

FINAŁ MISTRZOSTW ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ Z GEOMETRII ELEMENTARNEJ 2009

Zad.1. W trójkąt o kątach α , β , γ wpisano okrąg. Oblicz kąty w trójkącie, którego wierzchołkami są punkty styczności.

Zad.2. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych 30° . Wpisano w niego okrąg o promieniu r . Oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od punktu styczności leżącego na przeciwprostokątnej.

Zad.3. Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 1 i stanowi cięciwę pewnego okręgu. Pozostałe boki kwadratu leżą na zewnątrz okręgu. Długość stycznej CK (K leży na okręgu) wynosi 2. Oblicz promień tego okręgu.

Zad.4. W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, H ortocentrum, M środek ciężkości. Wykaż, że $2 \cdot OM = MH$.

Zad.5. Wykaż, że kwadrat długości odcinka dwusiecznej zawartego w trójkącie równy jest różnicy iloczynów długości boków o wspólnym wierzchołku z dwusieczną i długości odcinków na jakie dwusieczna dzieli trzeci bok.

Zad.6. Dany jest trójkąt równoramienny ($AC=CB$). Pewien okrąg o środku O jest styczny do boku BC w B , a do przedłużenia boku AC poza C w punkcie D . Wykaż że punkt przecięcia się prostych DO i AB leży na okręgu.

Zad.7. Po jednej stronie prostej k leżą punkty A i B . Na prostej k znaleźć punkt D taki że różnica $DA-DB$ jest największa.

Zad.8. Dwa okręgi o promieniach R i r są styczne zewnętrznie w A . Przez punkt B leżący na większym okręgu prowadzimy styczną do mniejszego w C . Wiedząc, że $AB=a$ oblicz BC .

Zad.9. Dany jest trójkąt równoramienny ($AC=CB$). Prowadzimy dwusieczną AD . Wiedząc, że $P_{ACD}=S_1$ oraz $P_{ABD}=S_2$, oblicz AB .

Zad.10. Dany jest trójkąt równoramienny ($AC=CB$). Na boku AC obrano punkt D . Na trójkątach ADB i DBC opisano okręgi S_1 i S_2 . Styczna do S_1 w punkcie D przecina okrąg S_2 w M . Wykaż, że $CM \parallel AB$.

Zad.11. Na bokach AB , BC , CA trójkąta obrano punkty P , Q , R tak, że $AP = CQ$ i na czworokącie $RPBQ$ można opisać okrąg. Styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC w A i C przecinają proste RP i RQ odpowiednio w X i Y . Wykaż, że $RX = RY$.

Zad.12. Wykaż, że w trójkącie ABC dwusieczna kąta A , linia średnia równoległa do AC i prosta przechodząca przez punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokami BC i AC przecinają się w jednym punkcie.