

Ciągi nieskończone

§1. Definicja i podstawowe własności ciągów.



1. Ciąg nieskończony jako funkcja. Niech X, Y będą zbiorami liczb rzeczywistych. Mówimy, że na zbiorze X jest określona funkcja f o wartościach w zbiorze Y , jeżeli każdej liczbie $x \in X$ została przyporządkowana liczba $y = f(x) \in Y$. Zapisujemy

$$f : X \rightarrow Y.$$

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Ciągi będziemy oznaczali literami $a, b, c, \dots$ używając przy tym zapisu

$$a_n = a(n).$$

Liczbę a_n będziemy nazywali *n -tym wyrazem ciągu* zaś dla funkcji $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ będziemy używali oznaczenia $\{a_n\}$. Ciąg $\{a_n\}$ będziemy niekiedy zapisywali w postaci

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Zapis ten uwidacznia kilka początkowych wyrazów ciągu i bywa wygodny przy rozważaniu konkretnych przykładów.

Niekiedy będziemy rozważali ciągi, których n -ty wyraz jest określony nie dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ a tylko dla $n \geq k$, gdzie k jest pewną ustaloną liczbą naturalną. Czytelnik z łatwością zauważy, że wszystkie podane dalej definicje i twierdzenia stosują się również do takich ciągów. Dla przykładu - założmy, że w ciągu $\{b_n\}$ mamy

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0, \quad b_n \neq 0 \quad \text{dla} \quad n \geq 4$$

i niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem. Wówczas iloraz $\frac{a_n}{b_n}$ jest określony dla $n \geq 4$.

2. Granica ciągu. Liczbę rzeczywistą g nazywamy *granicą ciągu* $\{a_n\}$ jeżeli do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $N \in \mathbb{R}$ taką, że dla $n > N$ zachodzi nierówność

$$(1) \quad |a_n - g| < \varepsilon.$$

Nierówność (1) będziemy nazywali *nierównością epsilonową*. Może być ona zapisana w równoważny sposób jako nierówność podwójna

$$(2) \quad g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$$

(por. zadanie 4 rozdz.I §1). Z nierówności (2) wynika, że po odrzuceniu skończonej ilości początkowych wyrazów a_n ($n \leq N$) wszystkie pozostałe wyrazy ciągu $\{a_n\}$ leżą w przedziale $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ *jest zbieżny do granicy g* , zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

lub

$$a_n \rightarrow g.$$

Ciąg mający granicę nazywamy *ciągami zbieżnymi*.

Przykład 1. Rozważmy ciąg stały

$$a_n = c.$$

Nierówność (1) jest spełniona dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jeżeli przyjmiemy $g = c$. Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c.$$

□

Przykład 2. Niech

$$a_n = \frac{1}{n};$$

udowodnimy, że

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Nierówność epsilonowa przybiera postać

$$(4) \quad \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Aby znaleźć liczbę N , o której mowa w definicji, rozwiążemy nierówność (4) względem n . Otrzymujemy

$$(5) \quad n > \frac{1}{\varepsilon},$$

przy czym obie nierówności (4), (5) są równoważne. A zatem obierając

$$N = \frac{1}{\varepsilon}$$

widzimy, że dla $n > N$ zachodzi (4) co kończy dowód równości (3). $\square$

Obierzmy w szczególności

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{10}, \varepsilon_2 = \frac{1}{100}, \varepsilon_3 = \frac{7}{1000}.$$

Odpowiednie wartości liczby N wynoszą

$$N_1 = 10, N_2 = 100, N_3 = \frac{1000}{7}.$$

Widzimy więc, że zmniejszając liczbę ε (a więc zawężając przedział $\mathbb{P}_\varepsilon = (g - \varepsilon, g + \varepsilon)$) musimy zwiększyć ilość wyrazów ciągu, które należy odrzucić tak, aby wszystkie pozostałe wyrazy spełniały nierówność epsilonową czyli mieściły się w przedziale $\mathbb{P}_\varepsilon$.

