Rozdział I

Liczby rzeczywiste

♡ ♡ ♡

§1. Aksjomatyczne wprowadzenie zbioru liczb rzeczywistych.

Z liczbami mamy do czynienia od wczesnego dzieciństwa. Już małe dziecko ucząc się liczyć przedmioty, z którymi ma do czynienia, oswaja się praktycznie z pojęciem liczby całkowitej dodatniej (czyli naturalnej) - początkowo zazwyczaj w zakresie od 1 do 10 lub 20. W pierwszych klasach szkoły podstawowej uczniowie opanowują umiejętność wykonywania czterech działań (dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia) na liczbach naturalnych dodając do tego zbioru nową liczbę zero. Dowiadują się przy tym, że nie jest wykonalne dzielenie przez tę liczbę. W dalszym ciągu nauki zbiór poznawanych liczb rozrasta się. Pojawiają się liczby całkowite ujemne, przydatne np. do zapisywania temperatury poniżej zera. Naturalną konsekwencją wprowadzonego uprzednio dzielenia jest pojawienie się liczb będących ułamkami (czyli wymiernych). Wreszcie przy omawianiu zagadnienia mierzenia odcinków uczeń dowiaduje się, że istnieją odcinki których długość nie da się wyrazić liczbą wymierną - najbardziej znanym przykładem jest przekątna kwadratu o boku długości 1. Mierzenie takich odcinków prowadzi do pojęcia liczby niewymiernej. Wszystkie poznane w szkole podstawowej i średniej liczby obejmujemy wspólną nazwą liczb rzeczywistych. Uczniowie mają wiele okazji wykonywania na tych liczbach rachunków, niekiedy skomplikowanych.

W szkolnym kursie matematyki Czytelnik spotkał się z pojęciem funkcji. Przykładem funkcji może być funkcja liniowa $y = 2x + 5$, funkcja wykładnicza $y = 3^x$, wielomian kwadratowy $y = x^2 + 2x - 1$, funkcje trygonometryczne $y = \sin x$, $y = \cos x$ i wiele innych. Niektóre z tych funkcji można łatwo zilustrować przy pomocy wykresu. Tematem niniejszego podręcznika będą własności takich właśnie funkcji, w których zmienna niezależna (argument) x oraz zmienna zależna (wartość) y są liczbami rzeczywistymi.

W wykładzie matematycznym staramy się zawsze dokładnie sprecyzować pojęcia, którymi się posługujemy. Tylko w ten sposób możemy uniknąć błędów i nieporozumień. W naszym przypadku zaczniemy od precyzyjnego wprowadzenia zbioru liczb rzeczywistych. Zastosujemy *metodę aksjomatyczną*: wprowadzimy zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych jako zbiór nieznanych nam na razie elementów, o których założymy, że spełniają pewne warunki zwane *aksjomatami*. Przez *liczbę rzeczywistą* będziemy rozumieli element zbioru $\mathbb{R}$.

1. Aksjomaty zbioru liczb rzeczywistych. Formułując aksjomaty określające zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ będziemy zakładali, że x, y, z oznaczają dowolne elementy tego zbioru. Aksjomaty te podzielimy na kilka klas.

Klasa I. W zbiorze $\mathbb{R}$ określone jest działanie $+$ (zwane dodawaniem), które każdej parze liczb x, y przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę $x + y$ i ma następujące własności:

(1a) $x + y = y + x$ (przemienność dodawania)
(2a) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (łączność dodawania)
(3a) w zbiorze $\mathbb{R}$ istnieje liczba 0 taka, że $x + 0 = x$
(4a) dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ istnieje w zbiorze $\mathbb{R}$ liczba przeciwna (oznaczamy ją $-x$) spełniająca warunek

$$x + (-x) = 0.$$

Klasa II. W zbiorze $\mathbb{R}$ określone jest działanie $\cdot$ (zwane mnożeniem), kt/re każdej parze liczb x, y przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę $x \cdot y$, przy czym spełnione są warunki

(5a) $x \cdot y = y \cdot x$ (przemienność mnożenia)
(6a) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (łączność mnożenia)
(7a) w zbiorze $\mathbb{R}$ istnieje liczba 1 (różna od liczby 0) taka, że $1 \cdot x = x$
(8a) dla dowolnej liczby $x \neq 0$ istnieje w zbiorze $\mathbb{R}$ liczba odwrotna (oznaczamy ją x^{-1}) spełniająca warunek

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Klasa III. Działania dodawania i mnożenia są związane regułą

(9a) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Klasa IV. W zbiorze $\mathbb{R}$ określona jest relacja $<$ spełniająca warunki

(10a) dla dowolnych x, y $(x \neq y)$ zachodzi jeden ze związków $x < y$ (x mniejsze od y) lub $y < x$ (y mniejsze od x)
(11a) jeżeli $x < y$, $y < z$ to $x < z$ (relacja $<$ jest przechodnia)
(12a) jeżeli $x < y$ to $x + z < y + z$
(13a) jeżeli $0 < x$, $0 < y$ to $0 < x \cdot y$.

Klasa V

(14a) Aksjomat kresu (zwany również aksjomatem ciągłości) zostanie sformułowany później.

