



Uniwersytet
Wrocławski

GEOMETRIA W ARCHITEKTURZE

ANGELIKA BERNAGIEWICZ

PAULINA GÓRSKA

INSTYTUT MATEMATYCZNY

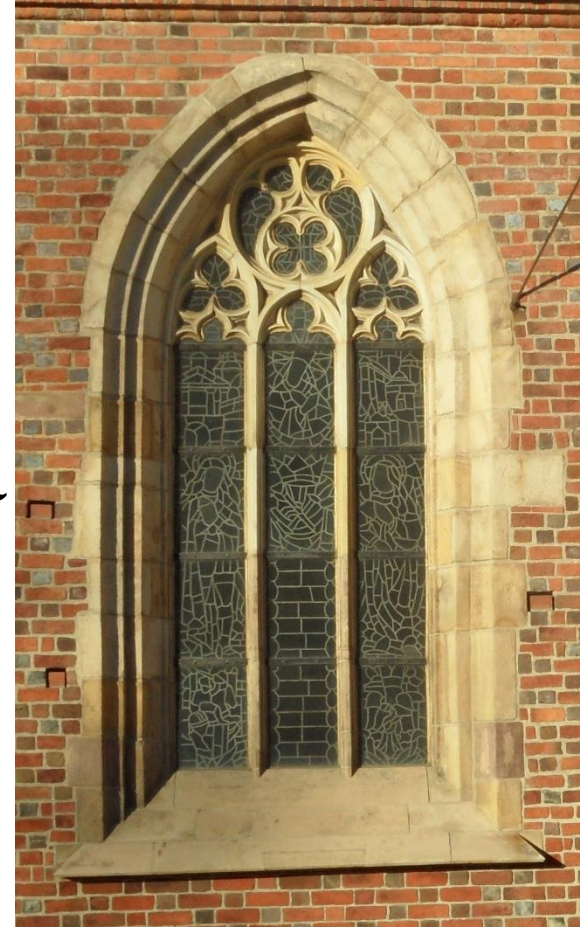
III ROK, SPECJALNOŚĆ NAUCZYCIELSKA

PLAN PREZENTACJI

1. Charakterystyka, elementy i przykłady maswerków
2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści
3. Uogólnienie konstrukcji wieloliścia
4. Konstruowalność wielokątów foremnych
5. Konstrukcje wybranych wielokątów foremnych, twierdzenie i wnioski
6. Wieloliście w architekturze
7. Przykłady i konstrukcje rybiego pęccherza
8. Uogólnienie konstrukcji rybiego pęccherza
9. Bibliografia

MASWERK

- motyw dekoracyjny charakterystyczny dla stylu gotyckiego
- wykonywany w kamieniu albo cegle
- wypełnienie okien i przezroczy



ELEMENTY MASWERKA

- ostrołuki
- wieloliście
- rybnie pęcherze



Kościół pw. św. Macieja we Wrocławiu

1. Charakterystyka, elementy i przykłady maswerków



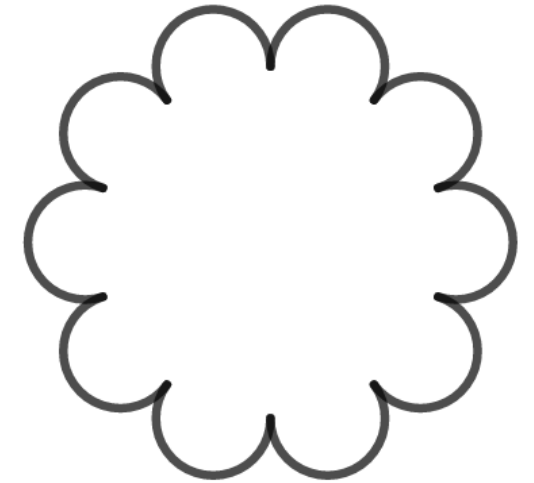
wikipedia.com
Kościół pw. św. Jakuba St. Apostoła w Nysie



Katedra pw. św. Jana Chrzciciela we Wrocławiu

WIELOLIŚĆ

- charakterystyczny element wykończenia maswerku lub rozety
- zbudowany z okręgów o środkach w wierzchołkach wielokątów foremnych