Przykład 3. Niech

$$(6) \quad a_n = (-1)^{n+1},$$

a zatem $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = -1$ ($n \in \mathbb{N}$). Ciąg (6) można inaczej zapisać w postaci

$$1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

Okażemy, że ciąg ten nie posiada granicy. Dowód przeprowadzimy przez sprowadzenie do niedorzeczności. Przypuśćmy, że istnieje liczba g będąca granicą ciągu (6). Jeżeli $g < 1$, to obierając $\varepsilon = \frac{1-g}{2}$ widzimy, że żaden wyraz a_{2n-1} nie spełnia nierówności (2), a więc g nie może być granicą. Podobnie okazujemy, że nie może być granicą żadna liczba $g \geq 1$. $\square$

Przykład 4. Zakładając

$$|q| < 1$$

udowodnimy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Z założenia wynika, że $|q|^{-1} > 1$, wobec tego

$$|q|^{-1} = 1 + a$$

gdzie $a > 0$. Nierówność epsilonowa

$$|q^n| < \varepsilon$$

może być zapisana w postaci równoważnej jako

$$(7) \quad \frac{1}{\varepsilon} < |q|^{-n} = (1 + a)^n.$$

Z nierówności Bernoulliego mamy

$$(1 + a)^n \geq 1 + na,$$

zatem nierówność (7) będzie spełniona jeżeli

$$(8) \quad 1 + na > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Rozwiązując nierówność (8) względem n dostajemy

$$n > \frac{1 - \varepsilon}{a\varepsilon}.$$

Wobec tego przyjmując

$$N = \frac{1 - \varepsilon}{a\varepsilon}$$

widzimy, że dla $n > N$ zachodzi nierówność (7), co kończy dowód. $\square$

3. Ciąg ograniczony. Ciąg $\{a_n\}$ jest *ograniczony*, jeżeli istnieją liczby p, P takie, że

$$(9) \quad p \leq a_n \leq P$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ciąg jest więc ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy zbiór jego wyrazów jest ograniczony. Podaną definicję można również sformułować następująco: ciąg $\{a_n\}$ jest *ograniczony*, jeżeli istnieje taka liczba $M > 0$, że

$$(10) \quad |a_n| \leq M$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Dowód równoważności obu sformułowań pozostawiamy Czytelnikowi.

Twierdzenie 1. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

DOWÓD. Przyjmijmy $\varepsilon = 1$ w nierówności (2), wówczas istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że

$$g - 1 < a_n < g + 1$$

dla $n > k$. Oznaczając przez A największą z liczb $|a_1|, \dots, |a_k|$ mamy dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$

$$\min(-A, g - 1) \leq a_n \leq \max(A, g + 1)$$

czyli nierówność (9). $\square$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 1 nie jest prawdziwe. Ciąg podany w przykładzie 3 jest ograniczony ale nie jest zbieżny.

4. Działania na granicach.

Twierdzenie 2. *Założmy, że*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Wówczas

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ (twierdzenie o granicy sumy),
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$ (twierdzenie o granicy iloczynu),
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n + db_n) = ca + db$ dla dowolnych $c, d \in \mathbb{R}$.

DOWÓD. Niech ε będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią. Wobec założonej zbieżności ciągów, po zastąpieniu w definicji granicy liczby ε przez $\frac{\varepsilon}{2}$, mamy

$$(11) \quad a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $n > N_1$ oraz

$$(12) \quad b - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < b + \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $n > N_2$. Wobec tego dla $n > N = \max(N_1, N_2)$ zachodzą obie nierówności (11), (12). Dodając je stronami dostajemy

$$a + b - \varepsilon < a_n + b_n < a + b + \varepsilon$$

dla $n > N$, co daje (i). Aby udowodnić (ii) zauważmy, że

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$$

a zatem

$$(13) \quad |a_n b_n - ab| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b|$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Na mocy twierdzenia 1 ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, zatem

$$(14) \quad |b_n| \leq M$$

dla pewnego $M > 0$ i dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Z założenia zbieżności ciągu $\{a_n\}$ wynika, że do liczby ε można dobrać N_1 tak, by

$$(15) \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

dla $n > N_1$. Podobnie, zakładając $a \neq 0$, możemy wobec zbieżności ciągu $\{b_n\}$ dobrać do liczby ε liczbę N_2 tak, by

$$(16) \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2a}$$

dla $n > N_2$. Wykorzystując (13), (14), (15), (16) otrzymujemy dla $n > N = \max(N_1, N_2)$ nierówność

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon.$$

Jeżeli $a = 0$ to ta sama nierówność wynika z (13), (14), (15) dla $n > N_1$. Punkt (ii) jest więc udowodniony. Punkt (iii) otrzymujemy wykorzystując kolejno punkty (i), (ii) oraz Przykład 1. $\square$

Przyjmując $c = 1$, $d = -1$ w punkcie (iii) dostajemy

Wniosek (twierdzenie o granicy różnicy). *Jeżeli*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b.$$

Twierdzenie 3 (o granicy ilorazu). *Założmy, że*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0.$$

Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

DOWÓD. Wystarczy udowodnić twierdzenie w przypadku gdy $a_n = a = 1$ i zastosować następnie punkt (ii) twierdzenia 2. Przyjmując w definicji granicy $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ mamy

$$(17) \quad b - \frac{|b|}{2} < b_n < b + \frac{|b|}{2}$$

dla $n \geq k$, gdzie k jest pewną liczbą naturalną. Z nierówności (17) wynika, że dla takich n mamy

$$\frac{b}{2} < b_n$$

gdy $b > 0$ oraz

$$b_n < \frac{b}{2}$$

gdy $b < 0$. W obu przypadkach dla $n \geq k$

$$(18) \quad 0 < \frac{|b|}{2} < |b_n|.$$

Zatem iloraz $\frac{1}{b_n}$ jest określony dla takich n .