Liczbę $x + y$ nazywamy *sumą* liczb x, y zaś liczbę $x \cdot y$ *iloczynem* liczb x, y.

Aksjomaty klasy I mówią, że zbiór $\mathbb{R}$ jest grupą przemienną ze względu na działanie dodawania, zaś z aksjomatów klasy II wynika że zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest grupą przemienną ze względu na działanie mnożenia. Aksjomaty klas I-III mówią, że zbiór liczb rzeczywistych stanowi ciało przemienne.

Jak Czytelnik napewno zauważył, w aksjomatach (1a) - (13a) sformułowane są własności działań dodawania i mnożenia oraz relacji $<$ dobrze znane ze szkolnej praktyki rachunkowej. Aby pozostać w zgodzie z przyjętymi zwyczajami wprowadzimy w zbiorze $\mathbb{R}$ działanie odejmowania, przyjmując $x - y = x + (-y)$ oraz oznaczymy $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Umówimy się ponadto, że zamiast $x < y$ możemy również pisać $y > x$.

Zapis $x \geq y$ będzie oznaczał alternatywę: albo $x > y$ albo $x = y$. Podobnie zapis $x \leq y$ będzie oznaczał, że zachodzi jedna z możliwości: albo $x < y$ albo $x = y$. Nierówność $x \geq y$ względnie $y \leq x$ nazywamy *nierównością słabą* a nierówność $x > y$ względnie $x < y$ - *nierównością ostrą*.

Będziemy mówili, że
x jest *liczbą dodatnią*, jeżeli $x > 0$, x jest *liczbą nieujemną*, jeżeli $x \geq 0$,
x jest *liczbą ujemną*, jeżeli $x < 0$, x jest *liczbą niedodatnią*, jeżeli $x \leq 0$.
O dwóch liczbach x, y będziemy mówili, że
są tego samego znaku, jeżeli jest spełniony jeden z warunków

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

lub

$$x \leq 0, \quad y \leq 0.$$

Będziemy mówili, że liczby te są
różnych znaków, jeżeli

$$x > 0, \quad y < 0$$

lub vice versa.

Z aksjomatów (1a) - (13a) można wyprowadzić dalsze własności działań na liczbach rzeczywistych, do których jesteśmy przyzwyczajeni w praktyce rachunkowej. Sprawdzimy to na kilku przykładach.

Własność 1. *Liczba* 0 *określona w aksjomacie* (3a) *jest jedyna.*

DOWÓD. Przypuśćmy że istnieją dwie takie liczby 0, $0'$ wówczas $0+0' = 0$ oraz $0'+0 = 0'$ co na mocy (1a) daje $0 = 0'$. □

Własność 2. *Do danej liczby* $x \in \mathbb{R}$ *istnieje tylko jedna liczba przeciwna.*

DOWÓD. Przypuśćmy że istnieją dwie liczby y, y' takie że $x + y = 0$ oraz $x + y' = 0$. Wówczas korzystając z (1a), (2a) i (3a) dostajemy

$$y = y + (x + y') = (y + x) + y' = (x + y) + y' = y'.$$

□

Własność 3. *Jeżeli* $x < y$ *oraz* $u < v$ *to* $x + u < y + v$ *(nierówności można dodawać stronami).*

DOWÓD. Na mocy (12a) mamy $x + u < y + u$ oraz $u + y < v + y$ co wobec (1a) i (11a) daje tezę. □

Własność 4. *Nierówność*

$$x > y \tag{1}$$

jest równoważna nierówności

$$x - y > 0. \tag{2}$$

DOWÓD. Nierówność (2) otrzymujemy z (1) dodając do obu stron $-y$. Na odwrót (1) dostajemy z (2) dodając do obu stron y i korzystając z łączności dodawania (aksjomat (2a)). □

Własność 5. *Jeżeli*

$$x > y \tag{3}$$

oraz

$$z > 0 \tag{4}$$

to

$$x \cdot z > y \cdot z$$

(nierówności można mnożyć przez liczbę dodatnią).

DOWÓD. Na mocy własności 4 nierówność (3) daje $x - y > 0$, stąd wobec (13a) mamy $(x - y) \cdot z > 0$ czyli po wykorzystaniu (5a) i (9a)

$$x \cdot z - y \cdot z > 0$$

co wobec własności 4 daje tezę. □

Własność 6. *Dla dowolnej liczby rzeczywistej x*

$$0 \cdot x = 0. \tag{5}$$

DOWÓD. Na mocy aksjomatów (7a),(9a), (1a), (3a)

$$0 \cdot x + x = 0 \cdot x + 1 \cdot x = (0 + 1) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

skąd, dodając obustronnie $-x$ i korzystając z łączności dodawania (aksjomat (2a)), dostajemy

$$0 \cdot x + 0 = 0,$$

co wobec aksjomatu (3a) daje (5). □

Własność 7. *Dla dowolnej liczby rzeczywistej x*

$$(-1) \cdot x = -x. \tag{6}$$

DOWÓD. Wystarczy sprawdzić, że lewa strona równości jest liczbą przeciwną do x (która na mocy własności 2 jest jedyna). Istotnie na mocy aksjomatów (7a), (9a) i własności 6