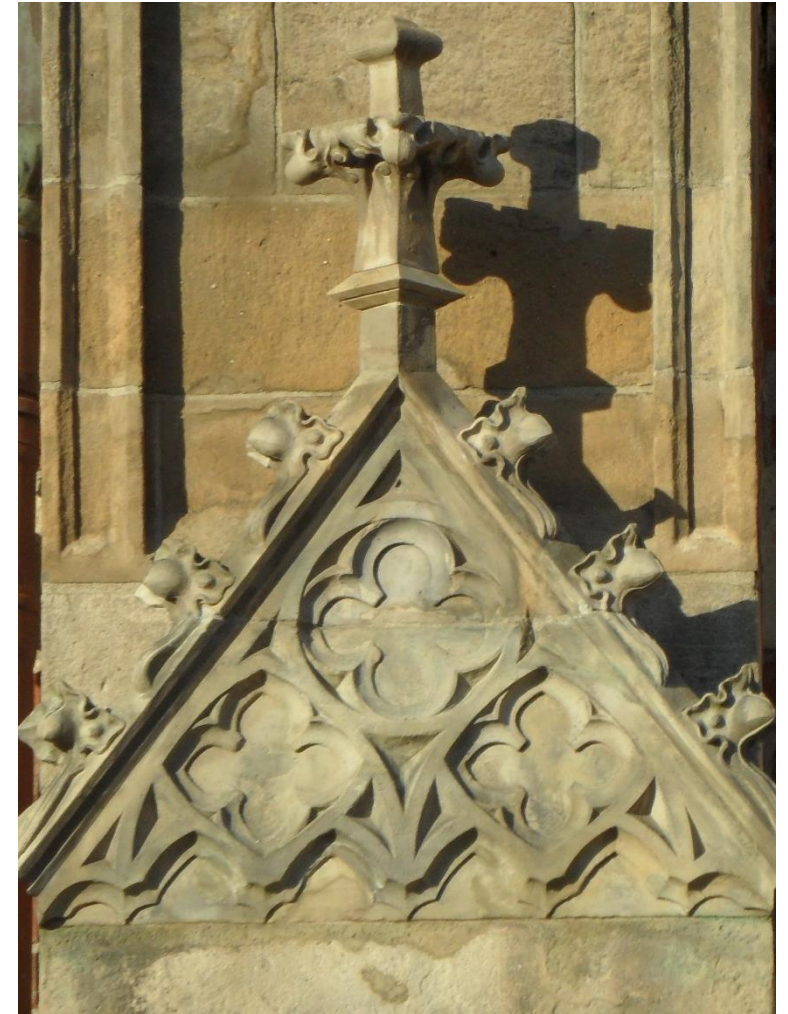


2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści



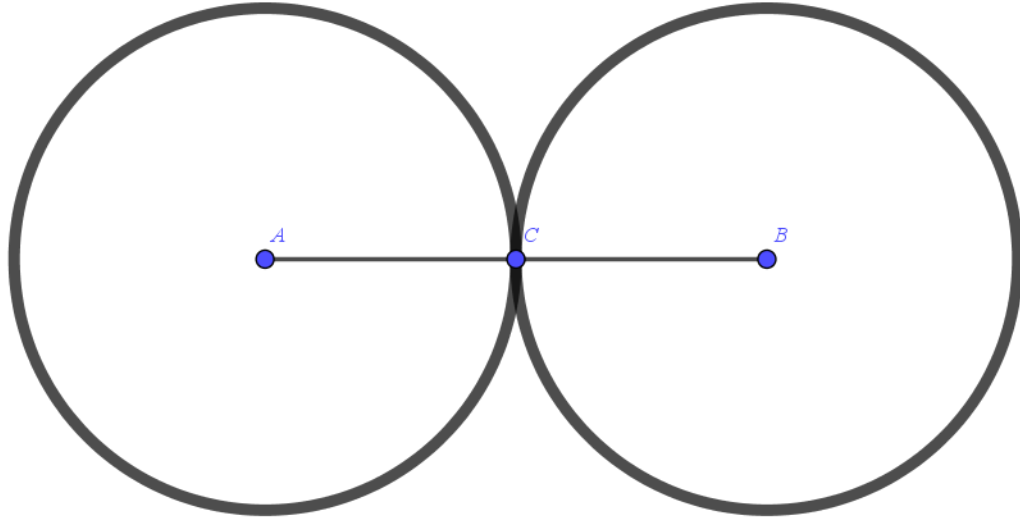
Jerzy S. Majewski

Kościół pw. św. św. Janów w Toruniu

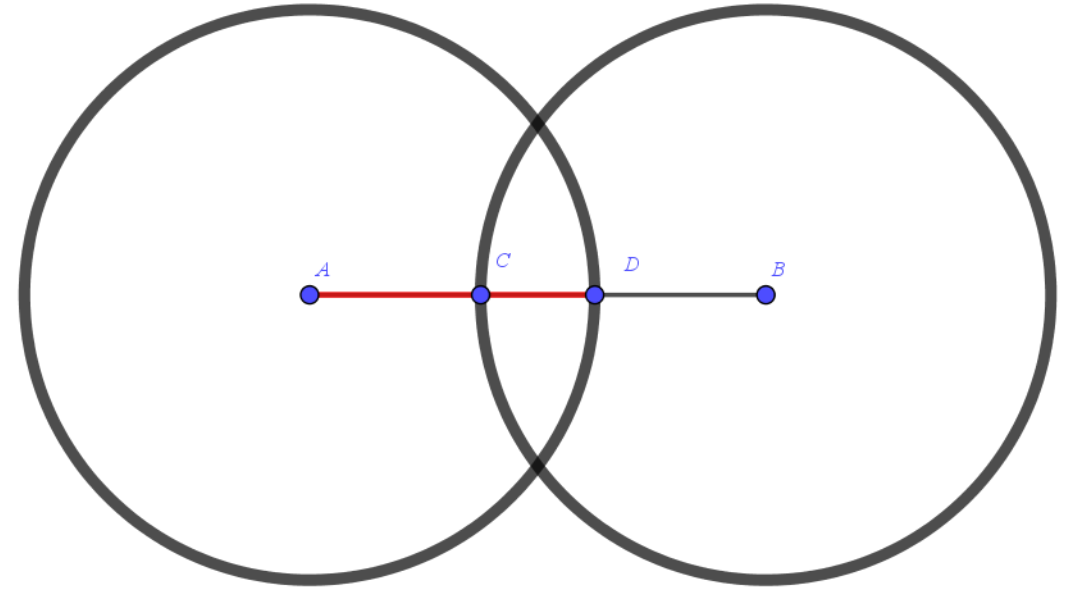


Katedra pw. św. Jana Chrzciciela we Wrocławiu

2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści

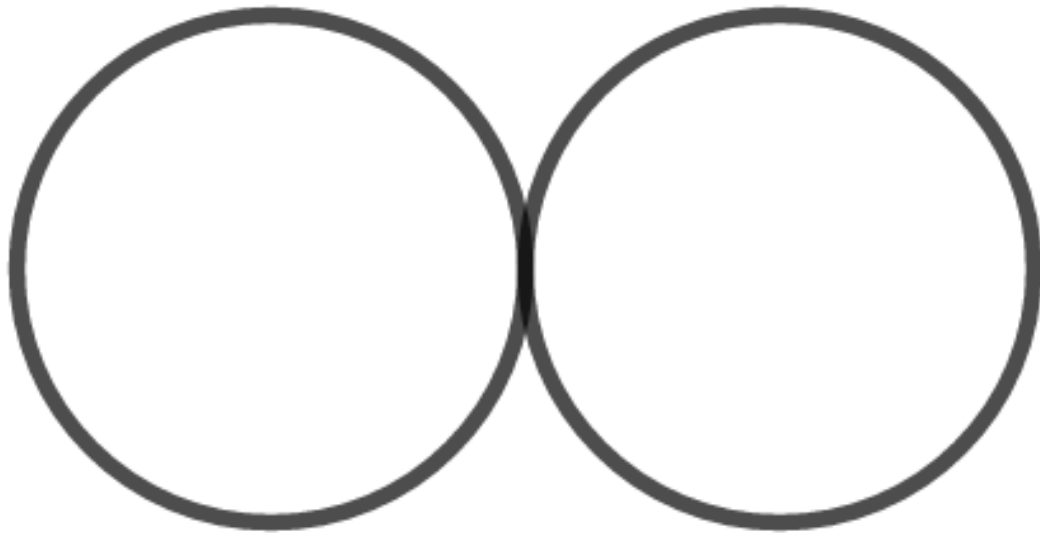


konstrukcja dwuliścia klasycznego

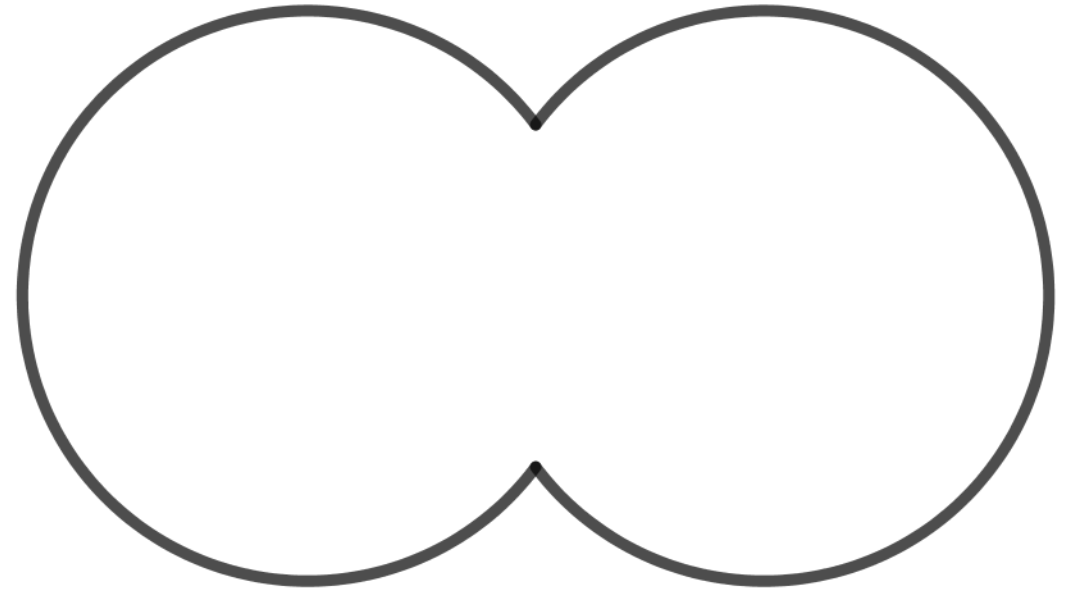


konstrukcja dwuliścia zwężonego

2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści

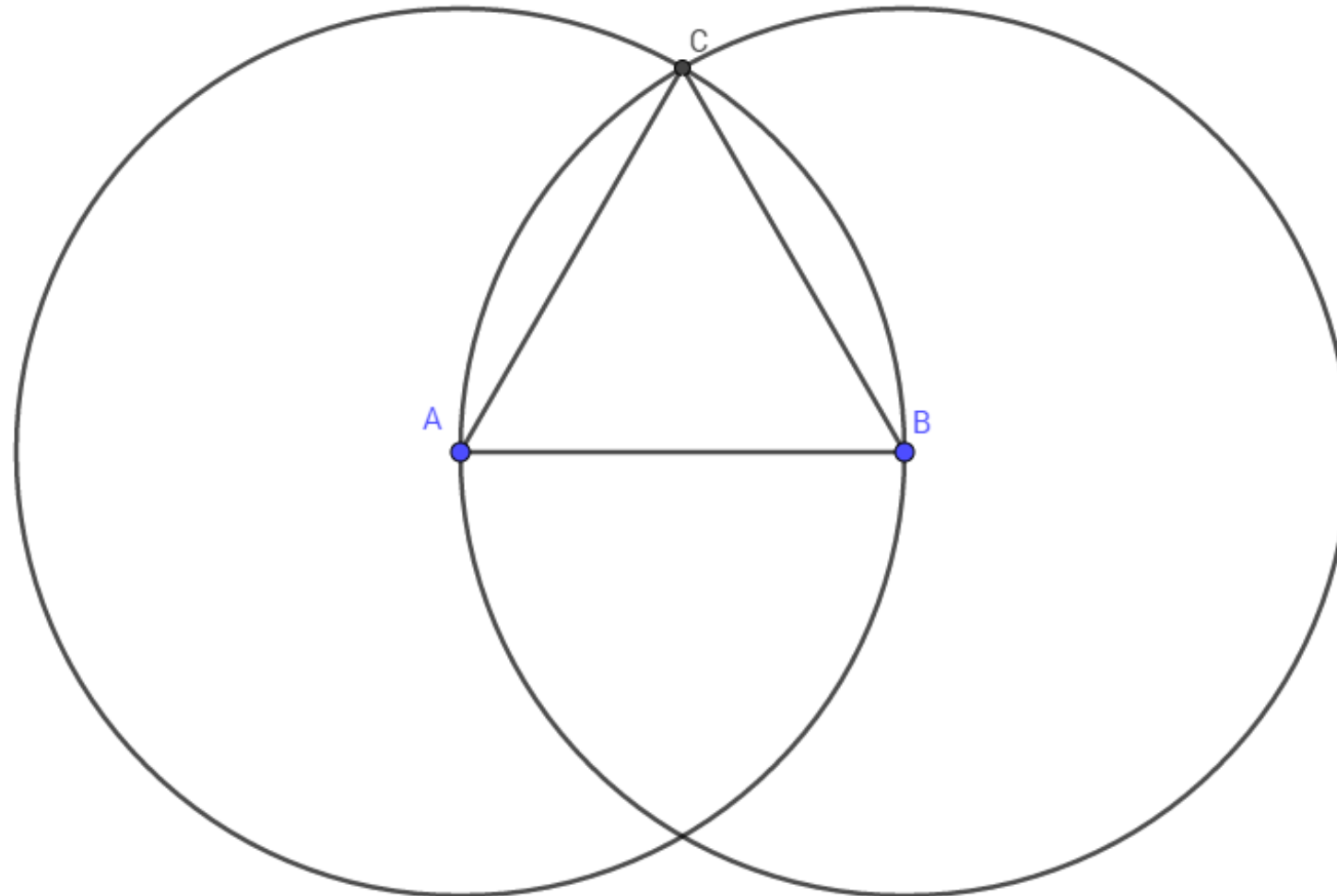


konstrukcja dwuliścia klasycznego

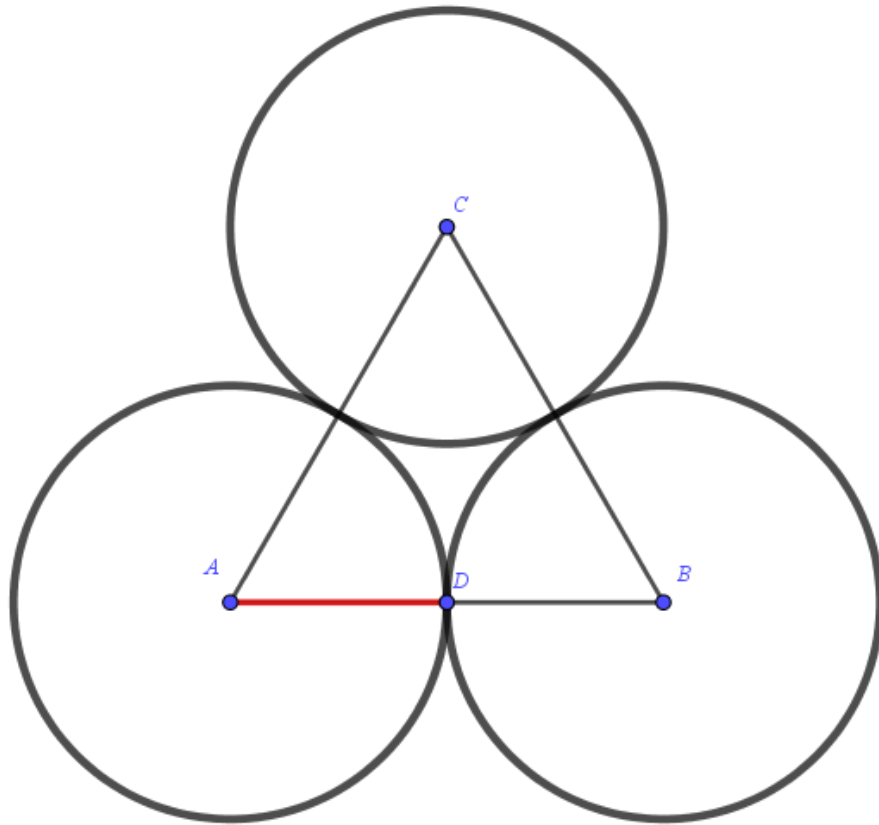


konstrukcja dwuliścia zwężonego

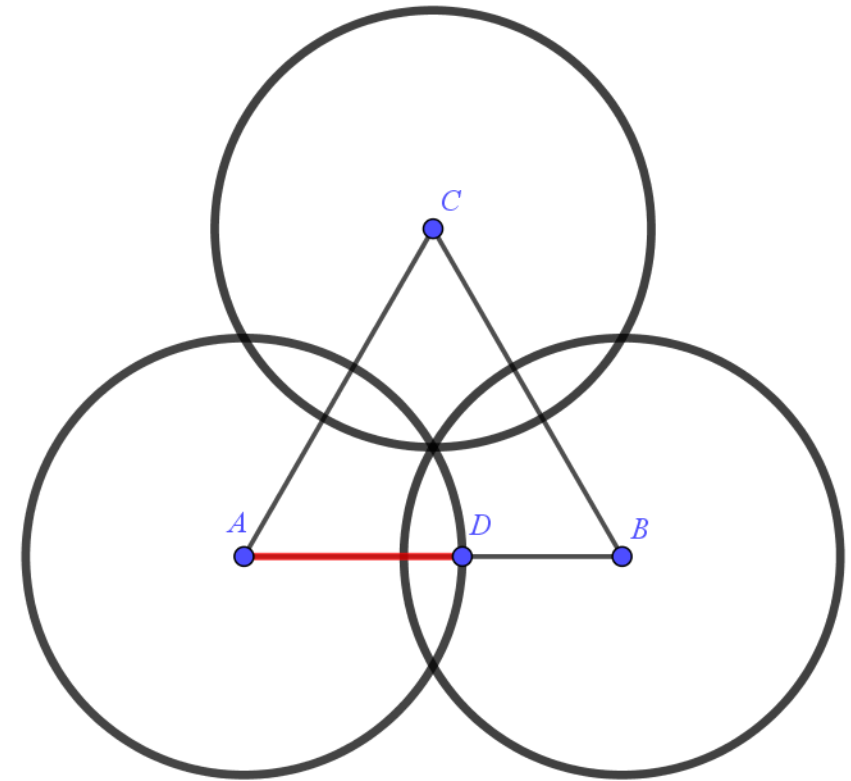
KONSTRUKCJA TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO



2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści

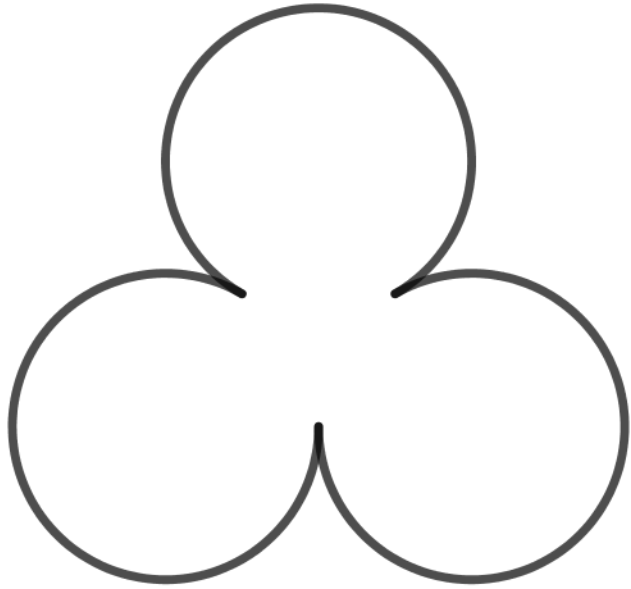


konstrukcja trójliścia klasycznego



konstrukcja trójliścia zwężonego

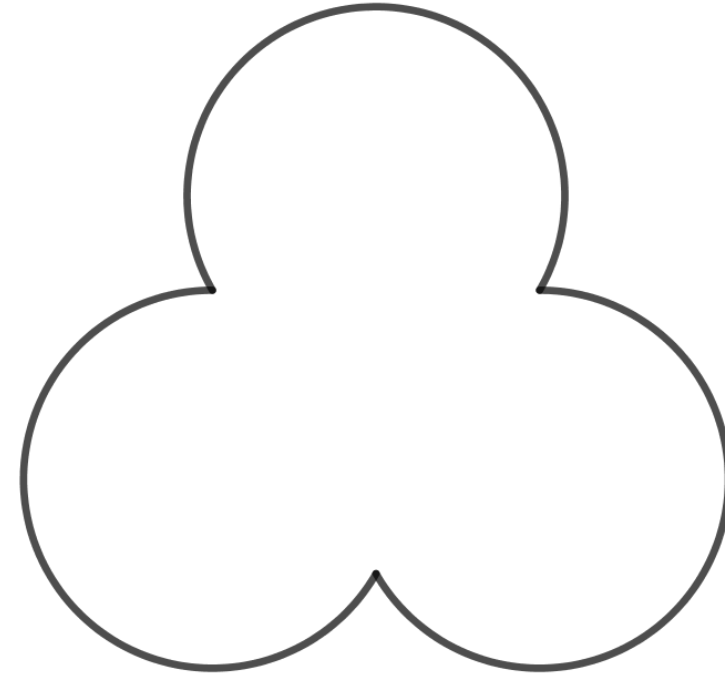
2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści



trójliść klasyczny

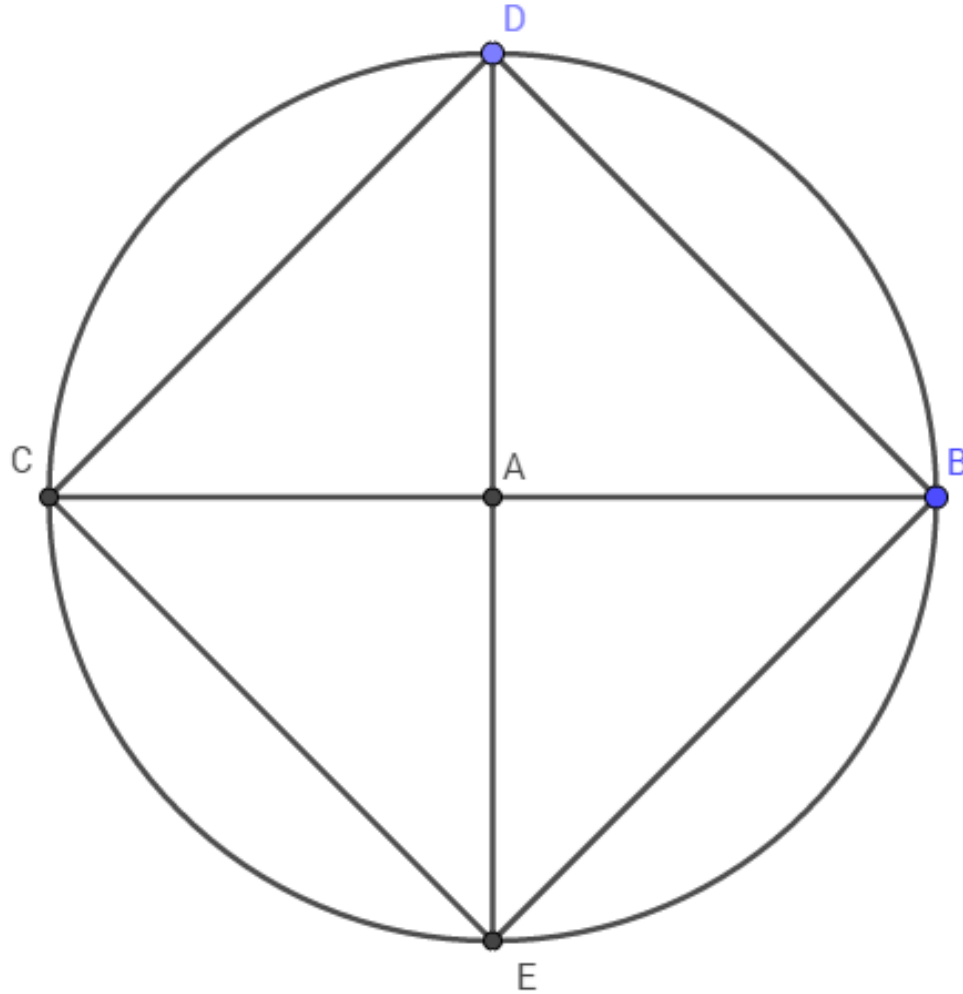


Katedra pw. św. Jana Chrzciciela we Wrocławiu

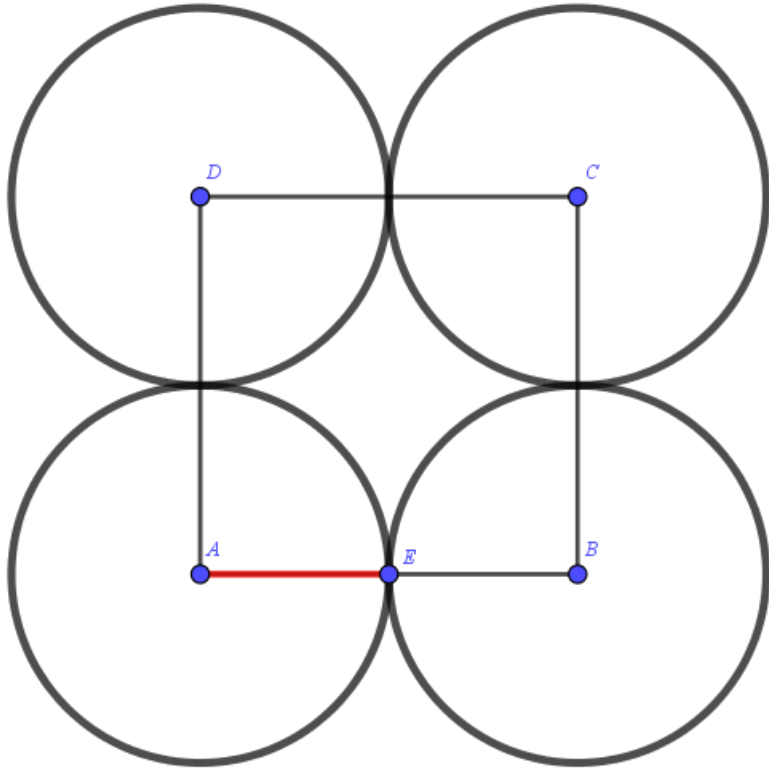


trójliść zwężony

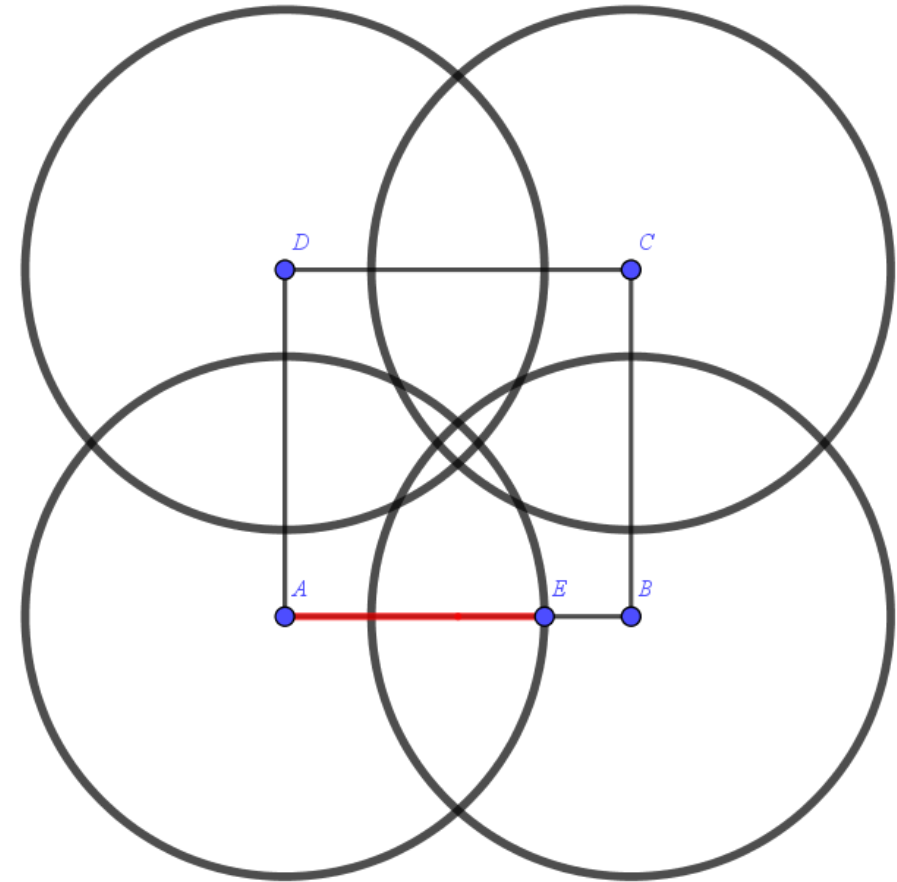
KONSTRUKCJA KWADRATU



2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści



konstrukcja czteroliścia klasycznego



konstrukcja czteroliścia zwężonego

2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści

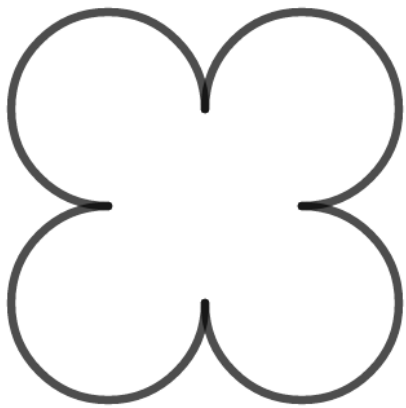


Katedra pw. św. Jana Chrzciciela we Wrocławiu

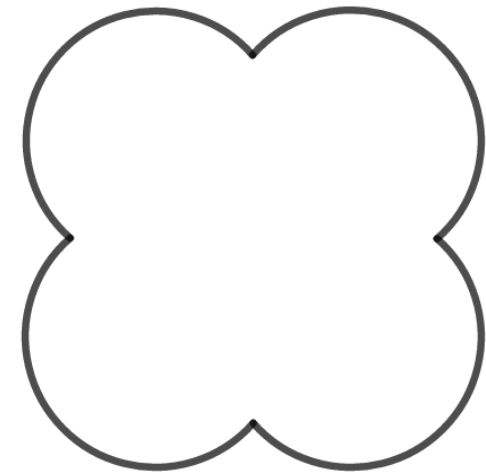


Sławomir Pawlak

Kościół pw. św. Jakuba w Toruniu

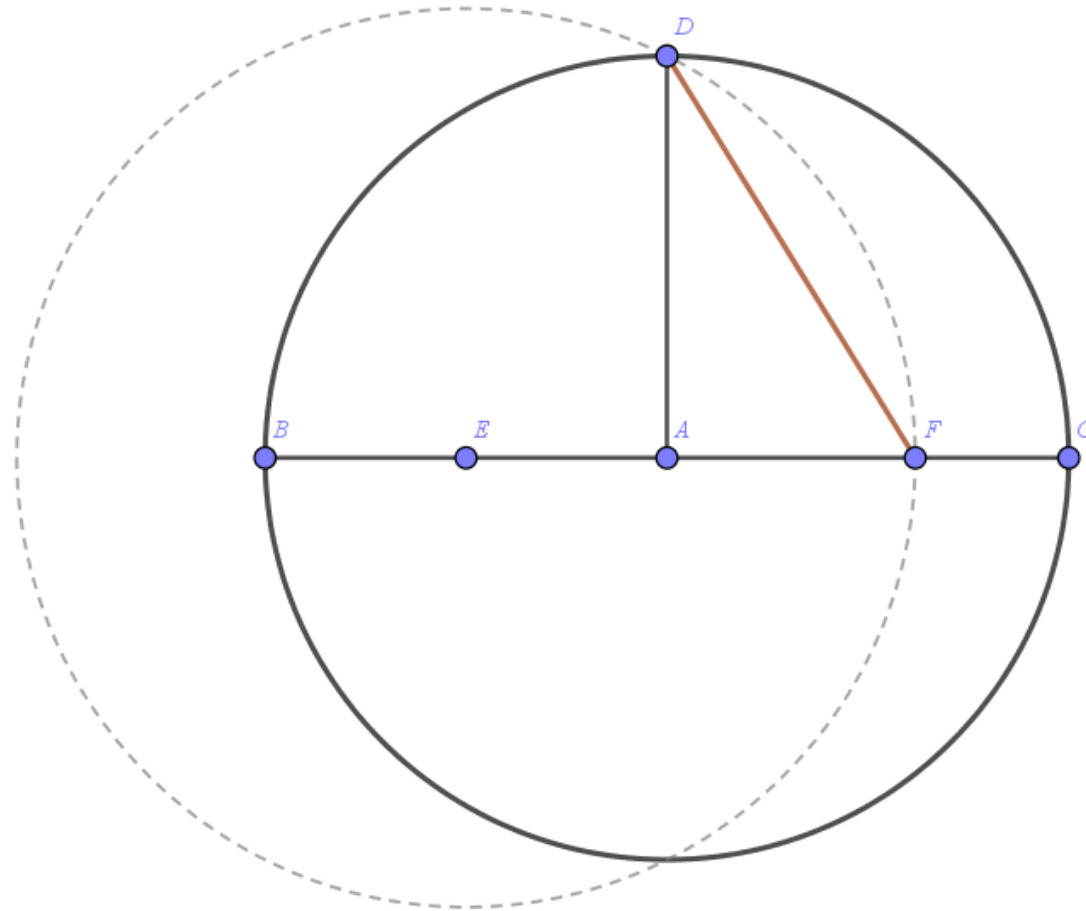


czteroliść klasyczny



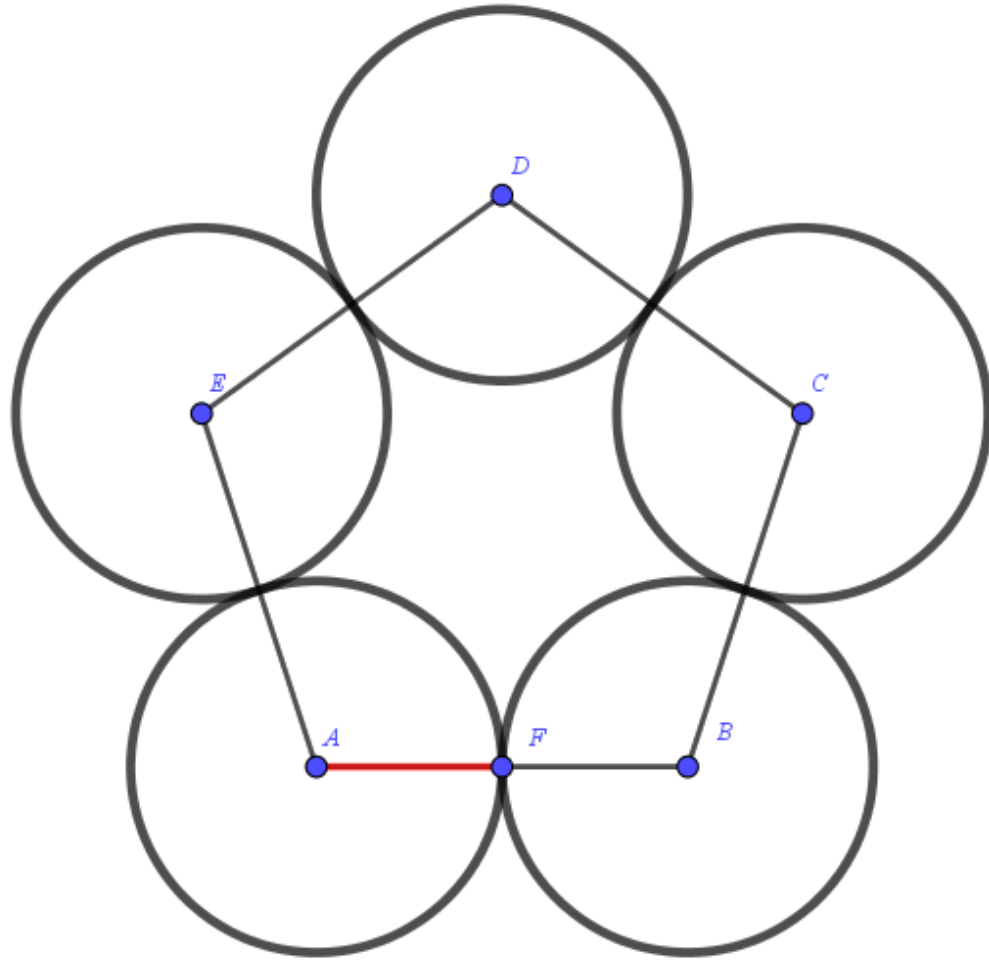
czteroliść zwężony

2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści

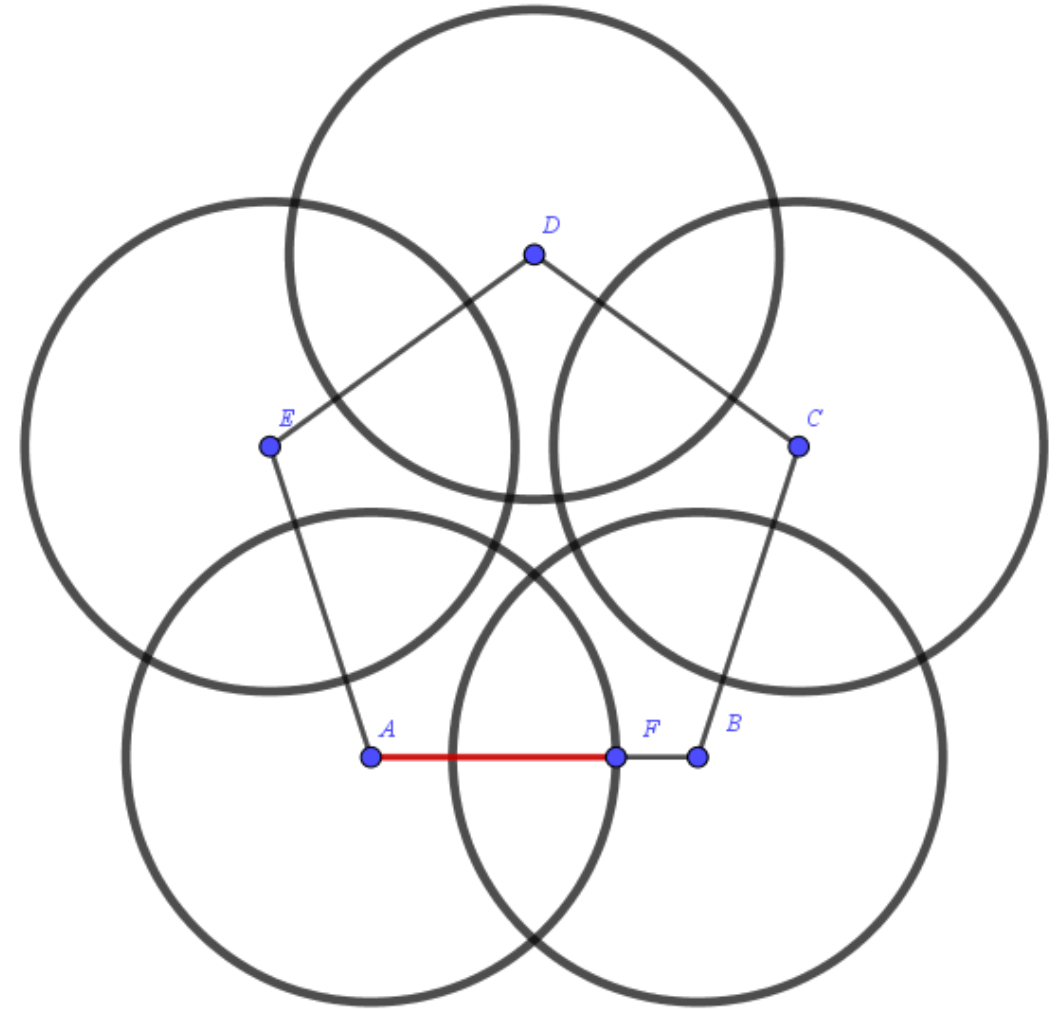


konstrukcja pięciokąta foremnego

2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści

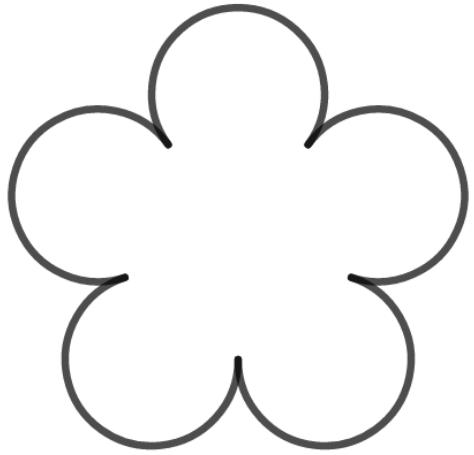


konstrukcja pięcioliścia klasycznego

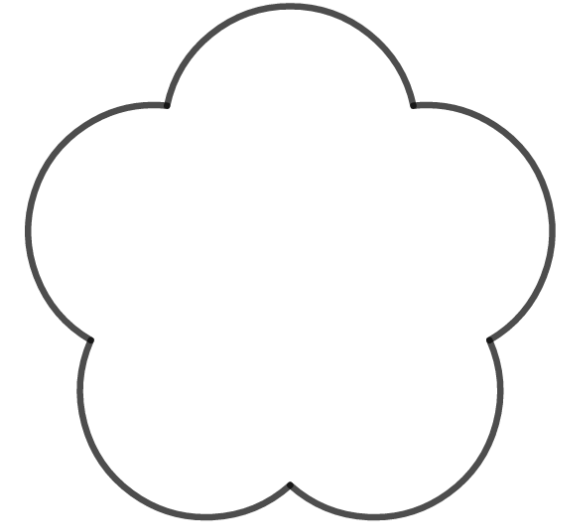


konstrukcja pięcioliścia zwężonego

