Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Zakres egzaminu magisterskiego

Wybrane rozdziały anazlizy i topologii 1 i 2

Pojęcia, fakty: Definicje i pojęcia: metryka, iloczyn skalarny, norma supremum, norma całkowa, zbiór otwarty, domknięty, ograniczony, zwarty, średnica zbioru, zbieżność punktowa i jednostajna ciągu funkcyjnego, zbieżność w metryce całkowej, odległość punktu od zbioru, ciągłość funkcji, aproksymacja funkcji ciągłych wielomianami, twierdzenie Stone'a-Weierstrassa, szeregi potęgowe, promień zbieżności szeregu, obszar zbieżności, twierdzenie Cauchy'ego-Riemanna, całka krzywoliniowa, funkcje holomorficzne, funkcje całkowite, wzór całkowy Cauchy'ego, residuum, osobliwość pozorna, biegun, osobliwość istotna, funkcja skończenie addytywna, miara Lebesgue'a, zbiory miary zero, całka Lebesgue'a

Przykładowe zadania:

1. Sprawdzić, czy funkcja $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ określona wzorem
$$d(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$
jest metryką.

2. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym na $\mathbb{R}_+$ następująco:
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ -n^2x + 2n & \text{dla } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & x > \frac{2}{n}. \end{cases}$$
Zbadać zbieżność punktową i jednostajną na $\mathbb{R}_+$ oraz w metryce całkowej L^1 na przedziale $[0, 2]$.

3. Wyznaczyć obszar zbieżności (promień oraz zbadać zachowanie na brzegu) szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n}.$$

4. Wykazać, że jeśli funkcja $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ jest analityczna w pewnym obszarze D oraz $u^2 = v$ w tym obszarze, to funkcja f musi być stała.

5. Przy pomocy twierdzenia Cauchy'ego obliczyć całkę:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3},$$

gdzie $\gamma(t)$ jest okręgiem o środku w punkcie 0 i promieniu $\frac{1}{2}$.

6. Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx.$$

7. Pokazać, że norma supremum w przestrzeni $C[0,1]$ (funkcje ciągłe na odcinku $[0,1]$) nie spełnia warunku równoległoboku.

8. Pokazać, że miara Lebesgue'a zbioru jednopunktowego jest równa zero.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Pojęcia, fakty: obecna wartość, zakumulowana wartość, renta beztermi- nowa i pewna, prawa umieralności, tablice trwania życia, hipoteza jednostaj- ności, ubezpieczenie na całe życie i terminowe i na całe życie, ubezpieczenie na dożycie, renta życiowa na całe życie i terminowa, jednorazowa składka netto i składka roczna, rezerwa netto.

Umiejętności: wyliczenie wartości kapitału w dowolnej chwili czasu, wy- liczenie prawdopodobieństwa zgonu na podstawie tablicy trwania życia, wy- liczenie składki netto dla prostych typów ubezpieczeń na podstawie tablicy trwania życia i przy zadanym rozkładzie długości życia, wyliczenie składek dla rent, liczenie rezerw.

Przykładowe zadania:

9. Na podstawie tablicy trwania życia TTŻ-PL97m obliczyć jednorazową składkę netto w ubezpieczeniu:
a) terminowym na 2 lata dla 30-latka,

b) czystym na dożycie na 2 lata dla 30-latka,
c) na dożycie na 2 lata dla 30-latka,
d) na całe życie dla 108-latka.

10. Korzystając z tablic trwania życia, przy rocznej stopie procentowej $i = 4\%$, obliczyć *jednorazową składkę netto czasowej renty na życie,* na 3 lata dla osoby w wieku $x = 40$, wypłacanej w wysokości $C = 1000$ na początku każdego roku życia.

11. Przepływy pieniądza pewnej inwestycji są następujące:
1 rok -2420,
2 rok 1460,
4 rok 2140.
Obliczyć wartość obecną i przyszłą po czterech latach tego przepływu pieniędzy przy nominalnej stopie procentowej $i = 20\%$ i kapitalizacji rocznej.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych i osobowych

Pojęcia, fakty: funkcja użyteczności, kontrakt stop-loss,składki netto, wariancji, odchylenia standardowego, reasekuracyjna, rozkład sumy niezależnych szkód, złożony rozkład Poissona, złożony rozkład geometryczny, prawdopodobieństwo ruiny w model Lundberga.

Umiejętności: wyliczanie składek dla zadanej funkcji użyteczności i zadanego rozkładu szkód, wyliczanie rozkładu sumy szkód, wyliczanie momentów rozkładów złożonych, wyliczanie prawdopodobieństwa ruiny w modelu Lundberga.