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = [1 + (-1)] \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

□

Własność 8. *Zachodzi nierówność*

$$1 > 0. \tag{7}$$

DOWÓD. Przeprowadzimy go przez sprowadzenie do niedorzeczności. Przypuśćmy, że (7) nie zachodzi, wobec tego na mocy aksjomatów (7a) i (10a) musi być

$$1 < 0. \tag{8}$$

Dodając do obu stron -1 stwierdzamy, że -1 jest liczbą dodatnią i wobec tego na mocy własności 5 otrzymujemy z (8)

$$1 \cdot (-1) < 0 \cdot (-1),$$

czyli wobec własności 6, 7 i aksjomatu (5a)

$$-1 < 0$$

wbrew temu co udowodniliśmy. □

W dalszym ciągu zapisując iloczyn liczb będziemy opuszczali znak $\cdot$, jeżeli nie będzie to prowadziło do nieporozumienia. Zgodnie z tą umową będziemy pisali

$$2yxy = 2xy^2 \quad \text{ale} \quad 2 \cdot 17 \cdot 5 = 170.$$

2. Wartość bezwzględna (moduł) liczby rzeczywistej. *Wartość bezwzględną $|x|$ liczby rzeczywistej* x określamy następująco

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0, \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Z definicji wynika, że wartość bezwzględna jest zawsze nieujemna, przy czym

$$|-x| = |x|.$$

Obie te własności wartości bezwzględnej są omawiane w szkolnym kursie matematyki. Wynikają one z podanych aksjomatów zbioru liczb rzeczywistych. Proponujemy, by

Czytelnik przeprowadził ich dowód opierając się na zadaniu 1. Łatwo również udowodnić następujące własności rachunkowe wartości bezwzględnej:

$$|x+y| \le |x| + |y|; \tag{9}$$

$$|xy| = |x||y|; \tag{10}$$

$$|x^{-1}| = |x|^{-1} \qquad \text{dla } x \neq 0; \tag{11}$$

$$||x| - |y|| \le |x-y|. \tag{12}$$

Dla dowodu wzoru (9) załóżmy najpierw, że obie liczby x, y są tego samego znaku - wówczas taki sam znak ma ich suma. Jeżeli $x \ge 0,\ y \ge 0$ to $|x| = x,\ |y| = y,\ |x+y| = x+y$. Jeżeli zaś $x \le 0,\ y \le 0$ to $|x| = -x,\ |y| = -y,\ |x+y| = -(x+y)$. W obu przypadkach we wzorze (9) mamy znak równości. Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy liczby x, y są różnych znaków, niech na przykład $x < 0,\ y > 0$. Prawa strona wzoru ma zatem postać $y - x$. Po lewej stronie mamy $x + y$, gdy suma liczb x, y jest nieujemna lub $-x - y$, gdy suma ta jest ujemna. Ponieważ (por. zadanie 1 g.), h.))

$$x + y < 0 + y < y - x$$

oraz

$$-x - y < -x + 0 < y - x$$

wzór (9) zachodzi i w tym przypadku.
Dowód wzorów (10), (11) pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. Dla dowodu wzoru (12) zauważmy, że wobec (9)

$$|x| = |(x-y) + y| \le |x-y| + |y| \tag{13}$$

oraz

$$|y| = |(y-x) + x| \le |y-x| + |x|. \tag{14}$$

Wzór (12) wynika teraz z (13), gdy $|x| \ge |y|$ oraz z (14), gdy $|x| < |y|$. □

3. Interpretacja geometryczna zbioru liczb rzeczywistych. Liczby rzeczywiste można interpretować geometrycznie jako punkty prostej. Na danej prostej L obierzmy punkt P_0. Dzieli on prostą L na dwie półproste, przy czym półprostą złożoną z punktów leżących na prawo od P_0 nazwiemy półprostą dodatnią i oznaczymy jako L_+, zaś półprostą utworzoną przez punkty leżące na lewo od P_0 nazwiemy półprostą ujemną i oznaczymy przez L_-. Prosta L staje się w ten sposób *prostą zorientowaną*. Mając możliwość mierzenia długości odcinków na prostej L oznaczmy przez $|PQ|$ długość odcinka o końcach $P, Q \in L$. Każdemu punktowi $P \in L$ możemy teraz przyporządkować liczbę rzeczywistą x_P określoną następująco

$$x_P = \begin{cases} |P_0P| & \text{gdy } P \in L_+, \\ 0 & \text{gdy } P = P_0, \\ -|P_0P| & \text{gdy } P \in L_-, \end{cases}$$

przy czym, jak łatwo sprawdzić (proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku)

$$|PQ| = |x_P - x_Q|$$

dla dowolnych punktów P, Q prostej L.