2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści



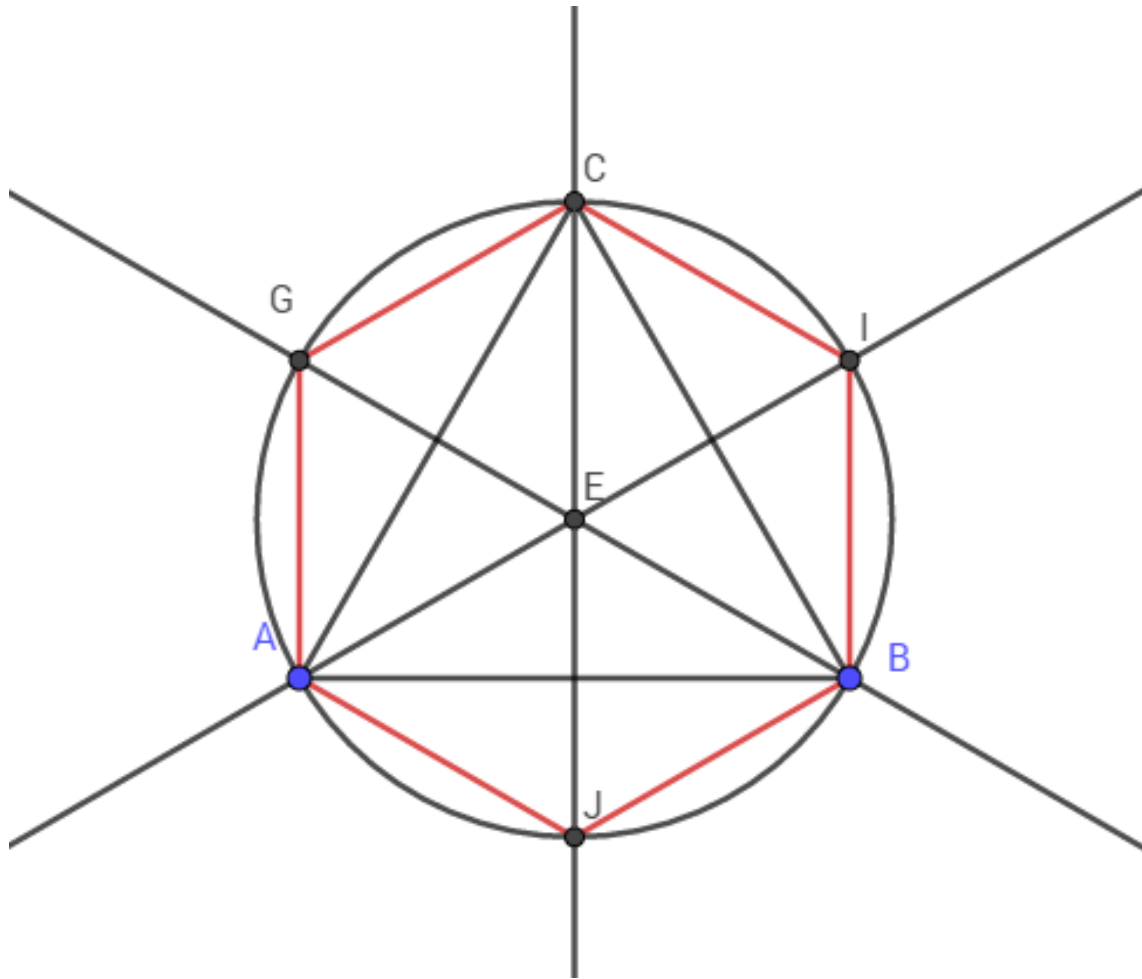
pięcioliść klasyczny



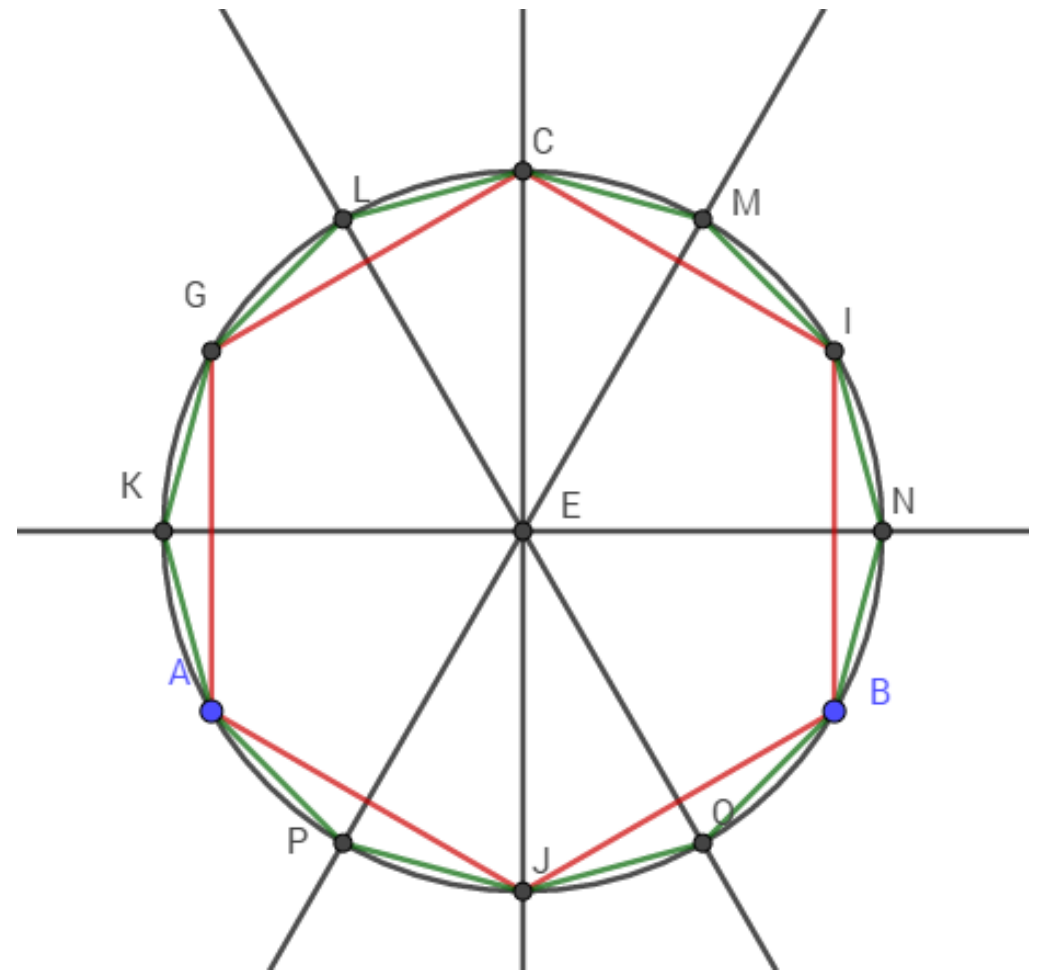
pięcioliść zwięzony

Kościół grekokatolicki pw. Podwyższenia Krzyża Pańskiego we Wrocławiu

2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści

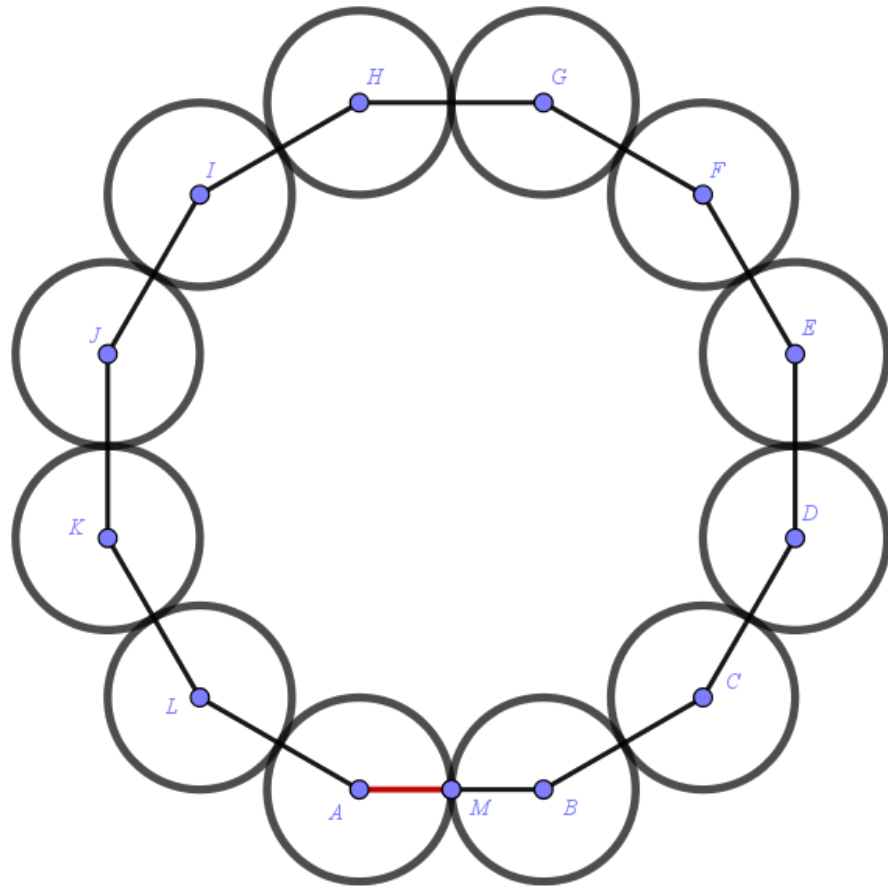


Konstrukcja sześciokąta foremnego

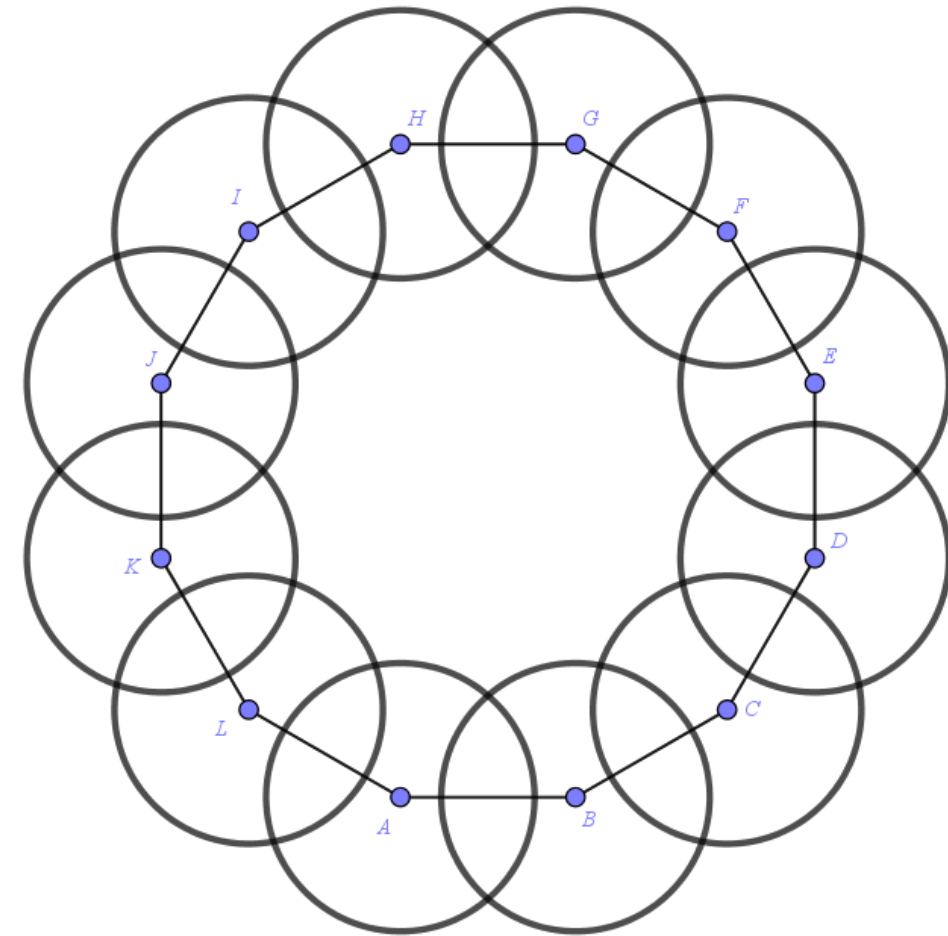


Konstrukcja dwunastokąta foremnego

2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści

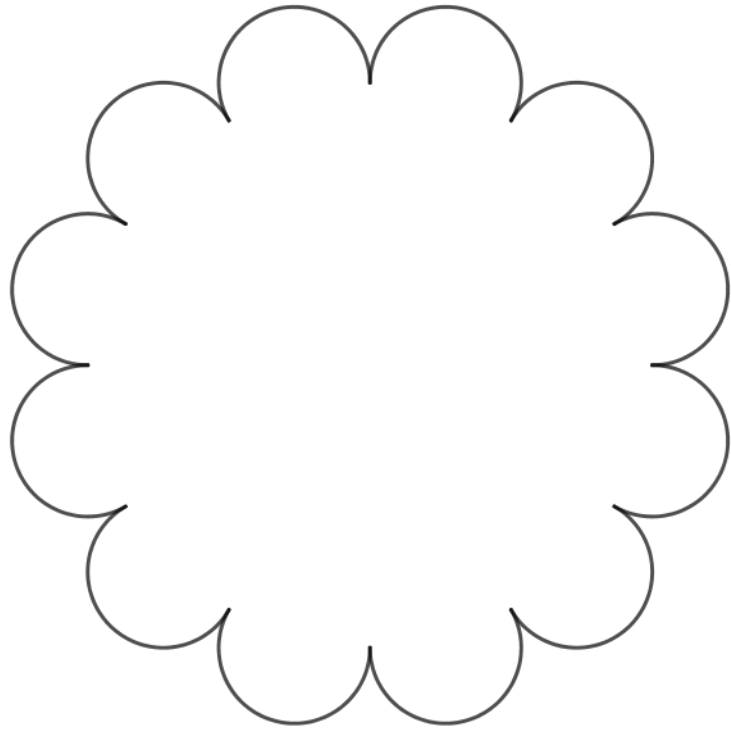


konstrukcja dwunastocięcia klasycznego



konstrukcja dwunastocięcia zwężonego

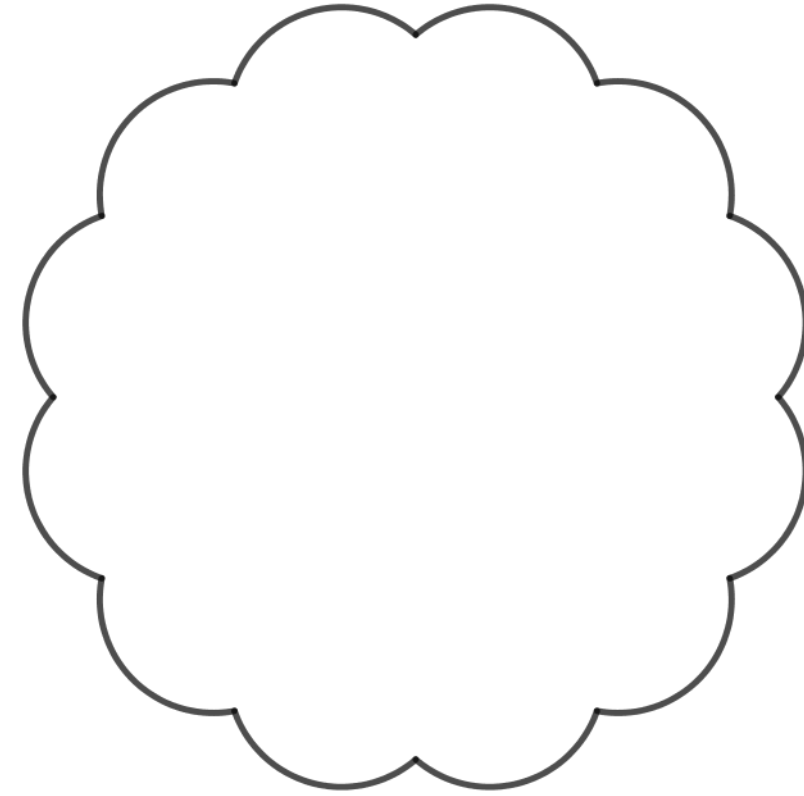
2. Przykłady i konstrukcje wybranych wieloliści



dwunastoliść klasyczny



Katedra Notre-Dame w Paryżu



dwunastoliść zwężony

KONSTRUKCJA n -LIŚCIA KLASYCZNEGO

- Skonstruować n -kąąt foremny.
- Wyznaczyć środek wybranego boku.
- Wykreślić okręgi o środkach w wierzchołkach n -kąąta cyrklem o rozwarości **równej połowie** długości boku.
- Zaznaczyć części łuków znajdujące się **na zewnątrz wielokąta**.