Obierzmy teraz dowolnie $\varepsilon > 0$. Mamy dla dowolnego $n \geq k$

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n b}$$

czyli, z uwagi na (18)

$$(19) \quad \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{2|b - b_n|}{b^2}.$$

Z założenia zbieżności ciągu $\{b_n\}$ wynika, że

$$(20) \quad |b - b_n| < \frac{b^2}{2} \varepsilon$$

dla $n > N$, gdzie N jest pewną liczbą dobraną do ε . Nierówności (19), (20) dają

$$|b - b_n| < \varepsilon$$

dla $n > \max(N, k)$, co kończy dowód. □

Twierdzenie o granicy iloczynu można wzmocnić, jeżeli jeden z czynników jest zbieżny do zera.

Twierdzenie 4. *Iloczyn ciągu ograniczonego przez ciąg zbieżny do zera jest zbieżny do zera.*

DOWÓD. Zakładamy, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony oraz że

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Z założenia istnieje liczba $M > 0$ taka, że

$$(22) \quad |a_n| < M$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech ε będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią. Korzystając z (21) i zastępując w definicji granicy ε przez $\frac{\varepsilon}{M}$ mamy

$$(23) \quad |b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

dla $n > N$, gdzie liczba N jest dobrana do ε . Mnożąc stronami (22) i (23) otrzymujemy

$$|a_n b_n| < \varepsilon$$

dla $n > N$, co kończy dowód. □

Przykład 5. Wiemy, że ciąg $\{\frac{1}{n}\}$ jest zbieżny do zera (por. Przykład 2). Ponadto ciąg $\{\cos(n\frac{\pi}{6})\}$ jest ograniczony, gdyż

$$|\cos(n\frac{\pi}{6})| \leq 1$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos(n\frac{\pi}{6}) = 0.$$

5. Ciągi rozbieżne do nieskończoności. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest *rozbieżny do nieskończoności*, jeżeli do dowolnej liczby P można dobrać liczbę N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$(24) \quad a_n > P.$$

Zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

lub

$$a_n \rightarrow \infty.$$

Podobnie, ciąg $\{b_n\}$ jest *rozbieżny do minus nieskończoności*, jeżeli do dowolnej liczby p można dobrać liczbę N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$(25) \quad b_n < p.$$

Zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$$

lub

$$b_n \rightarrow -\infty.$$

Jeżeli ciąg jest rozbieżny do ∞ lub $-\infty$, to mówimy że ma on *granice niewłaściwą*.

Przykład 6.

a.) Ciąg

$$a_n = n^2 + 1$$

jest rozbieżny do ∞ . Aby to wykazać, należy do dowolnie ustalonego P dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność (24). Mamy

$$a_n \geq n + 1 > P$$

o ile

$$n > P - 1.$$

Wystarczy więc przyjąć $N = P - 1$. □

b.) Ciąg

$$b_n = 2 - \sqrt{n}$$

jest rozbieżny do $-\infty$, mamy bowiem

$$\sqrt{n} > q$$

o ile $n > q^2$, zaś dla takich n zachodzi nierówność

$$b_n < 2 - q.$$

Obierając dowolnie p i przyjmując $q = 2 - p$ widzimy, że nierówność (25) jest spełniona jeżeli $n > N$ gdzie

$$N = (2 - p)^2.$$

□

c.) Wykazaliśmy, że ciąg rozważany w Przykładzie 3 nie ma granicy, nie jest więc zbieżny. Łatwo sprawdzić, że nie ma on również granicy niewłaściwej. Istotnie, przyjmując $P = 2$ widzimy, że żaden wyraz ciągu nie spełnia warunku (24). Podobnie obierając $p = -2$ widzimy, że nierówność (25) nie jest spełniona dla żadnego n . □

6. Przykłady obliczania granic ciągów. Pokażemy na przykładach, w jaki sposób można zastosować twierdzenia o działaniach na granicach do obliczania granicy ciągu.