W rozważaniach naszych posłużyliśmy się intuicyjnym pojęciem prostej do którego przywykliśmy podczas nauki geometrii w szkole. Można jednak przeprowadzić całe rozumowanie bardziej rygorystycznie, wprowadzając aksjomatycznie pojęcie prostej geometrycznej i długości (miary) odcinka[1], i udowadniając następnie

Twierdzenie. *Każdej liczbie rzeczywistej x odpowiada dokładnie jeden punkt $P \in L$ taki, że $x_P = x$.*

W szczególności liczbie $x = 1$ odpowiada dokładnie jeden punkt P_1 taki, że $|P_0P_1| = 1$. Oznacza to, że na prostej L mamy określoną jednostkę długości odcinka. Liczbę x_P nazywamy *współrzędną punktu P*, zaś jedyny punkt P_0 o współrzędnej 0 nazywamy *początkiem układu współrzędnych*. Prostą zorientowaną z wyróżnionym początkiem układu współrzędnych i wprowadzoną jednostką miary nazywamy *osią liczbową*.

W dalszym ciągu punkty osi liczbowej będziemy utożsamiać z ich współrzędnymi. Pozwoli to nadać sens geometryczny pojęciom i twierdzeniom analizy i uczynić wiele rozumowań bardziej przejrzystymi.

4. Przedziały na osi liczbowej. Niech $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$. Wprowadzimy oznaczenia

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\} \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}.
\end{aligned}$$

Zbiór $[a,b]$ nazywamy *przedziałem domkniętym* zaś (a,b) - *przedziałem otwartym*. Geometrycznie przedział domknięty [a,b] stanowi odcinek wyznaczony przez punkty a, b wraz z końcami, zaś przedział otwarty (a,b) jest takimże odcinkiem ale bez końców. Będziemy również rozważać *przedziały niewłaściwe*

$$\begin{aligned}
(-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq a\} \\
(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : \ x < a\} \\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\} \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\} \\
(-\infty, \infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

[1]Zainteresowanych odsyłamy do książki K. Borsuk i W. Szmielew, Podstawy geometrii, rozdz. I, Warszawa 1975

Przedział otwarty (a, b) $(a, b \in \mathbb{R})$ będziemy nazywali *wnętrzem przedziału* $[a, b]$ (względnie $[a, b), (a, b])$. Przedział $(-\infty, a)$ (względnie (a, ∞)) będziemy nazywali *wnętrzem przedziału* $(-\infty, a]$ (względnie $[a, \infty)$). *Wnętrzem przedziału* $(-\infty, \infty)$ jest ten sam przedział. Każdy punkt należący do wnętrza przedziału będziemy nazywali *punktem wewnętrznym* tego przedziału.

5. Liczby naturalne. Liczby naturalne są dobrze znane Czytelnikowi. Od nich małe dziecko zaczyna swoje "matematyczne przygody", licząc posiadane przedmioty: cukierki, lalki, samochodziki. Zobaczymy teraz, że można pojęcie liczby naturalnej wprowadzić w sposób precyzyjny traktując ją jako szczególny przypadek liczby rzeczywistej.

Zaczniemy od pozornie abstrakcyjnej definicji. Zbiór $D \subset \mathbb{R}$ nazywamy *induktywnym*, jeżeli spełnia warunki

(i) $1 \in D$,

(ii) jeżeli $a \in D$, to $a + 1 \in D$.

A oto przykłady zbiorów induktywnych:

$$D_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$
$$D_2 = \{\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{7}{3}, 3, \frac{10}{3}, 4, \ldots\}.$$

Zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$ nazwiemy taki podzbiór zbioru $\mathbb{R}$, który zawarty jest w każdym zbiorze induktywnym (można to wyrazić inaczej: zbiór $\mathbb{N}$ jest najmniejszym zbiorem induktywnym). Elementy zbioru $\mathbb{N}$ będziemy nazywali *liczbami naturalnymi.*

6. Zasada indukcji zupełnej. Z definicji zbioru $\mathbb{N}$ wynika następujące twierdzenie zwane *zasadą indukcji zupełnej*:

Twierdzenie 1. *Jeżeli zbiór D liczb naturalnych jest induktywny, to $D = \mathbb{N}$.*

Twierdzenie 1 daje wygodną metodę dowodzenia twierdzeń dotyczących liczb naturalnych. Przypuśćmy, że mamy udowodnić twierdzenie sformułowane następująco:

Dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe jest zdanie $T(n)$.

Oznaczmy przez B zbiór liczb naturalnych, dla których zdanie $T(n)$ jest prawdziwe. Mamy udowodnić, że $B = \mathbb{N}$. Wystarczy w tym celu okazać, że zbiór B jest induktywny.

DOWÓD (zwany *dowodem indukcyjnym*) składa się z dwóch części:

I. Pierwsza część polega na sprawdzeniu że prawdziwe jest zdanie $T(1)$ - wówczas zbiór B spełnia warunek (i).

II. Druga część ma charakter pomocniczego twierdzenia, które formułujemy następująco:
ZAŁOŻENIE (zwane *założeniem indukcyjnym)*: *Zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.*
TEZA (zwana *tezą indukcyjną)*: *Prawdziwe jest zdanie* $T(n+1)$.

Po przeprowadzeniu drugiej części dowodu indukcyjnego stwierdzamy, że zbiór B spełnia warunek (ii). Wobec tego $B = \mathbb{N}$ na mocy twierdzenia 1, co kończy dowód indukcyjny.