KONSTRUKCJA n -LIŚCIA ZWĘŻONEGO

- Skonstruować n -kąąt foremny.
- Wyznaczyć środek wybranego boku.
- Wykreślić okręgi o środkach w wierzchołkach n -kąąta cyrklem o rozwarości **większej niż połowa** długości boku.
- Zaznaczyć części łuków znajdujące się **na zewnątrz wielokąta, między punktami przecięć okręgów.**

CZY DOWOLNY n -LIŚĆ JEST KONSTRUOWALNY?

CZY WSZYSTKIE WIELOKĄTY FOREMNE SĄ KONSTRUOWALNE?

TWIERDZENIE GAUSSA-WANTZELA

Konstruowalne są te i tylko te wielokąty foremne o liczbie kątów n , którą da się zapisać jako iloczyn $2^k \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_i$ (k - dowolna liczba naturalna, f_j - liczba pierwsza Fermata).

Do tej pory znaleziono pięć liczb pierwszych Fermata:

- $f_0 = 3$
- $f_1 = 5$
- $f_2 = 17$
- $f_3 = 257$
- $f_4 = 65537$

LICZBY FERMATA

Liczby Fermata są postaci $2^{2^k} + 1$, gdzie k to dowolna liczba nieujemna całkowita.

$$F_0 = 2^1 + 1 = 3$$

$$F_1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$F_2 = 2^4 + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^8 + 1 = 257$$

$$F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$$

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

$$F_6 = 2^{64} + 1 = 18446744073709551617 = 274177 \cdot 67280421310721$$

$$F_7 = 2^{128} + 1 = 340282366920938463463374607431768211457 = 59649589127497217 \cdot 5704689200685129054721$$

WIELOKĄTY FOREMNE O LICZBIE KĄTÓW MNIejszej niż 50, KTÓRE SĄ KONSTRUOWALNE

$$3 = 2^0 \cdot 3$$

$$4 = 2^2$$

$$5 = 2^0 \cdot 5$$

$$6 = 2^1 \cdot 3$$

$$8 = 2^3$$

$$10 = 2^1 \cdot 5$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$15 = 2^0 \cdot 3 \cdot 5$$

$$16 = 2^4$$

$$17 = 2^0 \cdot 17$$

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$30 = 2^1 \cdot 3 \cdot 5$$

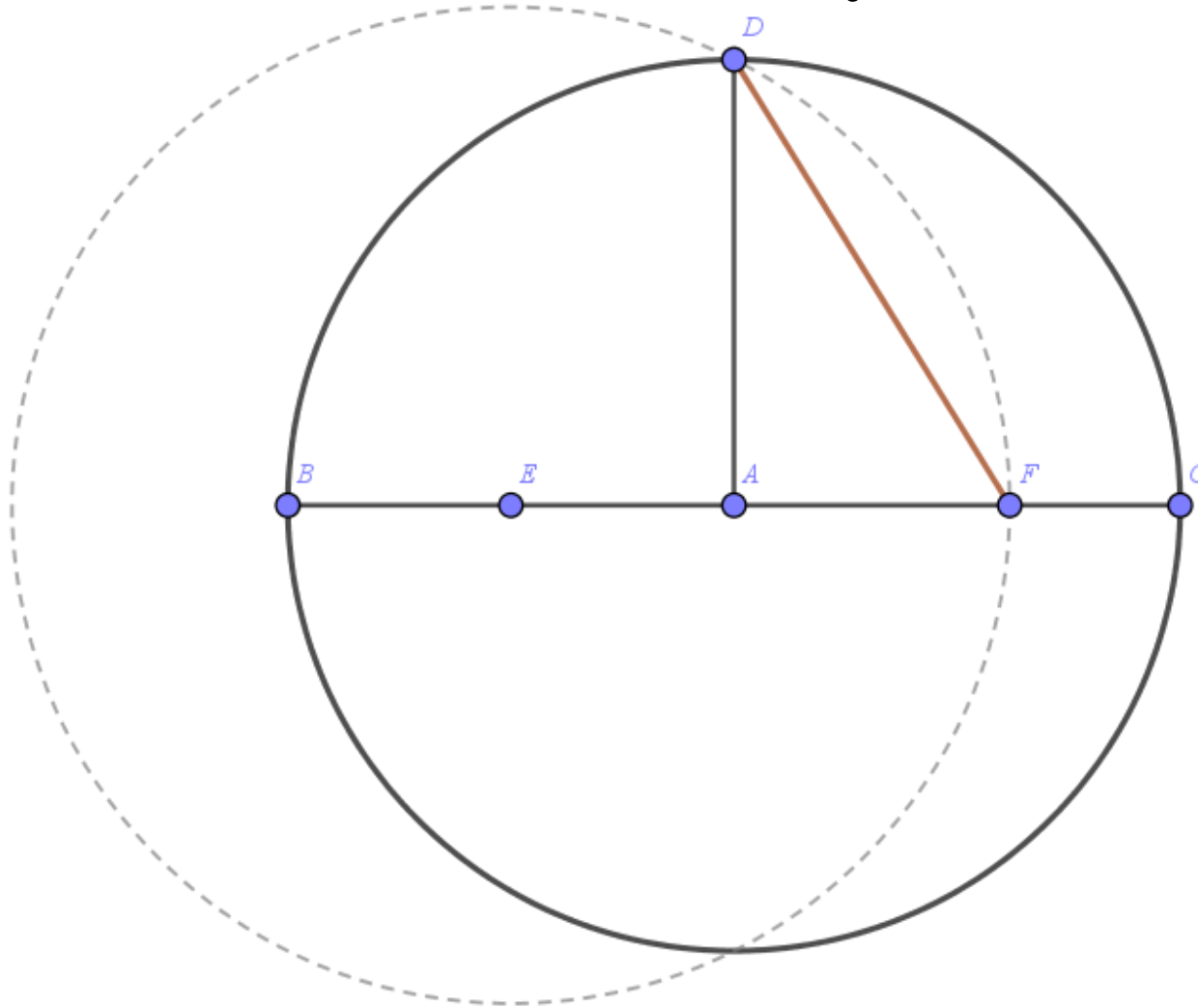
$$32 = 2^5$$

$$34 = 2^1 \cdot 17$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

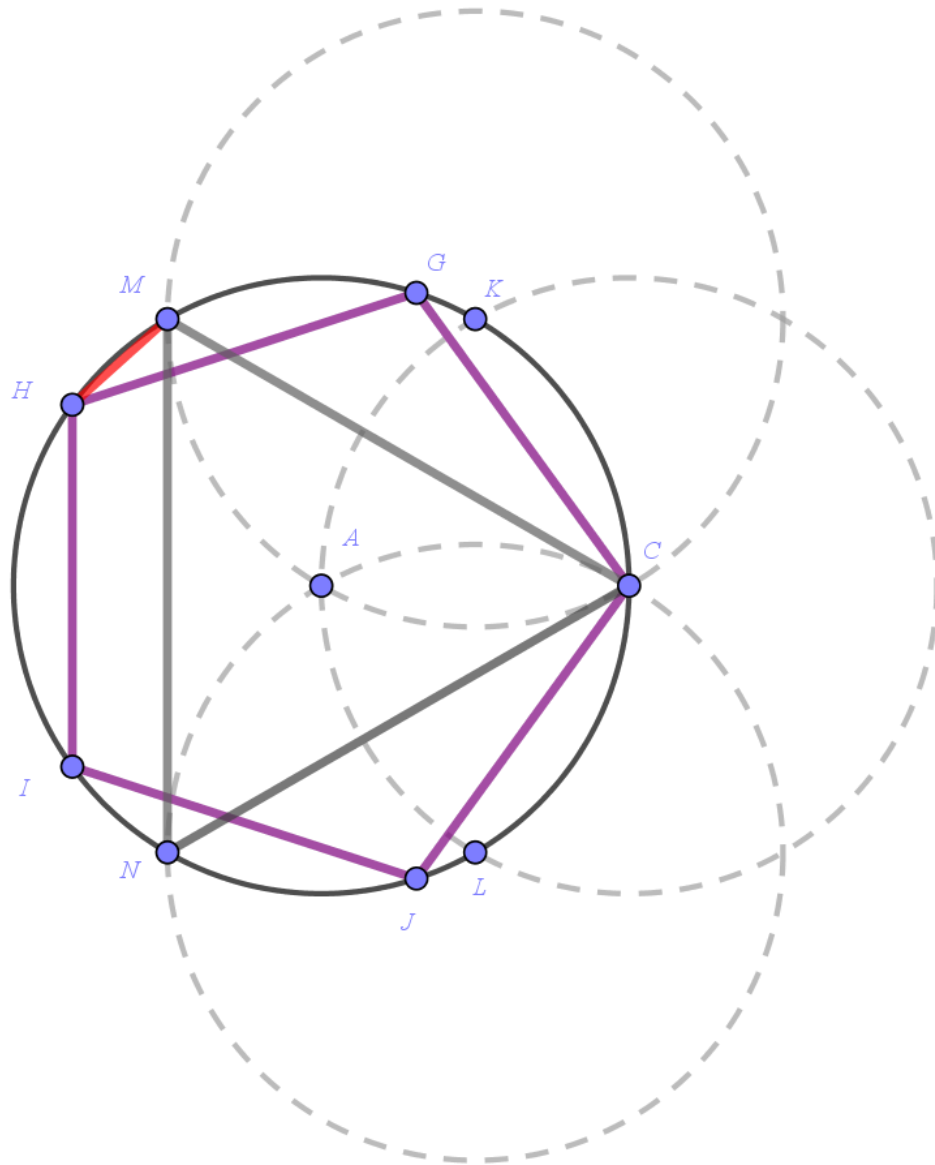
$$48 = 2^4 \cdot 3$$

KONSTRUKCJA PIĘCIOKĄTA FORMNEGO WPISANEGO W OKRĄG



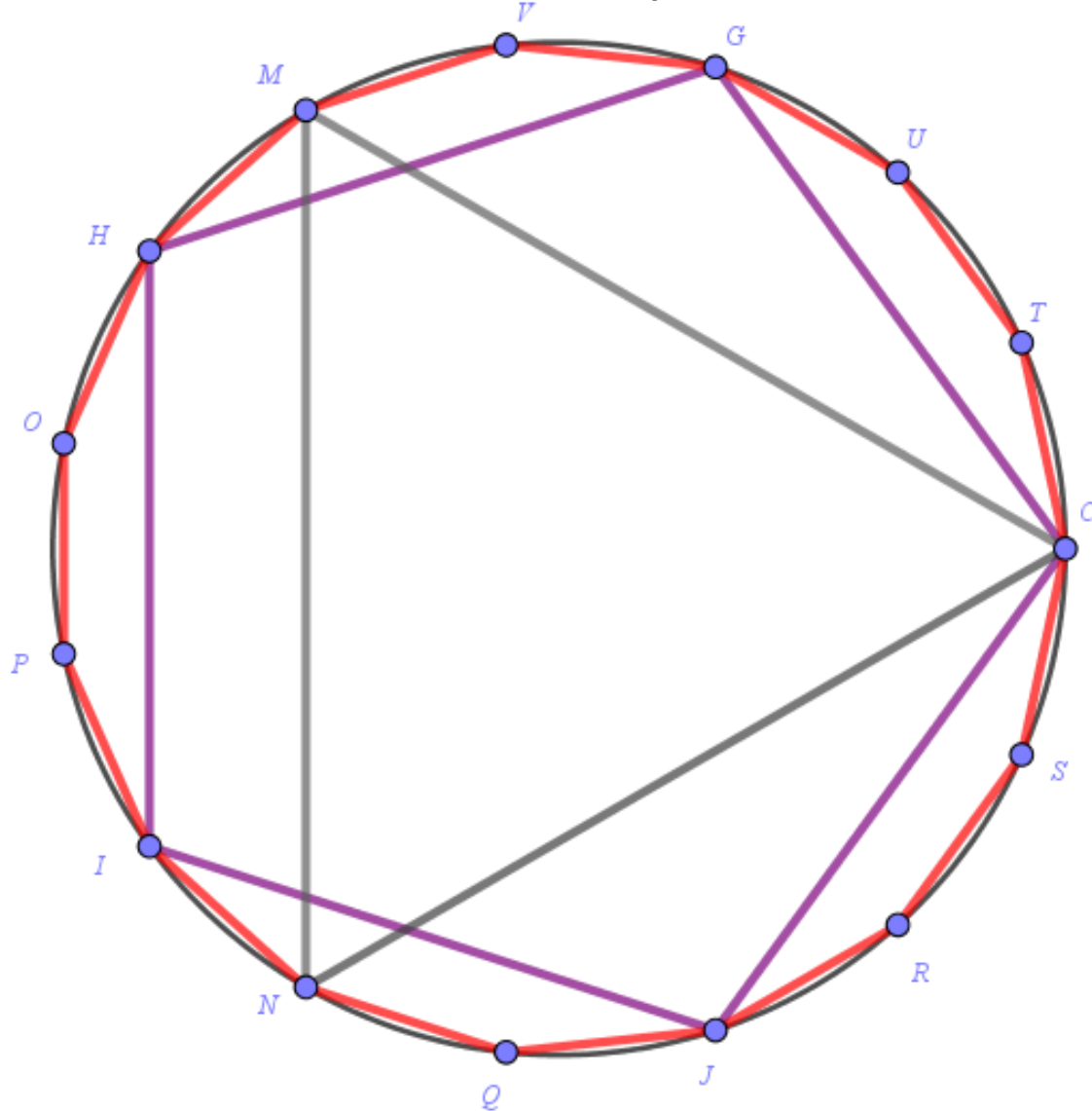
- Wykreślić okrąg o środku w punkcie A .
- Wykreślić średnicę BC okręgu oraz odcinek AD do niej prostopadły.
- Nanieść punkt E w połowie długości odcinka BA .
- Wykreślić okrąg o środku w punkcie E i promieniu ED .
- Nanieść punkt F w miejscu przecięcia tego okręgu z odcinkiem BC .
- Odcinek DF to bok pięciokąta foremnego.