Przykład 7. Niech

$$a_n = \frac{3n^2 + 5n + 1}{2 - n^2}.$$

Ciąg w liczniku

$$b_n = 3n^2 + 5n + 1$$

jest rozbieżny do ∞ , mamy bowiem dla dowolnie obranego P

$$b_n > 5n + 1 > P$$

o ile

$$n > N = \frac{P-1}{5}.$$

Natomiast ciąg w mianowniku

$$c_n = 2 - n^2$$

jest rozbieżny do $-\infty$, gdyż dla dowolnie obranego p zachodzi

$$c_n < 2 - n < p$$

jeżeli

$$n > N = 2 - p.$$

Nie możemy zatem stosować do ciągu $\{a_n\}$ twierdzenia o granicy ilorazu, gdyż ciągi w liczniku i w mianowniku nie są zbieżne. Możemy jednak przekształcić ułamek a_n , dzieląc licznik i mianownik przez n^2 , co daje

$$(26) \quad a_n = \frac{b'_n}{c'_n}$$

gdzie

$$b'_n = 3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2},$$

$$c'_n = \frac{2}{n^2} - 1.$$

Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

(por. Przykład 2), wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = 0$$

na podstawie twierdzenia o granicy iloczynu. Do ciągów $\{b'_n\}$, $\{c'_n\}$ możemy zastosować twierdzenie 2 otrzymując

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b'_n = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c'_n = -1.$$

Wobec tego do ciągu $\{a_n\}$ zapisanego w postaci (24) można zastosować twierdzenie 3, co daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3.$$

□

Przykład 8. Niech

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

Do ciągu $\{a_n\}$ nie można zastosować twierdzenia o granicy różnicy, gdyż oba ciągi

$$c_n = \sqrt{n+1}, \quad d_n = \sqrt{n-1}$$

są rozbieżne (dowód, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$$

pozostawiamy Czytelnikowi). Przekształcimy wyrażenie a_n mnożąc je i dzieląc przez $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$. Po wykorzystaniu wzoru skróconego mnożenia i redukcji otrzymujemy

$$(27) \quad a_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.$$

Korzystając z postaci (27) okażemy, że

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Ustalając dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$ musimy do niej dobrać N tak, aby dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$(29) \quad a_n < \varepsilon$$

(ponieważ $a_n > 0$, możemy opuścić znak wartości bezwzględnej). Nierówność (29) jest równoważna nierówności

$$(30) \quad \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Ponieważ

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} > \sqrt{n},$$

nierówność (30) jest spełniona dla $n > 4\varepsilon^{-2}$. Zatem wystarczy przyjąć $N = 4\varepsilon^{-2}$, co kończy dowód stwierdzenia (28). □

Przykład 9. Niech

$$a_n = \frac{b_n + c_n}{d_n},$$

gdzie

$$\begin{aligned}b_n &= 2n^2 + 1, \\c_n &= n \sin(n\frac{\pi}{4}), \\d_n &= 3n^2 + 1.\end{aligned}$$

Proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty.$$

O ciągu $\{c_n\}$ udowodnimy, że nie ma on w ogóle granicy, nawet niewłaściwej. Istotnie, jego kilka początkowych wyrazów ma postać

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, 2, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{5\sqrt{2}}{2}, -6, -\frac{7\sqrt{2}}{2}, 0, \dots$$

Jak łatwo sprawdzić, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$c_{4n} = 0, \quad c_{8n+2} = 8n + 2, \quad c_{8n+6} = -8n - 6.$$

Dowolnie obrana liczba $g \in \mathbb{R}$ nie może być granicą ciągu $\{c_n\}$, gdyż przyjmując $\varepsilon = 2$ widzimy, że wyrazy c_{8n+2} nie spełniają nierówności ε -owej (2), o ile $n \geq \frac{1}{8}g$. Ciąg $\{c_n\}$ nie ma również żadnej z dwóch granic niewłaściwych, gdyż nierówność (24) dla $P > 0$ nie może być spełniona przez wyrazy c_{8n+6} , natomiast nierówności (25) dla $p < 0$ nie mogą spełniać wyrazy c_{8n+2} . Ponieważ żaden z ciągów $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ nie jest zbieżny, do ciągu $\{a_n\}$ nie można stosować twierdzeń o działaniach na granicach. Możemy jednak przekształcić wyrażenie a_n dzieląc licznik i mianownik przez n^2 . Otrzymujemy

$$a_n = \frac{b'_n + c'_n}{d'_n}$$

gdzie

$$\begin{aligned}b'_n &= 2 + \frac{1}{n^2}, \\c'_n &= \frac{1}{n} \sin(n\frac{\pi}{4}), \\d'_n &= 3 + \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b'_n = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d'_n = 3$$

oraz na mocy twierdzenia 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c'_n = 0.$$

Korzystając z twierdzeń o granicy sumy i granicy ilorazu dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