Przykładowe zadania:

12. Wykres funkcji użyteczności decydenta przejawiającego awersję do ryzyka przechodzi przez punkty $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(x, 2.5)$, $(9, 3)$, i $(13, 3.5)$. Jakie wartości może przyjąć parametr x?

13. Przy założeniu, że S ma złożony rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 2$, a wielkość szkód jest zadana przez rozkład o gestości $p(k) = \frac{k}{10}$, $k = 1, 2, 3, 4$ obliczyć prawdopodobieństwo sumarycznych szkód $P(S = k)$ dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

14. Ryzyko X ma rozkład z atomami $Pr(X = 0) = 0.8$,

$Pr(X = 1) = 0.1$ oraz gęstość $f_X(x) = 0.1$ dla $x \in (0,1)$. Ryzyko Y ma rozkład z atomami $Pr(Y = 0) = 0.7$, $Pr(Y = 2) = 0.1$ i gęstością $f_Y(y) = 0.1$ dla $y \in (0,2)$. Jeśli X i Y są niezależne, to ile wynosi $Pr(X + Y \in [1,2])$?

15. Ryzyko X ma rozkład

x	0	1	2	5	10	20
Pr(X=x)	0.8	0.1	0.03	0.03	0.03	0.01

Wyznaczyć d, jeśli wiadomo, że $E(I_d(X)) = 0.37$, gdzie $I_d(x) = x - d$ dla $x > d$ i zero poza tym.

Statystyka

Pojęcia, fakty: szereg rozdzielczy, histogram, estymatory, estymatory nieobciążone, metoda momentów, metoda największej wiarogodności, estymacja przedziałowa, przedziały ufności dla parametrów rozkładu normalnego, przedziały ufności dla oszacowania prawdopodobieństwa zdarzenia, hipoteza zerowa i alternatywna, hipoteza prosta i złożona, obszar krytyczny, błąd I i II rodzaju, rozmiar testu, poziom istotności, testy ilorazu wiarogodności, test dla wartości średniej w populacji o rozkładzie normalnym, test porównaia średnich, test dla wariancji, test zgodności χ^2, test niezależności χ^2, test t-Studenta, regresja liniowa i metoda najmniejszych kwadratów, współczynnik korelacji i testowanie jego istotności.

Przykładowe zadania:

16. Rzucamy monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Orzeł pojawił się po n rzutach. Znaleźć estymator największej wiarygodności dla nieznanego prawdopodobieństwa wypadnięcia orła.

17. Znaleźć przedział ufności na poziomie ufności 0.99 dla wartości oczekiwanej w rozkładzie normalnym, gdy na podstawie 25 obserwacji oszacowano wartość średnią i odchylenie standardowe.

18. W sondażu brało udział 100 ankietowanych. 48 ankietowanych, stwierdziło, że w najbliższych wyborach prezydenckich będzie głosować na kandydata "X". Zweryfikować hipotezę, że kandydat "X" będzie miał 50% poparcia przeciwko hipotezie, że będzie miał poparcie mniejsze niż 50%.

19. Ile należy wykonać pomiarów, aby oszacować z dokładnością do 0.1 i na poziomie ufności 0.95 średnią w rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym $\sigma = 2$?

20. W USA średnia liczba dni pracy opuszczonych w ciągu roku z powodu choroby wynosi 5.1. W firmie zatrudniającej 49 pracowników średnia liczba dni straconych z powodu choroby wyniosła 7 dni, a odchylenie standardowe 2.5 dnia. Właściciel firmy chce sprawdzić, czy pracownicy w jego firmie odbiegają od typowych w całym kraju.
a) Jaką powinien sformuować hipotezę zerową?
b) Obliczyć poziom krytyczny dla tej hipotezy, zakładając, że obserwacje mają rozkład normalny.
c) Jaki wniosek może wyciągnąć właściciel po przeprowadzeniu tego testu?

Wstęp do teorii podejmowania decyzji

Pojęcia, fakty: kryteria optymalności strategii, gry wieloosobowe, macierzowe gry dwuosobowe, twierdzenie minimaksowe, zagadnienie dualne, metoda simpleks.

Umiejętności: umiejętność znalezienia strategi optymalnej oraz wartości gry w grach macierzowych, umiejętność rozwiązania zagadnienia programowania liniowego oraz zagadnienia dualnego.

Przykładowe zadania:

21. Znaleźć strategie optymalne obu graczy i wartość gry w grze o macierzy wypłat
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

22. Wektor $x = (0, 5, 2, 0, 0)$ jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia programowania liniowego:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geqslant 0;$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 &\geqslant 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + 3x_5 &\geqslant 10 \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 &\geqslant 7 \end{aligned}$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 = \min .$$

a) napisać postać zagadnienia dualnego do tego zagadnienia,
b) znaleźć rozwiązanie optymalne zagadnienia dualnego.