KONSTRUKCJA TRÓJKĄTA WPISANEGO W OKRĄG



- Wykreślić okrąg o środku w punkcie C i promieniu AC .
- Oznaczyć punkty przecięcia okręgów przez K i L .
- Wykreślić okręgi o środkach w punktach K i L o promieniu AC .
- Nanieść punkty przecięcia tych okręgów z okręgiem opisanym na pięciokącie foremnym.
- Punkty M , C , N to wierzchołki trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg.
- Odcinek HM to bok piętnastokąta foremnego.

KONSTRUKCJA PIĘTNASTOKĄTA FORMNEGO



Przy użyciu konstrukcji trójkąta równobocznego i pięciokąta foremnego wpisanych w ten sam okrąg i o wspólnym wierzchołku można skonstruować piętnastokąt foremny.

WNIOSEK

Jeśli konstruowalne są n -kąt oraz m -kąt foremne, to konstruowalny jest również k -kąt foremny, gdzie $k = n \cdot m \cdot 2^l$, n i m są względnie pierwsze oraz l jest liczbą naturalną.

WYKORZYSTANIE WIELOLIŚCI W ARCHITEKTURZE

- kształty budowli
- elementy wykończenia
- różne epoki i przeznaczenia

CZTEROLIŚĆ

Budowla wzniesiona na planie czteroliścia to tetrakonchos.