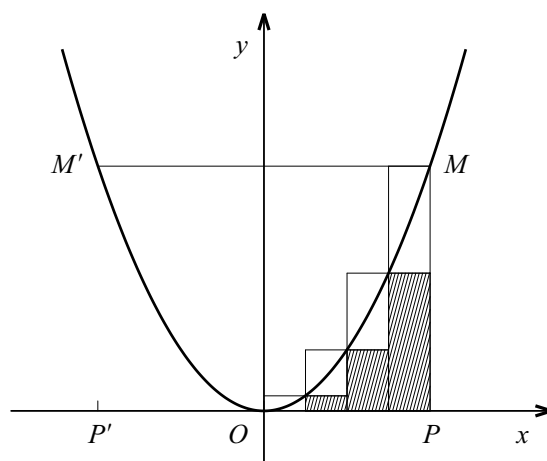
□

Przykład 10. Dana jest parabola o równaniu

$$y = ax^2 \quad (a > 0)$$

i na niej punkty $M = (x, y)$ oraz $M' = (-x, y)$. Oznaczmy przez P , P' rzuty prostopadłe na oś x -ów punktów M , M' odpowiednio. Znaleźć pole (rys. 1)

- figury OPM ograniczonej łukiem paraboli oraz odcinkami OP i PM ,
- figury $M'OM$ ograniczonej łukiem paraboli i odcinkiem MM' .



[rys. 1]

a.) Dzieląc odcinek OP na n równych części zbudujemy dwie figury R_n i Q_n złożone z prostokątów takie, że

$$R_n \subset OPM \subset Q_n$$

(na rysunku $n = 4$, figura R_n zakreskowana). Z rysunku widać, że różnica pól figury Q_n i R_n jest równa polu największego prostokąta, czyli

$$\frac{x}{n} \cdot y,$$

zatem dąży do zera przy $n \rightarrow \infty$. Ponieważ

$$|R_n| < |OPM| < |Q_n|$$

(pionowe kreski oznaczają pole figury), więc

$$(31) \quad |OPM| = \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |Q_n|$$

o ile jedna z tych granic istnieje. Obliczmy drugą z nich. Pole j -tego prostokąta o podstawie $[\frac{j-1}{n}x, \frac{j}{n}x]$ i wysokości $y_j = a(\frac{j}{n}x)^2$ ($j = 1, 2, \dots, n$) wynosi

$$\frac{x}{n}y_j = a\frac{x^3}{n^3}j^2$$

zatem

$$|Q_n| = a\frac{x^3}{n^3}(1 + 4 + \dots + n^2)$$

czyli (por. zadanie 10 b.) rozdz. I §1)

$$|Q_n| = \frac{ax^3}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

Po wykonaniu dzielenia

$$|Q_n| = \frac{ax^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

co po przejściu do granicy daje zgodnie z (31)

$$|OPM| = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}.$$

b.) Ze względu na symetrię figury OPM i $OP'M'$ mają równe pola. Pole prostokąta $P'PMM'$ wynosi $2xy$, zatem

$$|M'OM| = 2\left(xy - \frac{xy}{3}\right) = \frac{4}{3}xy.$$

Przy okazji zauważmy, że

$$|M'OM| = \frac{2}{3}|P'PMM'|.$$

Wynik ten był znany Archimedesowi. □

7. Przechodzenie do granicy w nierównościach.

Twierdzenie 5. *Jeżeli*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

oraz dla $n \geq k$ (gdzie k jest pewną liczbą naturalną) zachodzi nierówność

$$(32) \quad a_n \leq b_n$$

to

$$(33) \quad a \leq b.$$

DOWÓD. Przypuśćmy, że zachodzi nierówność przeciwna do (33)

$$b < a$$

i przyjmijmy w definicji granicy $\varepsilon = \frac{1}{4}(a - b)$. Z założenia zbieżności obu ciągów wynika istnienie liczby N (dobrej do ε) takiej, że dla $n > \max(k, N)$ zachodzą nierówności

$$b_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < a_n$$

co przeczy nierówności (32). □

Przykład 11. Niech

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Dla $n > 1$ ciągi te spełniają nierówność

$$a_n < b_n$$

ale mają tę samą granicę zero. □

Przykład ten wskazuje, że w twierdzeniu 5 nie można w nierównościach (32), (33) zastąpić znaku $\leq$ przez $<$. *Przy przejściu granicznym z ostrych nierówności otrzymuje się na ogół słabe.*

Bardzo pożyteczne przy obliczaniu granic jest

Twierdzenie 6 (o trzech ciągach). *Założmy, że dla $n \geq k$ (gdzie k jest pewną liczbą naturalną) zachodzi nierówność podwójna*

$$(34) \quad a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g.$$

Wówczas ciąg $\{b_n\}$ jest zbieżny i zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$$

Twierdzenie to można zapisać w postaci schematu

$$\begin{array}{ccccc} a_n & \leq & b_n & \leq & c_n \\ & \searrow & \Downarrow & \swarrow & \\ & & g & & \end{array}$$

Strzałki pojedyncze oznaczają założenia, strzałka podwójna oznacza tezę twierdzenia.

