że założenie skończoności grupy  $G$  jest istotne.

*Zadanie 6.* Gracz startuje w teleturnieju, w którym ma odpowiedzieć na jedno pytanie. Gracz wie, że jego odpowiedź jest poprawna z prawdopodobieństwem 90%. Zgodnie z regułami teleturnieju, gracz może zaryzykować  $k^2$  złotych ( $k \in \mathbb{N}$ ), które straci, gdy odpowie błędnie na zadane pytanie. W wypadku udzielenia poprawnej odpowiedzi gracz otrzyma  $k$  złotych. Jaką stawkę powinien zaryzykować gracz, aby zmaksymalizować wartość oczekiwaną wygranej? Przegraną traktujemy jako wygraną o ujemnej wartości.