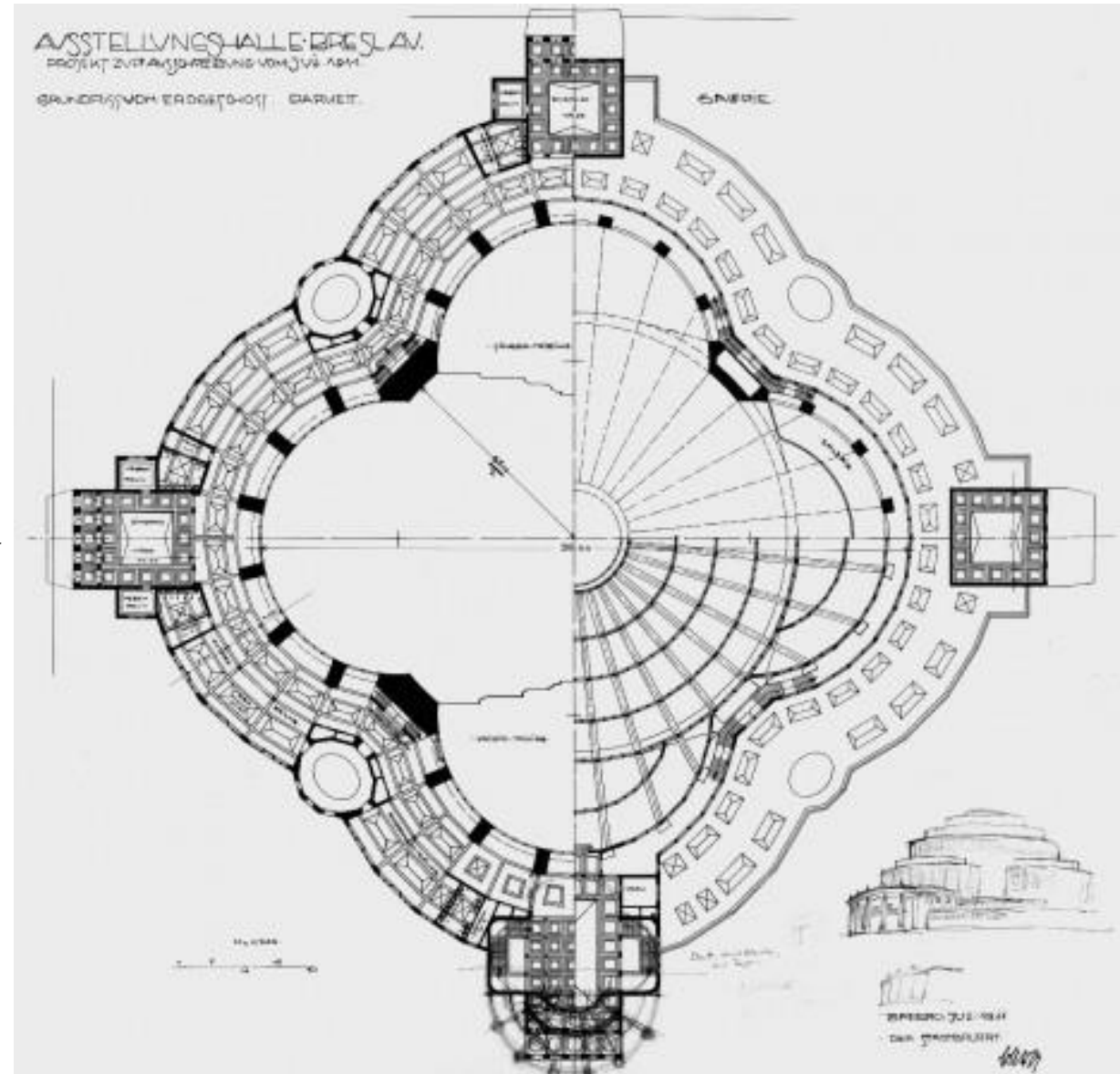


Hala Stulecia we Wrocławiu

CZTEROLIŚĆ

Hala Stulecia we Wrocławiu

- styl: współczesny
- przeznaczenie: hala widowiskowa
- lokalizacja: Polska



CZTEROLIŚĆ

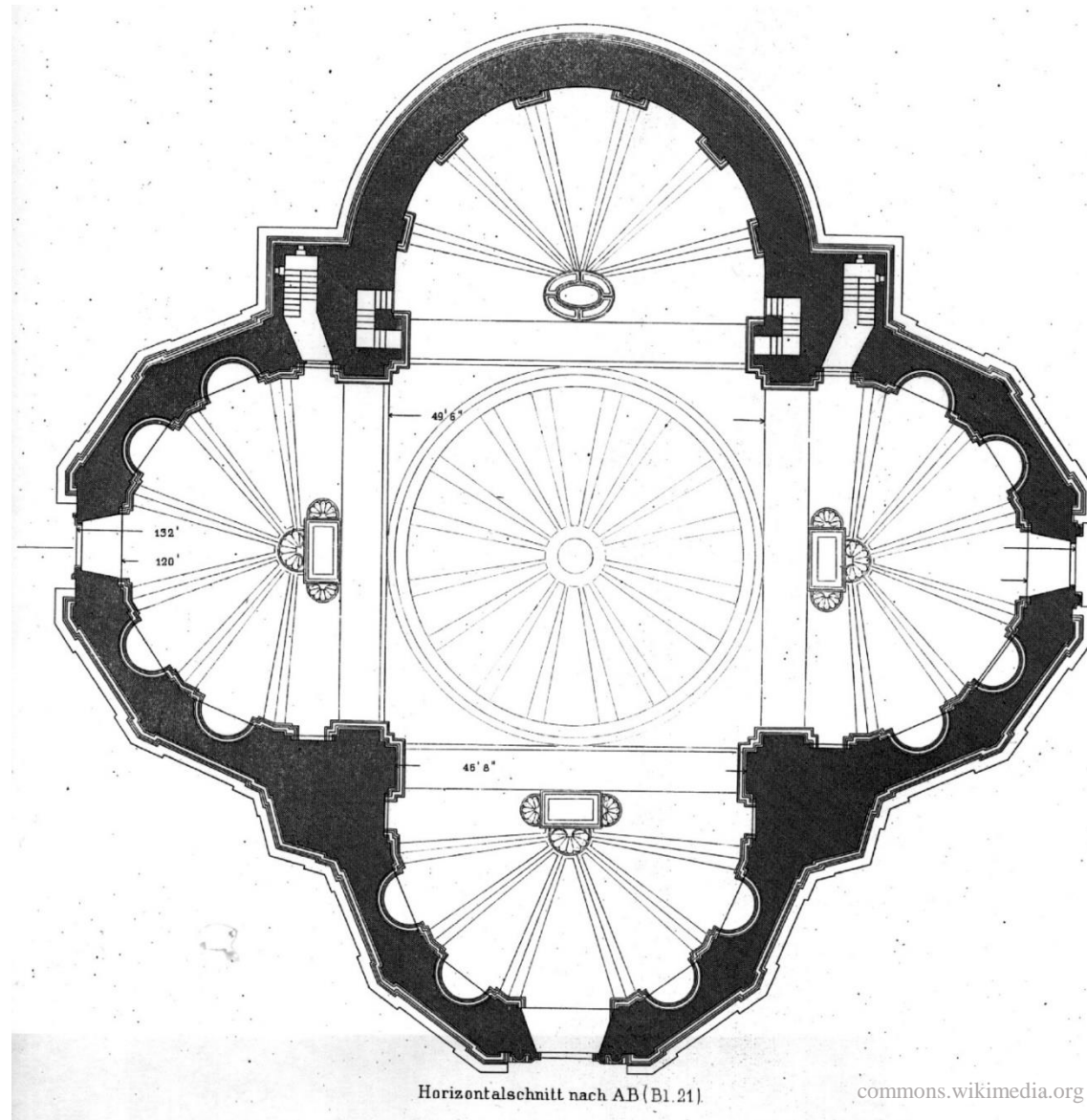


Kościół Matki Bożej Pocieszenia w Todi

CZTEROLIŚĆ

Kościół Matki Bożej
Pocieszenia w Todi

- styl: renesansowy
- przeznaczenie: świątynia
- lokalizacja: Włochy

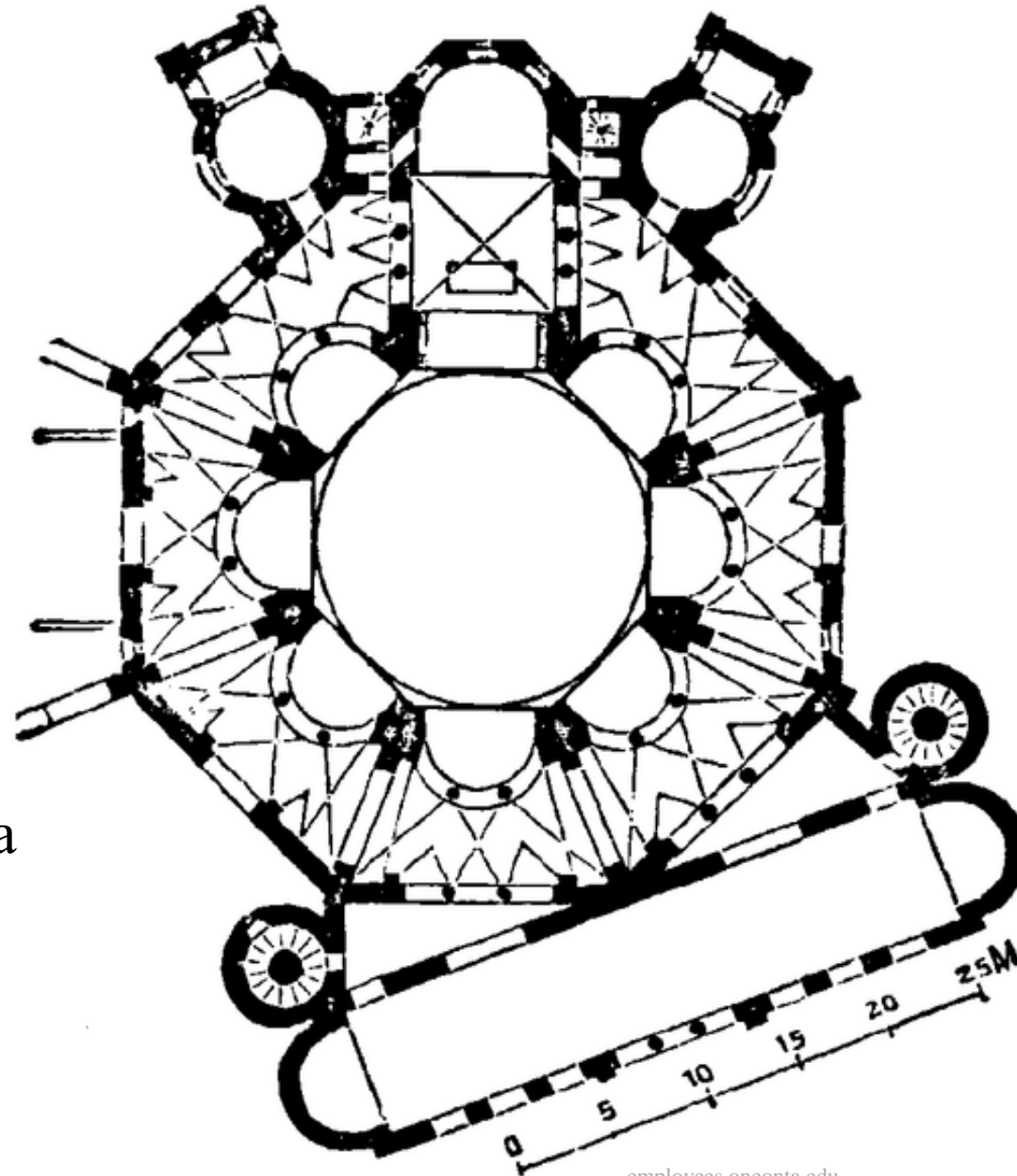


Kościół św. Matki Bożej Pocieszenia w Todi

OŚMIOLIŚĆ

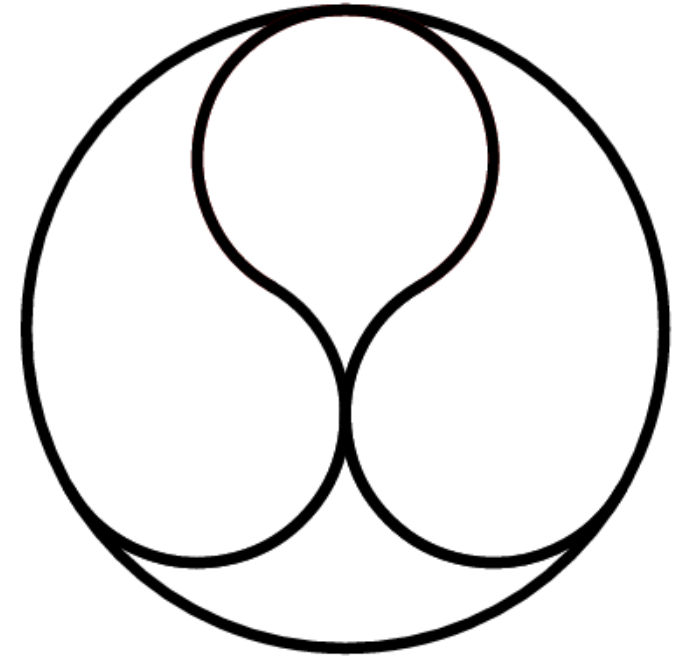
Bazylika św. Witalisa w
Ravennie

- styl: bizantyjski
- przeznaczenie: świątynia
- lokalizacja: Włochy

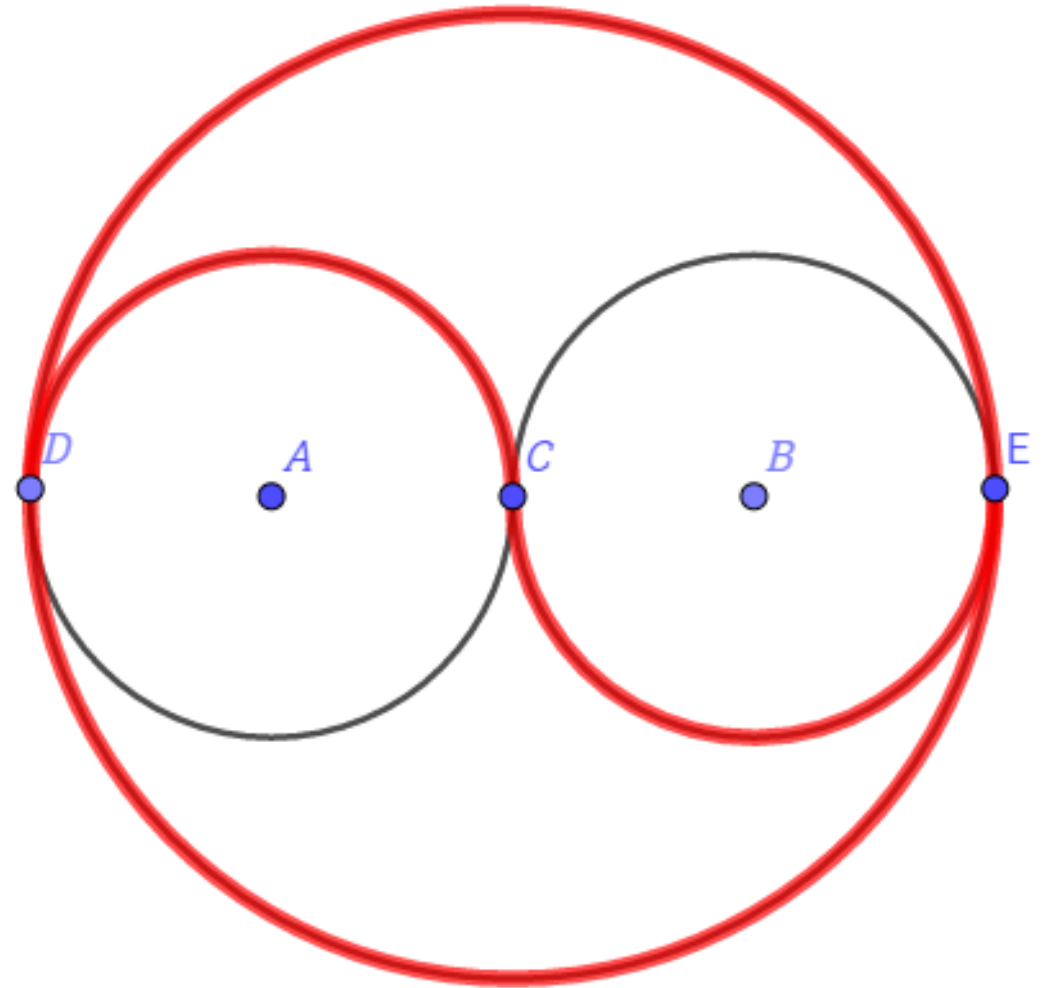
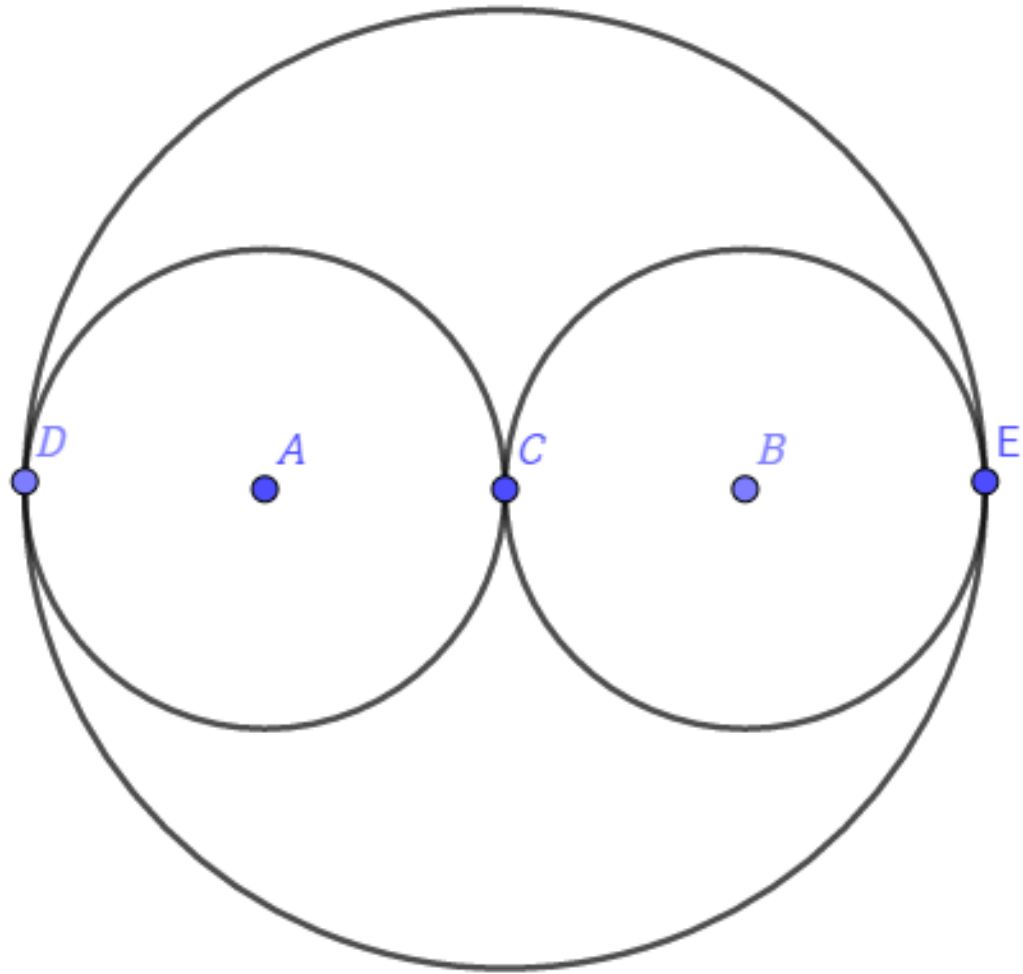


RYBI PEŃCZERZ

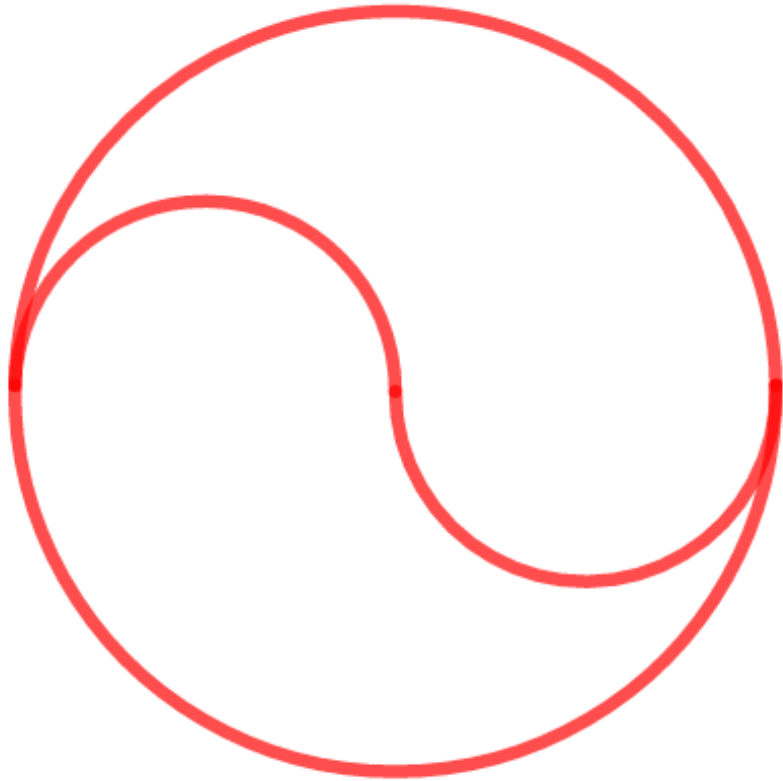
- element dekoracyjny charakterystyczny dla maswerków i rozet
- wykonywany w kamieniu
- konstruowany na podstawie wieloliści wpisanym w okrąg



KONSTRUKCJA RYBIEGO DWUPEČERZA



KONSTRUKCJA RYBIEGO DWUPEČHERZA



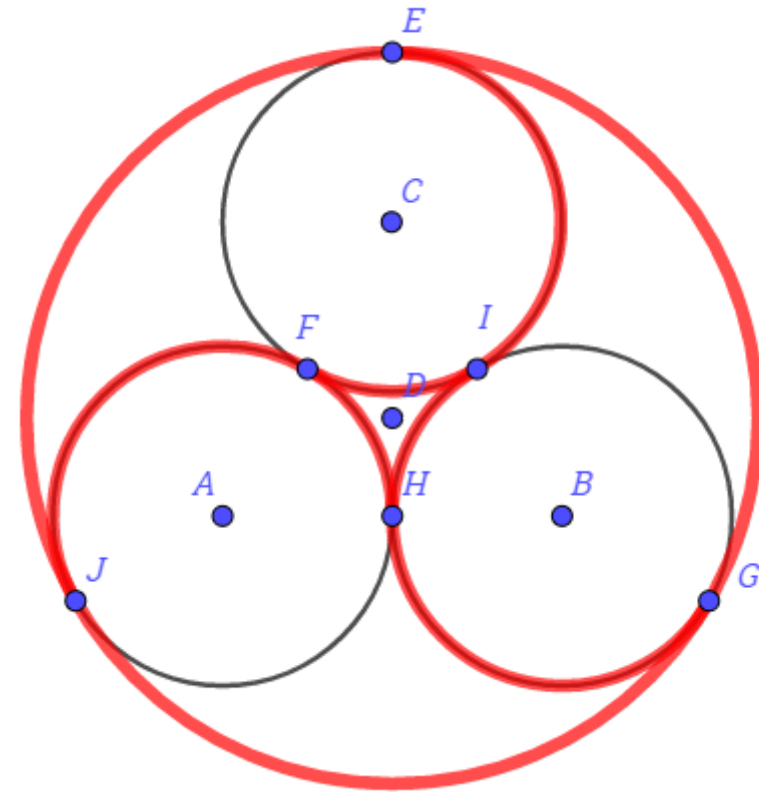
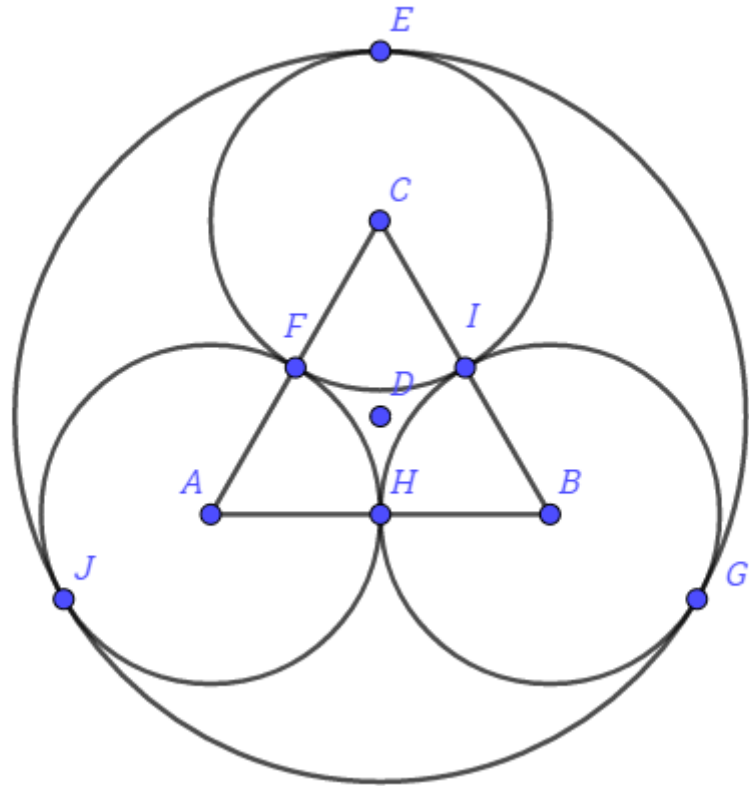
rybi dwupečherz



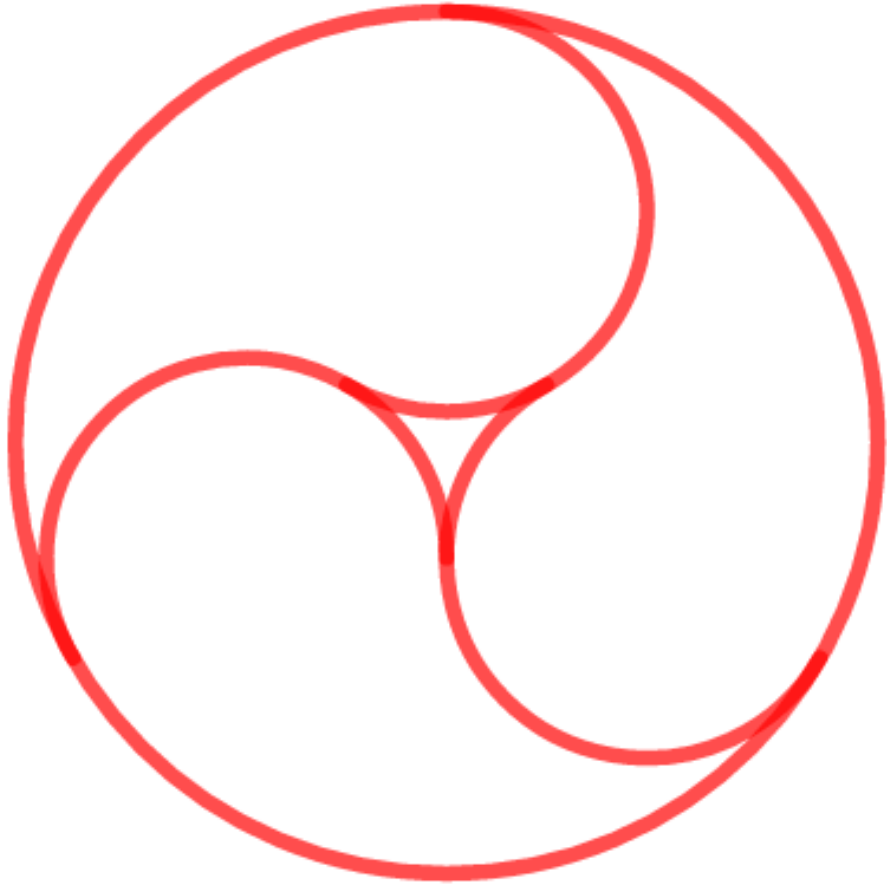
[wikipedia.com](https://en.wikipedia.org/wiki/Yin-Yang)