DOWÓD. Niech ε będzie dowolnie obraną liczbą dodatnią. Stosując do ciągów $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ nierówność (2) mamy

$$g - \varepsilon < a_n$$

dla $n > N_1$ oraz

$$c_n < g + \varepsilon$$

dla $n > N_2$, przy czym liczby N_1, N_2 są dobrane do ε . Wobec nierówności (34) mamy zatem dla $n > \max(k, N_1, N_2)$

$$g - \varepsilon < b_n < g + \varepsilon$$

a to oznacza, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$$

□

Przykład 12. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$(35) \quad 1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Opierając się na twierdzeniu o trzech ciągach wnioskujemy z (35), że (por. przykład 2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

□

Przykład 13. Dla $a > 0$ mamy

$$(36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Dla dowodu założmy, że $a \geq 1$. Wówczas również $\sqrt[n]{a} \geq 1$ a więc

$$(37) \quad \sqrt[n]{a} = 1 + d_n$$

gdzie $d_n \geq 0$. Podnosząc obie strony do n -tej potęgi i wykorzystując nierówność Bernoulliego (rozdz. I §2) otrzymujemy

$$a = (1 + d_n)^n \geq 1 + nd_n$$

skąd wynika, że

$$(38) \quad 0 \leq d_n \leq \frac{1}{n}(a - 1)$$

Do nierówności (38) możemy zastosować twierdzenie o trzech ciągach, które daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

a stąd wobec (37) wynika (36). Jeżeli $a < 1$ to mamy

$$(39) \quad \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$$

gdzie $b = \frac{1}{a} > 1$. Ponieważ wiemy już, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1,$$

równość (36) dostajemy z (39) przez zastosowanie twierdzenia o granicy ilorazu. $\square$

Przykład 14. Okażemy, że

$$(40) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie mamy $\sqrt[n]{n} \geq 1$, a zatem

$$\sqrt[n]{n} = 1 + d_n,$$

gdzie $d_n \geq 0$. Podnosząc obie strony do n -tej potęgi dostajemy

$$n = (1 + d_n)^n$$

a stąd, po rozwinięciu prawej strony według wzoru dwumianowego Newtona

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} d_n^2.$$

Wobec tego

$$(41) \quad 0 \leq d_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Przy dowolnie obranym $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$$

o ile

$$n > N = 2\varepsilon^{-2} + 1.$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$$

i stosując do nierówności (41) twierdzenie o trzech ciągach dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

skąd wynika (40). □

♡ ♡ ♡

8. Prosta rozszerzona $\mathbb{R}_\infty$ i definicja otoczeniowa granicy ciągu. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie ustalonym punktem osi liczbowej. Każdy przedział otwarty (a, b) zawierający x_0 będziemy nazywali *otoczeniem punktu x_0* . W szczególności przedział

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

o środku w x_0 i długości 2ε nazwiemy *otoczeniem epsilonowym punktu x_0* . Definicja granicy ciągu podana na początku tego paragrafu może być sformułowana w języku "geometrycznym" następująco:

Liczba g jest *granica ciągu $\{a_n\}$* , jeżeli do każdego otoczenia epsilonowego $U_\varepsilon(g)$ punktu g można dobrać N w taki sposób, by

$$a_n \in U_\varepsilon(g)$$

dla $n > N$.

Oczywiście każde otoczenie $U(g)$ punktu g zawiera w sobie pewne otoczenie epsilonowe. Wobec tego definicję granicy można sformułować w następujący, równoważny sposób:

Liczba g jest *granica ciągu $\{a_n\}$* , jeżeli do każdego otoczenia $U(g)$ można dobrać liczbę N tak, by

$$a_n \in U(g)$$

dla $n > N$.

