Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Zakres egzaminu magisterskiego

Wybrane rozdziały anazlizy i topologii 1 i 2

Pojęcia, fakty: Definicje i pojęcia: metryka, iloczyn skalarny, norma supremum, norma całkowa, zbiór otwarty, domknięty, ograniczony, zwarty, średnica zbioru, zbieżność punktowa i jednostajna ciągu funkcyjnego, zbieżność w metryce całkowej, odległość punktu od zbioru, ciągłość funkcji, aproksymacja funkcji ciągłych wielomianami, twierdzenie Stone'a-Weierstrassa, szeregi potęgowe, promień zbieżności szeregu, obszar zbieżności, twierdzenie Cauchy'ego-Riemanna, całka krzywoliniowa, funkcje holomorficzne, funkcje całkowite, wzór całkowy Cauchy'ego, residuum, osobliwość pozorna, biegun, osobliwość istotna, funkcja skończenie addytywna, miara Lebesgue'a, zbiory miary zero, całka Lebesgue'a

Przykładowe zadania:

1. Sprawdzić, czy funkcja $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ określona wzorem
$$d(n, m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$
jest metryką.

2. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym na $\mathbb{R}_+$ następująco:
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ -n^2x + 2n & \text{dla } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & x > \frac{2}{n}. \end{cases}$$
Zbadać zbieżność punktową i jednostajną na $\mathbb{R}_+$ oraz w metryce całkowej L^1 na przedziale $[0, 2]$.

3. Wyznaczyć obszar zbieżności (promień oraz zbadać zachowanie na brzegu) szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n}.$$

4. Wykazać, że jeśli funkcja $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ jest analityczna w pewnym obszarze D oraz $u^2 = v$ w tym obszarze, to funkcja f musi być stała.

5. Przy pomocy twierdzenia Cauchy'ego obliczyć całkę:

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3},$$

gdzie $\gamma(t)$ jest okręgiem o środku w punkcie 0 i promieniu $\frac{1}{2}$.

6. Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx.$$

7. Pokazać, że norma supremum w przestrzeni $C[0,1]$ (funkcje ciągłe na odcinku $[0,1]$) nie spełnia warunku równoległoboku.

8. Pokazać, że miara Lebesgue'a zbioru jednopunktowego jest równa zero.

Rachunek prawdopodobieństwa

Pojęcia, fakty: podstawowe pojęcia i fakty z teorii miary *(miara Lebesgue'a, całka Lebesgue'a, lemat Fatou, twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej, twierdzenie o zbieżności monotonicznej)*, rozkład zmiennej losowej, gęstość rozkladu, nierówności związane z momentami *(nierówność Schwarza, nierówność Jensena, nierówność Czebyszewa)*, lemat Borela-Cantelliego, warunkowe prawdopodobieństwo i warunkowa wartość oczekiwana względem $\sigma-$ciała, typy zbieżności zmiennych losowych *(zbieżność prawie wszędzie, zbieżność według prawdopodobieństwa, zbieżność według momentów, zbiezność według rozkładu)*, funkcje charakterystyczne, twierdzenia graniczne *(słabe prawo wielkich liczb, mocne prawo wielkich liczb, centralne twierdzenie graniczne, twierdzenie Poissona)*.

Przykładowe zadania:

9. Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi X, Y o rozkładach wykładniczych z parametrami α i μ.

a) Znaleźć rozkład momentu przybycia pierwszego autobusu.

b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że autobus A przyjedzie pierwszy.

10. Udowodnić, że jeśli ciąg zmiennych losowych $\{\sqrt{X_n}\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w L^2, to ciąg $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w L^1.

11. Zmienna losowa X_λ ma rozkład Poissona z parametrem λ. Zbadać, dla $\lambda \to \infty$, zbieżność według rozkładu zmiennych losowych

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

12. Udowodnić, że jesli $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zmiennych losowych o wspólnie ograniczonych wariancjach $Var(X_N) \leqslant C < \infty$ $n = 1, 2, ...$ oraz współczynnikach korelacji takich, że $\rho(X_i, X_j) \to 0$, gdy $|i - j| \to \infty$ to $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia słabe prawo wielkich liczb.

Statystyka matematyczna

Pojęcia, fakty: wektory losowe *(dystrybuanty i gęstości wielowymiarowe, macierz kowariancji, korelacja, wielowymiarowy rozkład normalny)*, przestrzenie statystyczne i statystyki*(przestrzeń prób, statystyki i ich rodziny rozkładów, rozkład empiryczny i dystrybuanta empiryczna, charakterystyki próbkowe, statystyki pozycyjne, rozkłady asymptotyczne statystyk)*, dostateczność i zupełność statystyk *(kryterium faktoryzacji, wykładnicze rodziny rozkładów, statystyki zupełne, twierdzenie Basu i jego zastosowania)*, estymacja *(metody estymacji, informacja Fishera, estymatory nieobciążone z minimalną wariancją)*, testowanie hipotez statystycznych *(testy jednostajnie najmocniejsze, lemat Neymana-Pearsona, testy ilorazu wiarogodności, testy dla rozkładu normalnego, problem dwóch prób, testy zgodności, jednorodności i niezależności, zbiory ufności)*, problem dwóch prób *(test Studenta i jego odmiana dla porównań parami, testy rangowe)*, testy rangowe jednorodności, symetrii, niezależności, testy zgodności *(chi-kwadrat, Kołmogorowa-Smirnowa)*, zbiory ufności, model liniowy Gaussa-Markowa, metoda najmniejszych kwadratów, analiza wariancji *(klasyfikacja pojedyncza)*, Zagadnienie regresji i korelacji *(estymacja parametrów i testowanie hipotez, współczynniki korelacji cząstkowej i wielokrotnej)*.