Yin i yang

KONSTRUKCJA RYBIEGO TRÓJPEČHERZA



7. Przykłady i konstrukcje rybiego pęcherza



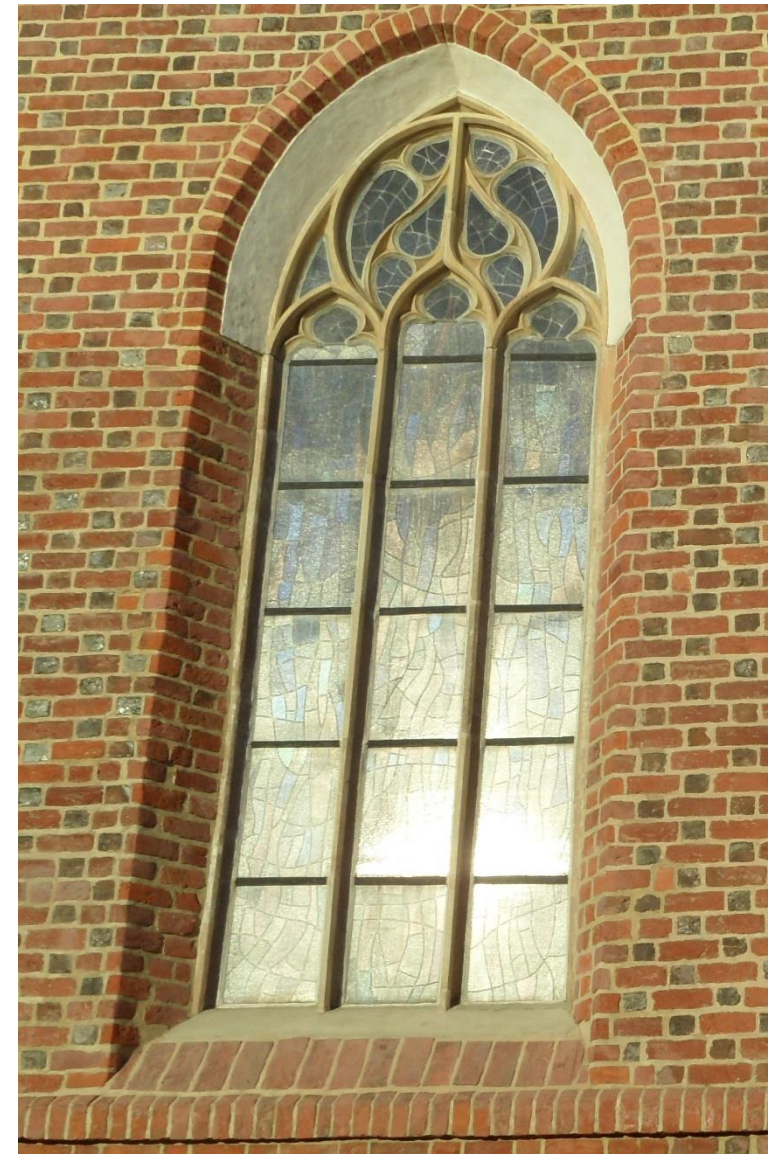
rybi trójpęcherz



Dworzec główny we Wrocławiu

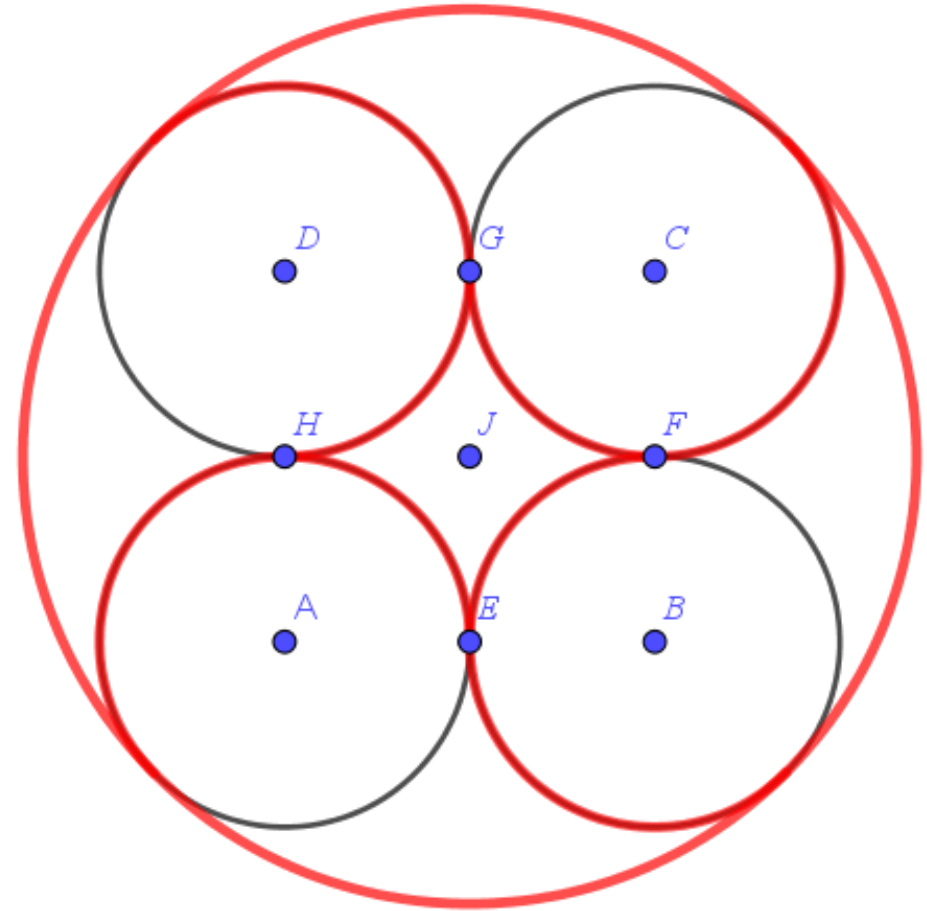
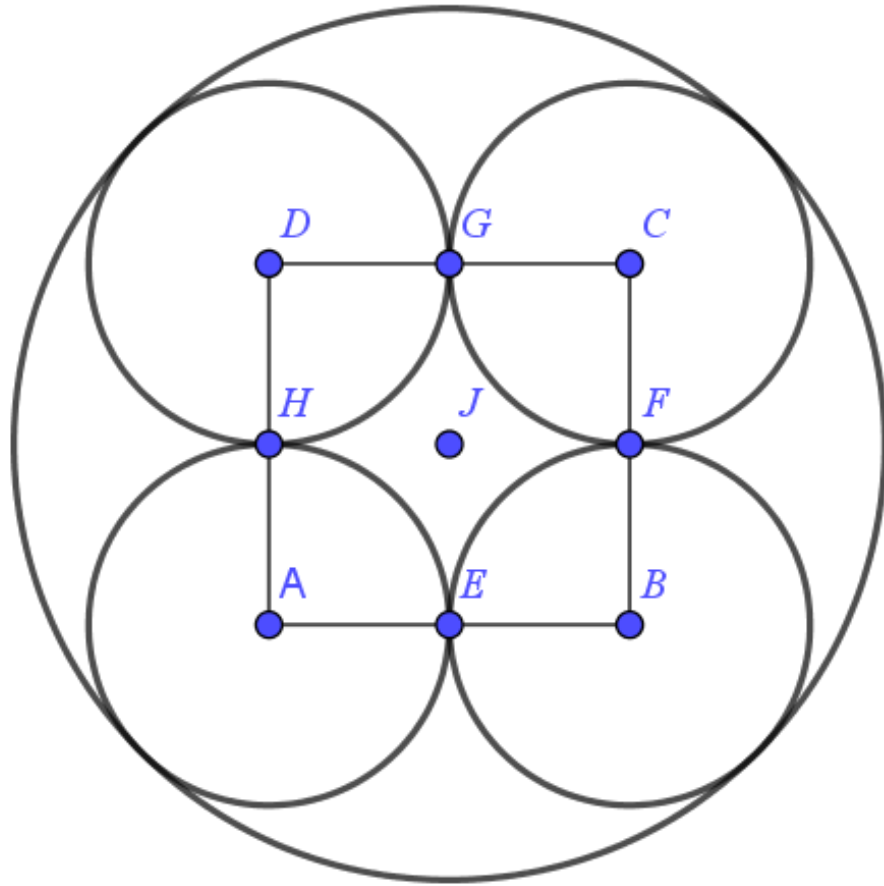


Katedra w Strasburgu

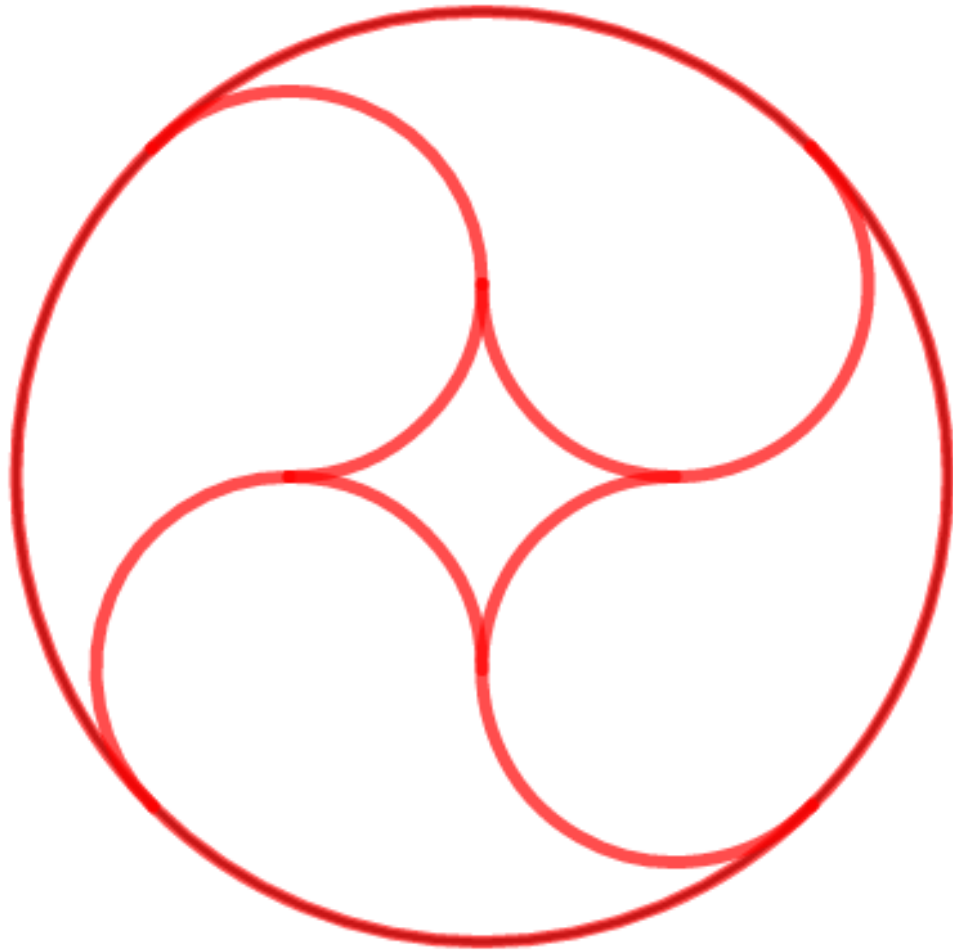


Katedra pw. św. Jana Chrzciciela we Wrocławiu

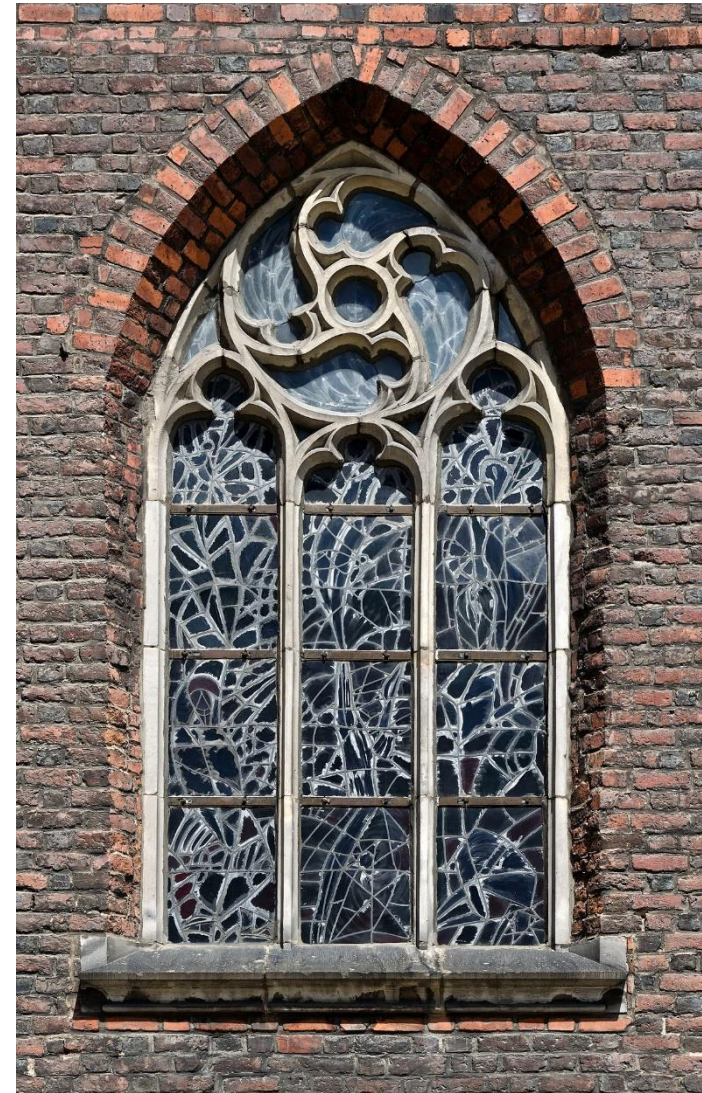
KONSTRUKCJA RYBIEGO CZTEROPEŃCZERZA



7. Przykłady i konstrukcje rybiego pęcherza



rybi czteropęcherz



wikipedia.com

Kościół pw. św. Jakuba St. Apostoła w Nysie

KONSTRUKCJA RYBIEGO n -PĘCHERZA

- Skonstruować n -kąąt foremny.
- Wykreślić okręgi o środkach w wierzchołkach n -kąąta oraz o promieniach równych długości połowy boku figury.
- Wykreślić okrąg styczny wewnątrznie z okręgami wykreślonymi uprzednio.
- Zaznaczyć odpowiednie części okręgów oraz duży okrąg.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Wojciech Guzicki *Geometria maswerków gotyckich*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków, 2011
- [2] https://pl.wikipedia.org/wiki/Liczby_Fermata
- [3] Witold Mizerski *Tablice matematyczne*, Wydawnictwo adamantan, Warszawa, 2014
- [4] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, A. Kilian *Architectural Geometry*
- [5] Mirosław Majewski *Szkice o geometrii i sztuce: sztuka konstrukcji geometrycznych*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń, 2014

Jeśli nie podano inaczej, wykorzystano zdjęcia własnego autorstwa.

DZIĘKUJEMY ZA UWAGĘ