Założmy teraz, że oś liczbową $\mathbb{R}$ została uzupełniona dwoma elementami niewłaściwymi ∞ oraz $-\infty$. Rozszerzymy przy tym relację $<$ określoną w zbiorze liczb rzeczywistych przyjmując

$$-\infty < x < \infty$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Otrzymujemy w ten sposób *oś liczbową rozszerzoną* (inaczej: *prostą rozszerzoną*) którą oznaczamy $\mathbb{R}_\infty$. Zatem

$$\mathbb{R}_\infty = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

(możemy sobie wyobrażać, że "punkty" ∞ oraz $-\infty$ zostały doczepione na obu "końcach" prostej $\mathbb{R}$). Otoczeniem $U(\infty)$ punktu ∞ nazwiemy każdy przedział (P, ∞) , podobnie przez otoczenie $U(-\infty)$ punktu $-\infty$ będziemy rozumieli każdy przedział $(-\infty, p)$. Podaną poprzednio definicję granicy niewłaściwej możemy teraz następująco sformułować:

Ciąg $\{a_n\}$ jest *rozbieżny do ∞* , jeżeli do każdego otoczenia $U(\infty)$ można dobrać N tak, by

$$a_n \in U(\infty)$$

dla $n > N$.

Ciąg $\{b_n\}$ jest *rozbieżny do $-\infty$* , jeżeli do każdego otoczenia $U(-\infty)$ można dobrać N tak, by

$$b_n \in U(-\infty)$$

dla $n > N$.

Korzystając z pojęcia osi liczbowej rozszerzonej możemy teraz podać jednolitą definicję granicy:

Ciąg $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ ma granicę $g \in \mathbb{R}_\infty$ (a więc być może niewłaściwą), jeżeli do każdego otoczenia $U(g)$ można dobrać liczbę N tak, by

$$a_n \in U(g)$$

dla $n > N$.

Zadania.

1. Udowodnić, że ciąg nieskończony może mieć co najwyżej jedną granicę (właściwą lub niewłaściwą).

Wskazówka. Zaprzeczając tezę i obierając odpowiednio ε w nierówności (1) dojść do sprzeczności.

2. Znaleźć liczbę N taką, że dla $n > N$ zachodzi nierówność (1), jeżeli

$$\text{a.) } a_n = \frac{2n}{3n+1}, \quad g = \frac{2}{3}, \quad \text{b.) } a_n = 3^{-2n}, \quad g = 0$$

przyjmując

$$\varepsilon = 0,1; \quad \varepsilon = 0,01; \quad \varepsilon = 500^{-1}.$$

Napisać pięć pierwszych wyrazów każdego z tych ciągów.

3. Opierając się na definicji granicy ciągu udowodnić, że

$$\text{a.) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{5n+1} = \frac{1}{5}, \quad \text{b.) } \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{-n^2+1} = 0.$$

4. Zakładając

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$$

udowodnić, że ciąg

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

(zwany *przeplatanką* ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$) jest również zbieżny do granicy g .

5. Udowodnić, że ciąg

$$a_n = n^4 - 2n^2 - 3n + 2$$

jest rozbieżny do $+\infty$.

6. Niech

$$a_n = (n^2 - 4n - 5)^{-1}.$$

Zbadać

- a.) dla jakich n określony jest n -ty wyraz ciągu,
- b.) dla jakich n zachodzi nierówność

$$(42) \quad a_n > 0.$$

Obliczyć granicę ciągu $\{a_n\}$. Czy nierówność (42) zachowuje się po przejściu do granicy?

7. Udowodnić, że następujące ciągi są zbieżne do granicy g :

$$\begin{aligned} \text{a.) } a_n &= \frac{(-1)^n}{n+1}, & g &= 0, \\ \text{b.) } b_n &= \frac{(-1)^n + n + 3}{n+2}, & g &= 1, \\ \text{c.) } c_n &= (-1)^{n^2+2}(n^2+5)^{-1}, & g &= 0, \\ \text{d.) } d_n &= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}, & g &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wskazówka. Przy badaniu ciągu $\{d_n\}$ wykorzystać zadanie 10 rozdz. I §1.

8. Zakładając, że $0 < a < b$ określimy ciągi

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a_1 &= a, \quad a_2 = b, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \quad \text{dla } n > 1, \\ \text{(ii)} \quad g_1 &= a, \quad g_2 = b, \quad g_{n+1} = \sqrt{g_n \cdot g_{n-1}} \quad \text{dla } n > 1, \\ \text{(iii)} \quad h_1 &= a, \quad h_2 = b, \quad h_{n+1} = \frac{2h_n \cdot h_{n-1}}{h_n + h_{n-1}} \quad \text{dla } n > 1. \end{aligned}$$

Udowodnić, że każdy z tych ciągów jest ograniczony i podać najmniejszy przedział, w którym leżą jego wyrazy.

Wskazówka. Skorzystać z zadania 7 rozdz. I §1.