Podamy teraz przykłady dowodów indukcyjnych.

Twierdzenie. *Wszystkie liczby postaci* $13^n - 7$ *(gdzie* n *jest liczbą naturalną) są podzielne przez* 6.

DOWÓD. Zdanie $T(n)$ ma postać

liczba $13^n - 7$ *jest podzielna przez* 6.

I CZĘŚĆ DOWODU. Liczba $13 - 7 = 6$ spełnia twierdzenie.

II CZĘŚĆ DOWODU. Twierdzenie pomocnicze ma postać

ZAŁOŻENIE INDUKCYJNE: *Liczba* $13^n - 7$ *jest podzielna przez* 6.

TEZA INDUKCYJNA: *Liczba* $13^{n+1} - 7$ *jest podzielna przez* 6.

DOWÓD TWIERDZENIA POMOCNICZEGO:
Na mocy założenia indukcyjnego istnieje liczba naturalna k taka, że

$$13^n - 7 \;=\; 6k.$$

Stąd mamy

$$13^n \;=\; 6k + 7,$$

a zatem

$$13^{n+1} - 7 \;=\; 13 \cdot (6k + 7) - 7,$$

co po otworzeniu nawiasu i redukcji daje

$$13^{n+1} - 7 \;=\; 6 \cdot 13k + 7 \cdot 12 = (13k + 14) \cdot 6,$$

co kończy dowód. □

7. Nierówność Bernoulliego. Nierówność Bernoulliego[2] ma postać

$$(1 + a)^n \;\geq\; 1 + na \tag{15}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, $a \geq -1$. Udowodnimy ją stosując metodę indukcji. Pierwszy krok dowodu indukcyjnego polega na sprawdzeniu, że nierówność (15) zachodzi dla $n = 1$, co jest bezpośrednio widoczne. Aby przeprowadzić drugą część dowodu przyjmiemy (15) jako założenie indukcyjne. Mnożąc obie strony (15) przez liczbę nieujemną $1 + a$ dostajemy po redukcji

$$(1 + a)^{n+1} \;\geq\; 1 + (n + 1)a + na^2$$

skąd wynika teza indukcyjna

$$(1 + a)^{n+1} \;\geq\; 1 + (n + 1)a.$$

---

[2] Jakob Bernoulli (1654 - 1705), urodzony w Bazylei. Zajmował się rachunkiem różniczkowym oraz rachunkiem prawdopodobieństwa, współpracował z G.W. Leibnizem. Od 1687 r. kierował katedrą matematyki na uniwersytecie w Bazylei. Do rodziny Bernoullich należeli również matematycy: brat Jakoba Johann (1667 - 1748), Nikolaus (1687 - 1759) oraz synowie Johanna Nikolaus (1695 - 1726), Daniel (1700 -1782) i Johann (1710 - 1790).

Dowód indukcyjny nierówności (15) jest zakończony. $\square$

8. Dwumian Newtona. Dla dowolnej liczby naturalnej n oznaczmy symbolem $n!$ (czytamy: n silnia) iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n. Mamy zatem

$$n! \;=\; 1 \cdot 2 \cdots n$$

skąd wynika natychmiast

$$(n+1)! \;=\; n!\,(n+1).$$

Równość ta pozostaje słuszna również dla $n = 0$, jeżeli umówimy się, że

$$0! \;=\; 1.$$

Dla naturalnych n, k spełniających warunek $0 \leq k \leq n$ określimy *współczynnik dwumianowy*

$$\binom{n}{k} \;=\; \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \tag{16}$$

który po skróceniu może być zapisany w postaci

$$\binom{n}{k} \;=\; \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}. \tag{17}$$

Współczynnik $\binom{n}{k}$ ma prostą interpretację kombinatoryczną. Przypuśćmy, że ze zbioru n-elementowego Z_n mamy wybrać podzbiór k-elementowy U_k. Na ile sposobów możemy to zrobić? Przy wyborze pierwszego elementu mamy n możliwości, w zbiorze Z_n pozostaje $(n-1)$ elementów nie wybranych. Drugi element możemy wybrać zatem na $(n-1)$ sposobów, trzeci - na $(n-2)$ sposobów, k-ty na $n-(k-1)$ sposobów. Wobec tego mamy

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

możliwości wybrania układu k-elementowego U_k. Ilość różnych układów U_k zawierających te same elementy ale w różnej kolejności wynosi $k!$ (jest to ilość wszystkich możliwych permutacji zbioru k-elementowego). Wobec tego ze zbioru Z_n możemy wybrać

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

podzbiorów k-elementowych (podzbiory zawierające te same elementy ale różnie uporządkowane uważamy za identyczne). Porównując ze wzorem (17) widzimy, że ze zbioru n-elementowego możemy wybrać $\binom{n}{k}$ podzbiorów k-elementowych.

Ważną własność współczynników dwumianowych wyraża wzór

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{18}$$

Aby go udowodnić wystarczy skorzystać z postaci (16) współczynnika dwumianowego i wykonać dodawanie ułamków, sprowadziwszy je uprzednio do wspólnego mianownika. Szczegóły rachunkowe pozostawiamy Czytelnikowi.