Przykładowe zadania:

13. Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)'$ będzie próbą z rozkładu P ze skończoną

wariancją σ^2. Czy istnieje nieobciążony estymator z jednostajnie minimalną wariancją dla dyspersji σ, gdy P jest rozkładem:
a) zero-jedynkowym $b(1,p), \quad 0 < p < 1$;
b) wykładniczym $E(\lambda), \quad \lambda > 0$;
c) normalnym $N(0,\sigma^2), \quad \sigma > 0$.
Odpowiedź uzasadnić. W przypadku, gdy jest ona pozytywna, wyznaczyć estymator.

14. Obsługa działa artyleryjskiego ma 3 pociski. Prawdopodobieństwo trafienia celu jednym pociskiem (przy jednym wystrzale) jest nieznane i wynosi $p \in [0,1]$. Strzelanie kończy się z chwilą trafienia celu albo wyczerpania się pocisków. Wykonano takie strzelanie. Zakładając, że kolejne strzały są niezależne, na podstawie zaobserwowanej liczby oddanych strzałów wyznaczyć estymatory parametru p:
(a) nieobciążony z minimalną wariancją,
(b) największej wiarogodności,
(c) metodą momentów,
(d) bayesowski, gdy parametr p ma rozkład *a priori* jednostajny $U(0,1)$, a funkcja straty jest kwadratowa.
Zbadać nieobciążoność estymatorów i obliczyć ich ryzyka kwadratowe. Który z nich jest najlepszy?

15. Na podstawie próby $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ z rozkładu wykładniczego $Ex(\lambda), \quad \lambda > 0$, testuje się hipotezę $H : \lambda = 1$ przy hipotezie alternatywnej $K : \lambda < 1$. Rozważa się dwa testy dla weryfikacji tej hipotezy z odpowiednimi obszarami krytycznymi:

$$S_1 = \{\mathbf{x} : \sum_{i=1}^{n} x_i > c_1\} \qquad \text{i} \qquad S_2 = \{\mathbf{x} : x_{1:n} = \min_{i \geqslant 1} x_i > c_2\},$$

gdzie stałe c_1 i c_2 są tak dobrane, aby testy miały rozmiar α.
a) Jakie rozkłady mają statystyki wyznaczające obszary krytyczne S_1 i S_2, zarówno przy hipotezie H, jak i przy alternatywach K?
b) Wyznaczyć funkcje mocy obu testów w takiej postaci, aby można było je obliczać przy użyciu zwykłych tablic statystycznych.
c) Czy któryś z tych testów jest jednostajnie mocniejszy od drugiego?

16. Entomolog pobierał losową próbę z dużej populacji pewnych owadów. Notował płeć chwytanych osobników i przerwał pobieranie próby, gdy złapał M-tego ($M > 1$) osobnika męskiego. Otrzymał w ten sposób próbę owadów o liczebności X. Niech θ oznacza nieznaną frakcję osobników męskich w po-

pulacji.
a) Opisać przestrzeń prób i rodzinę rozkładów prawdopodobieństwa na niej.
b) Wyznaczyć estymator nieobciążony z jednostajnie minimalną wariancją dla parametru θ i obliczyć jego wariancję.
Czy osiąga ona dolne ograniczenie Craméra-Rao?

Procesy stochastyczne

Pojęcia, fakty: klasyfikacja procesów stochastycznych *(procesy gaussowskie, procesy stacjonarne w szerszym sensie, procesy stacjonarne i o przyrostach stacjonarnych, procesy o przyrostach niezależnych, procesy Markowa)*, łańcuchy Markowa i procesy Markowa w czasie ciągłym z przeliczalna przestrzenia stanów *(klasyfikacja stanów, rozkład stacjonarny, twierdzenia ergodyczne)*, proces urodzin i śmierci, proces Poissona, złożony proces Poissona, proces odnowy, proces Wienera *(podstawowe własnosci trajektorii, mocna własność Markowa, zasada odbicia)*.

Przykładowe zadania:

17. Niech $S = \{1, \ldots, m\}$, a P będzie macierzą podwójnie stochastyczną tj. macierzą stochastyczną taką, że dla wszystkich $j = 1, \ldots, m$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

Udowodnić, że rozkład $\pi_i \equiv \frac{1}{m}$, $\;i = 1, \ldots, m$, jest rozkładem stacjonarnym dla łańcucha Markowa z macierzą przejść P.

18. Niech $\{N(t), t \geqslant 0\}$ będzie procesem Poissona z parametrem λ. Obliczyć $P(N(s) = k | N(t) = n)$ dla $s < t$.

19. Niech $\{W_t, t \geqslant 0\}$ będzie procesem ruchu Browna. Wykazać, że proces $\{X_t, t \geqslant 0\}$ zdefiniowany, dla ustalonego $T > 0$, jako $X_t = W_{T+t} - W_T$, jest również procesem ruchu Browna.

20. Niech $\{N(t), t \geqslant 0\}$ będzie procesem odnowy generowanym przez ciąg niezależnych, jednakoworozłożonych zmiennych losowych $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Niech $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych, jednakoworozłożonych zmiennych losowych takim, że pary (X_n, R_n), $n \geqslant 1$ są niezależne i jednakowo rozłożone. Niech $\{R(t), t \geqslant 0\}$ będzie procesem zdefiniowanym jako

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_n.$$

Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 istnieje granica $\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t}$ oraz podać jej postać.