9. Zakładając, że

$$0 < a < b, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

określimy ciąg $\{w_n\}$ następująco

$$\begin{aligned} w_1 &= a, \quad w_2 = b, \\ w_{n+1} &= \alpha w_{n-1} + \beta w_n \quad \text{dla } n > 1. \end{aligned}$$

Udowodnić, że ciąg ten jest ograniczony i podać najmniejszy przedział w którym leżą jego wyrazy począwszy od $n = 3$.

Wskazówka. Skorzystać z zadania 8 rozdz. I §1. Rozważyć oddzielnie przypadek, gdy jedna z liczb α, β jest zerem.

10. Udowodnić, że

$$\begin{aligned} \text{a.) } & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin(n\sqrt{2}\pi) = 0 \\ \text{b.) } & \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n^2\pi)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0. \end{aligned}$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 4.

11. Niech

$$a_{nm} = [\cos(n!\pi x)]^{2m}.$$

Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm} \right) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych.} \end{cases}$$

12. Znaleźć granice ciągów

$$a_n = \sqrt[n]{1+5^n}, \quad b_n = \sqrt[n]{2^{-n}+3^{-n}},$$

$$c_n = \sqrt[n]{2 + \sin \frac{n\pi}{2}}.$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenie o trzech ciągach i przykład 13.

13. Okazać, że następujące ciągi nie mają granicy, nawet niewłaściwej:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 + (-1)^n}{n} + [1 - (-1)^n]n, \\ b_n &= (-1)^n n^2, \quad c_n = \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

14. Udowodnić twierdzenie:

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do nieskończoności, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

15. Udowodnić, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do ∞ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = \begin{cases} \infty & \text{dla } c > 0, \\ -\infty & \text{dla } c < 0. \end{cases}$$

16. Zbadać zachowanie się ciągu

$$a_n = q^n$$

w zależności od liczby q , zakładając że $|q| \geq 1$.

17. Znaleźć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{2n} + a^{4n}}.$$

Wskazówka. Rozróżnić przypadki $0 < a < 1$ oraz $a \geq 1$ i zastosować twierdzenie o trzech ciągach oraz przykład 13.

18. Niech

$$A = \max(a_1, \dots, a_p)$$

gdzie a_j ($j = 1, \dots, p$) są liczbami dodatnimi. Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n} = A.$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenie o trzech ciągach i wykorzystać przykład 13.

19. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{1^k + 2^k + \dots + n^k}$$

gdzie k jest daną liczbą całkowitą.

Wskazówka. Rozróżnić przypadki $k > 0, k < 0, k = 0$. Wykorzystać twierdzenie o trzech ciągach i przykład 14.

20. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{c_n}}$$

gdzie

$$c_n = (-1)^n.$$

Wskazówka - jak w zadaniu 18.

21. Niech

$$w_n = \frac{p_n}{q_n}$$

będzie ułamkiem nieskracalnym (p_n całkowite, q_n naturalne). Zakładamy, że ciąg $\{w_n\}$ jest zbieżny do liczby niewymiernej. Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} = 0.$$

Wskazówka. Z zaprzeczenia tezy wywnioskować, że w ciągu $\{w_n\}$ występuje nieskończenie wiele wyrazów jednakowych.

22. Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Wskazówka. Posługując się metodą indukcji udowodnić najpierw nierówność

$$\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

23. Udowodnić, że jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

gdzie a jest liczbą dodatnią, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

Wskazówka. Udowodnić najpierw, że ciąg $\{\sqrt{a_n}\}$ jest dobrze określony dla dostatecznie dużych n . Następnie odpowiednio przekształcić i oszacować różnicę $\sqrt{a_n} - \sqrt{a}$.

24. Znaleźć granice ciągów

$$a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, \quad c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Wskazówka. Przekształcić odpowiednio wyrażenia a_n , b_n , c_n i zastosować zadanie 23.

25. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenie o trzech ciągach, wykorzystując zadanie 24.

26. Obliczyć granicę ciągu

$$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}.$$

Wskazówka. Po odpowiednim przekształceniu wyrażenia a_n wykorzystać zadanie 23.

27. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = 10^{10/n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})\sqrt{10n}.$$

Wskazówka. Po odpowiednim przekształceniu wyrażenia a_n wykorzystać przykład 13 i zadanie 23.

28. Dla jakich wartości parametru a ciąg

$$u_n = \frac{n^a}{\sqrt[3]{n^{a^2} + n^{a+1} + n^2}}$$

jest zbieżny? W przypadku zbieżności podać granicę.

Wskazówka. Niech

$$A(a) = \max\left(\frac{2}{3}, \frac{a+1}{3}, \frac{a^2}{3}\right)$$

(por. zadanie 3 rozdz. I §1). Zacząć od sporządzenia wykresu funkcji

$$y = A(a),$$

następnie oszacować u_n z góry i z dołu.