W dalszym ciągu dla oznaczenia sumy postaci $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ będziemy używali skróconego zapisu

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Liczbę k nazywamy *wskaźnikiem sumacyjnym.*

Wzór dwumianowy Newtona[3] ma postać

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

czyli w postaci skróconej

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{19}$$

(przyjmujemy, że $a^0 = b^0 = 1$ dla dowolnych a, b). Udowodnimy go stosując metodę indukcji.

Dla $n = 1$ prawa strona wzoru ma postać

$$\binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$$

jest więc równa lewej. Aby przeprowadzić drugą część dowodu indukcyjnego przyjmiemy (19) jako założenie indukcyjne. Teza indukcyjna, którą należy udowodnić w oparciu o założenie indukcyjne ma postać

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n}{r} a^{n-r}\, b^r \\ &= a^{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r} a^{n+1-r}\, b^r + b^{n+1}. \end{aligned} \tag{20}$$

[3]Sir Isaak Newton (1642 - 1727), matematyk i fizyk angielski, jeden z twórców rachunku różniczkowego i całkowego. Z jego nazwiskiem związane są trzy zasady dynamiki oraz prawo powszechnego ciążenia.

Mnożąc obustronnie (19) przez $(a+b)$ dostajemy

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

co można inaczej zapisać jako

$$(21) \quad \begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} a^{n+1-r} b^r \\ &+ \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r-1} a^{n+1-r} b^r + b^{n+1} \end{aligned}$$

(w pierwszej sumie oznaczyliśmy wskaźnik sumacyjny literą r zaś w drugiej sumie podstawiliśmy $r = k+1$). Grupując po prawej stronie wyrazy z tymi samymi potęgami liczb a, b i korzystając z własności (18) współczynników dwumianowych dostajemy z (21) tezę indukcyjną (20). Dowód indukcyjny jest zakończony. □

Ze współczynników dwumianowych można ułożyć trójkątną tablicę (zwaną *trójkątem Pascala*[4]) w ten sposób, że w n-tym wierszu ($n \geq 1$) wypisujemy kolejno współczynniki występujące w rozwinięciu $(a+b)^{n-1}$ według wzoru (19). Wygląda ona następująco:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Reguła budowania trójkąta Pascala jest prosta. W wierzchołku trójkąta występuje liczba 1, dalej mamy wiersz składający się z dwóch jedynek. Każdy następny wiersz zaczynamy i kończymy liczbą 1, zaś pozostałe jego wyrazy obliczamy dodając dwa sąsiednie wyrazy poprzedniego wiersza zgodnie z regułą (18). Zauważmy, że z definicji (16) mamy natychmiast

$$(22) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

skąd wynika, że w trójkącie Pascala liczby jednakowo oddalone od końców wiersza są równe.

9. Liczby całkowite, wymierne, niewymierne. Niech q będzie dowolną liczbą naturalną. Liczbę $b \in \mathbb{R}$ nazywamy *pierwiastkiem stopnia q z liczby rzeczywistej a*, jeżeli $b^q = a$. Zapisujemy

$$b = \sqrt[q]{a}$$

[4] Blaise Pascal (1623 - 1662), matematyk i filozof francuski, współtwórca rachunku prawdopodobieństwa.

lub

$$b = \sqrt{a}$$

gdy $q = 2$. A oto przykłady:

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \qquad \text{bo} \qquad (-2)^3 = -8;$$

$$\sqrt[4]{625} = 5 \quad \text{oraz} \quad \sqrt[4]{625} = -5, \qquad \text{bo} \qquad 5^4 = (-5)^4 = 625.$$

Jeżeli obie liczby a, b są dodatnie, to mówimy, że b *jest pierwiastkiem arytmetycznym stopnia q z liczby a.* W dalszym ciągu przez $\sqrt[q]{a}$, względnie $\sqrt{a}$ (gdzie $a > 0$) będziemy zawsza rozumieli pierwiastek arytmetyczny.

Mówimy, że liczba $x \in \mathbb{R}$ jest *całkowita*, jeżeli albo $x = 0$ albo jedna z liczb x, $-x$ jest liczbą naturalną. Liczbami całkowitymi są więc na przykład liczby

$$0, \ -6, \ \sqrt{25}, \ 8, \ \sqrt[3]{-27}.$$

Zbiór wszystkich liczb całkowitych oznaczamy przez Z.

Liczbą wymierną nazywamy każdą liczbę rzeczywistą postaci $p \cdot \frac{1}{q}$ (co zapisujemy jako ułamek $\frac{p}{q}$), gdzie $p \in Z, q \in \mathbb{N}$. A oto przykłady liczb wymiernych:

$$-10, \ \frac{1}{17}, \ -\sqrt{\frac{50}{18}}, \ \sqrt[4]{16}, \ \frac{\sqrt{121}}{7}.$$

Zbiór wszystkich liczb wymiernych będziemy oznaczać przez Q.

Liczbę rzeczywistą, która nie jest wymierna, nazywamy *liczbą niewymierną*. Udowodnimy przez sprowadzenie do niedorzeczności, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Przypuśćmy bowiem, że

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

gdzie $p, \ q \in \mathbb{N}$ przy czym prawa strona jest ułamkiem nieskracalnym. Mnożąc obustronnie przez mianownik i podnosząc do kwadratu dostajemy

$$2q^2 = p^2,$$

skąd wynika, że prawa strona jest liczbą parzystą. Wobec tego p jest liczbą parzystą,[5] zatem czynnik 2 występuje po lewej stronie conajmniej dwa razy, skąd wynika że również

[5] Opieramy się tu na twierdzeniu o jednoznacznym rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze (por. W.Narkiewicz, Teoria liczb, rozdz.I§1 Warszawa 1990).

q jest liczbą parzystą. Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny.[6]

♡ ♡ ♡

Zadania.

1. Opierając się na aksjomatach określających zbiór $\mathbb{R}$ udowodnić że
   a.) liczba 1 określona w aksjomacie (7a) jest jedyna,
   b.) liczba odwrotna do danej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ jest jedyna,
   c.) $0 > -1$,
   d.) $(-1) \cdot (-1) = 1$,
   e.) jeżeli $x, y, z \in \mathbb{R},\ x > y$ oraz $z < 0$ to $xz < yz$ (jest to *reguła mnożenia nierówności przez liczbę ujemną*),
   f.) $x^2 > 0$ dla $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$,
   g.) jeżeli $x, y \in \mathbb{R},\ x > y$ to $-x < -y$,
   h.) jeżeli $x > 0$, to $-x < 0$,
   i.) jeżeli $x < 0$, to $-x > 0$.

2. Opierając się na aksjomatach określających zbiór $\mathbb{R}$ udowodnić, że iloczyn liczb rzeczywistych jest równy zeru wtedy i tylko wtedy gdy co najmniej jeden z czynników jest równy zeru.

3. Przyjmując oznaczenia $\max(x_1, \ldots, x_n) =$ największa z liczb $x_1, \ldots, x_n$, $\min(x_1, \ldots, x_n)$ $=$ najmniejsza z liczb $x_1, \ldots, x_n$ sprawdzić słuszność wzorów

$$\begin{aligned} \max(x,y) &= \frac{1}{2}(x + y + |x - y|),. \\ \min(x,y) &= \frac{1}{2}(x + y - |x - y|). \end{aligned}$$

4. Udowodnić, że nierówność

$$|x - a| \leq \varepsilon$$

jest równoważna podwójnej nierówności

$$a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon.$$

Sformułować analogiczne twierdzenie dla nierówności

$$|x - a| < \varepsilon.$$

[6]Niewymierność liczby $\sqrt{2}$ można również udowodnić opierając się na twierdzeniu z geometrii elementarnej mówiącym, że bok i przekątnia kwadratu są odcinkami niewspółmiernymi. Bliższe szczegóły można znaleźć w książce: J. Mioduszewski, Ciągłość, Warszawa 1996.

Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej obu tych nierówności.

5. Dowieść, że $|x+y| = |x-y|$ wtedy i tylko wtedy gdy $xy = 0$. Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej.

6. Dla jakich x spełnione są nierówności

$$|ax+b| < c$$

oraz

$$\frac{a|x|+1}{x} < 1.$$

Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej.

7. Dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b wyrażenie

$$A = \frac{a+b}{2}$$

nazywamy ich *średnią arytmetyczną*, wyrażenie

$$G = \sqrt{ab}$$

- *średnią geometryczną*, zaś wyrażenie

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

-*średnią harmoniczną*. Udowodnić, że

$$a \le H \le G \le A \le b$$

przy czym znak równości zachodzi tylko wtedy gdy $a = b$.

8. Załóżmy, że

$$a < b, \ \alpha \ge 0, \ \beta \ge 0,$$
$$\alpha + \beta = 1.$$

Wyrażenie

$$w = \alpha a + \beta b$$

nazywamy *kombinacją wypukłą* liczb a, b. Udowodnić, że

(i) $a \le w \le b$,

(ii) każda liczba $w \in [a, b]$ daje się przedstawić jednoznacznie jako kombinacja wypukła liczb a, b. Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej.

9. Załóżmy, że w punkcie x_j na osi liczbowej umieszczono masę m_j $(j = 1, \ldots, n)$. Wówczas punkt

$$X = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} m_j x_j \qquad (M = \sum_{j=1}^{n} m_j)$$

nazywamy *środkiem masy* układu punktów materialnych $(x_1, m_1), \ldots, (x_n, m_n)$. Sprawdzić, że punkt w określony w zadaniu 8 jest środkiem masy układu punktów materialnych (a, α), (b, β).

10. Które z następujących zbiorów są induktywne

(a) $A_1 = \{0, 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}+1, 3, \sqrt{2}+2, 4, \sqrt{2}+3, 5, \ldots\}$,

(b) $A_2 = \{-3, -2, 0, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$,

(c) zbiór wszystkich liczb nieparzystych?

11. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą tożsamości

$$\text{(a)} \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{(b)} \quad 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\text{(c)} \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

12. Udowodnić tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

13. Ktoś "udowodnił" następujące twierdzenie:
dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$T(n): \quad 2n < 2n - 1.$$

A oto "dowód" indukcyjny: Załóżmy, że słuszna jest nierówność $T(n)$. Dodając 2 do obu stron otrzymujemy

$$T(n+1): \quad 2(n+1) < 2(n+1) - 1.$$

Pokazać na przykładzie, że twierdzenie jest fałszywe. Na czym polega błąd w dowodzie indukcyjnym?

14. Udowodnić metodą indukcji, że dla $x \neq 1$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Jak można udowodnić tą równość bez pomocy indukcji?

15. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczby postaci

$$\text{a.)}\ 4^n - 1, \qquad \text{b.)}\ \frac{1}{2} \cdot 4^n + 1$$

są podzielne przez 3.

16. Opierając się na własnościach liczb rzeczywistych wynikających z aksjomatów określających zbiór $\mathbb{R}$ udowodnić metodą indukcji, że $n \geq 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

17. Korzystając z trójkąta Pascala napisać rozwinięcie dwumianu

$$\text{(i)}\ (a + b)^7 \qquad \text{ii)}\ (x + y)^{11}$$

Porównać ze wzorem dwumianowym Newtona.

18. Udowodnić, że

$$\binom{n}{k} \leq n^k$$

dla $0 \leq k \leq n,\ n \in \mathbb{N}$.

19. Opierając się na wzorze dwumianowym Newtona udowodnić, że

(i) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

(ii) $$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

20. Ile różnych podzbiorów (wliczając zbiór pusty) można wybrać ze zbioru n -elementowego?

Wskazówka. Wykorzystać interpretację kombinatoryczną współczynników dwumianowych (punkt 8) oraz zadanie 19.

21. Wykazać, że dla $a \geq 0$ nierówność Bernoulliego wynika ze wzoru dwumianowego Newtona.

22. Udowodnić, że nierówność Bernoulliego jest spełniona również dla $-2 \leq a < -1$. Pokazać na przykładzie, że nie jest ona na ogół prawdziwa dla $a < -2$.

Wskazówka. Zbadać, w jakich przedziałach osi rzeczywistej leżą liczby $b_n = (1+a)^n$ oraz $c_n = 1 + na$ jeżeli $n \geq 2$.

23. Udowodnić następującą modyfikację zasady indukcji zupełnej:
Niech D będzie induktywnym zbiorem liczb rzeczywistych spełniającym warunki

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad 0 \in D, \\ &\text{(ii)} \quad D \subset \{0\} \cup \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wówczas $D = \{0\} \cup \mathbb{N}$.
Wskazówka. Rozważyć zbiór $D_1 = D \setminus \{0\}$.
24. Jeszcze jedna modyfikacja zasady indukcji zupełnej:
Niech D będzie zbiorem liczb naturalnych spełniającym warunki
(i) *istnieje liczba naturalna k taka, że $k \in D$,*
(ii) *jeżeli $n \in D$, to $n+1 \in D$.*
Wówczas $\{n \in \mathbb{N} : n \geq k\} \subset D$.
Wskazówka. Dla dowodu rozważyć zbiór

$$D_1 = \{1, 2, \ldots, k-1\} \cup D.$$

25. Sprawdzić, dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{2}.$$

Wskazówka. Sprawdzić nierówność dla $n = 1, 2, 3$. Następnie zastosować zmodyfikowaną zasadę indukcji zupełnej opierając się na zadaniu 24.

26. Udowodnić tożsamość

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\dfrac{t}{2}} \tag{22}$$

(jakie wartości t należy wykluczyć?)
Wskazówka. Zastosować metodę indukcji, zaczynając od $n = 0$ (por. zadanie 23).

27. Podać i udowodnić analogiczny do (22) wzór dla sumy

$$\sin t + \sin 2t + \cdots + \sin nt.$$

28. Niech w będzie liczbą wymierną ($w \neq 0$) i niech x będzie liczbą niewymierną. Wykazać, że liczby $w + x$ oraz wx są niewymierne.

29. Udowodnić nierówność

$$\sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}} < \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$$

dla $a \geq 1$.

30. Niech

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{dla} \quad n > 2$$

(liczby a_n tworzą *ciąg Fibonacciego*[7]). Udowodnić metodą indukcji, że

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n} - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n} \right).$$

Wskazówka. Zacząć indukcję od $n = 2$ (por. zadanie 24).

[7]Leonardo z Pizy zwany czasami Fibonacci (ok. 1180 -1240), matematyk włoski, zajmował się arytmetyką i algebrą oraz zastosowaniami algebry do geometrii, wprowadził do Europy cyfry arabskie. Ciąg $\{a_n\}$ został podany przez Fibonacciego w książce "Liber abbaci" (wyd. 1202 r.) jako rozwiązanie następującego zagadnienia. Para królików daje raz w miesiącu przychówek w postaci dwojga królicząt (samca i samiczki), przy czym nowonarodzone króliki dają przychówek po upływie dwóch miesięcy. Zakładamy, że na początku była tylko jedna para królików oraz że króliki nie umierają. Wówczas a_n $(n = 1, 2, \dots)$ oznacza ilość par królików po $n - 1$ miesiącach.