§2. Dalsze własności ciągów.

♡ ♡ ♡

1. Ciągi monotoniczne i ciągi ograniczone. Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy

rosnącym, jeżeli $a_n \geq a_k$ dla $n > k$;

ściśle rosnącym, jeżeli $a_n > a_k$ dla $n > k$;

malejącym, jeżeli $a_n \leq a_k$ dla $n > k$;

ściśle malejącym, jeżeli $a_n < a_k$ dla $n > k$.

Ciągi (ściśle) rosnące i malejące obejmujemy wspólną nazwą ciągów *(ściśle) monotonicznych.*

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy

ograniczonym z góry, jeżeli istnieje liczba P taka, że

$$a_n \leq P$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$;

ograniczonym z dołu, jeżeli istnieje liczba p taka, że

$$a_n \geq p$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Ciąg jest *ograniczony* (por. §1) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony z góry i z dołu. Liczbę P nazywamy *ograniczeniem górnym* a liczbę p *ograniczeniem dolnym* ciągu $\{a_n\}$.

2. Zstępujące ciągi przedziałów. Niech $\{\mathbb{P}_n\}$ będzie ciągiem przedziałów na osi liczbowej. Mówimy, że ciąg $\{\mathbb{P}_n\}$ jest ciągiem *zstępującym*, jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_{n+1} \subset \mathbb{P}_n.$$

Oznaczając przez a_n, b_n końce przedziału $\mathbb{P}_n$ $(a_n \leq b_n)$ widzimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący, zaś ciąg $\{b_n\}$ jest malejący.

Twierdzenie 1 (Ascoliego). [1] *Każdy ciąg zstępujący przedziałów domkniętych ma niepustą część wspólną.*

DOWÓD. Należy okazać, że istnieje punkt na osi liczbowej należący do każdego przedziału $\mathbb{P}_n$.

Zauważmy najpierw, że przy dowolnie ustalonym $m \in \mathbb{N}$ zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$ nierówność

$$a_n \leq b_m. \tag{1}$$

[1] Giulio Ascoli (1843 -1896), matematyk włoski.

Mamy bowiem dla $n > m$

$$\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_m,$$

a więc

$$a_n \leq b_n \leq b_m$$

ponieważ ciąg $\{b_n\}$ jest malejący. Natomiast dla $n = 1, 2, \ldots, m$ zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m \leq b_m$$

ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący.

Niech teraz

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Z nierówności (1) wynika, że ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem ograniczonym z góry (na przykład przez liczbę b_1). Wobec tego zbiór A jest ograniczony z góry, zatem na mocy aksjomatu kresu ma kres górny

$$x_0 = \sup A.$$

Zgodnie z definicją kresu górnego liczba x_0 jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A, stąd

$$a_n \leq x_0$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz, wobec (1)

$$x_0 \leq b_m$$

dla dowolnie obranego $m \in \mathbb{N}$. Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq x_0 \leq b_n.$$

Ponieważ z założenia $\mathbb{P}_n$ jest przedziałem domkniętym, ostatnia nierówność oznacza, że $x_0 \in \mathbb{P}_n$. □

Uwaga. Twierdzenie 1 przestaje być prawdziwe, jeżeli opuścimy założenie że przedziały $\mathbb{P}_n$ są domknięte. Niech bowiem

$$\mathbb{P}_n = (0, \frac{1}{n})$$

wówczas $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, a więc

$$\mathbb{P}_{n+1} \subset \mathbb{P}_n$$

ale nie istnieje liczba $x \in \mathbb{R}$ spełniająca nierówność

$$0 < x < \frac{1}{n}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

3. Ciągi wybrane, podciągi i twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych, zaś $\{n_k\}$ ciągiem liczb naturalnych rozbieżnym do nieskończoności przy $k \to \infty$. Wówczas ciąg

$$(2) \qquad b_k = a_{n_k} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

nazywamy *ciągiem wybranym z ciągu* $\{a_n\}$.

Przykład 1. Niech $\{n_k\}$ ma postać

$$4,\ 2,\ 8,\ 6,\ 12,\ 10, \ldots$$

czyli

$$n_k = \begin{cases} 2k+2 & \text{gdy} \quad k = 2r-1, \\ 2k-2 & \text{gdy} \quad k = 2r, \end{cases}$$

gdzie $r \in \mathbb{N}$. Obierając dowolnie liczbę P mamy

$$n_k > P$$

dla $k > \frac{1}{2}P + 1$, zatem $n_k \to \infty$ przy $k \to \infty$ i wobec tego ciąg $\{b_k\}$ określony wzorem (2) jest ciągiem wybranym z ciągu $\{a_n\}$. Ma on postać

$$a_4,\ a_2,\ a_8,\ a_6,\ a_{12},\ a_{10}, \ldots$$

(jak łatwo zauważyć, ciąg $\{b_k\}$ powstaje w następujący sposób: z ciągu $\{a_n\}$ wybieramy tylko wyrazy o numerach parzystych, łączymy je parami i przestawiamy kolejność w obrębie każdej pary). □

Twierdzenie 2. *Jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

gdzie

$$-\infty \leq g \leq \infty,$$

to każdy ciąg wybrany z ciągu $\{a_n\}$ *ma tą samą granicę* g.

DOWÓD. Załóżmy, że $g \in \mathbb{R}$, wówczas do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, że dla $n > N$ zachodzi nierówność epsilonowa

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Ponieważ $n_k \to \infty$, do liczby N można z kolei dobrać K tak, by dla $k > K$ zachodziła nierówność

$$n_k > N.$$

Zatem

$$|b_k - g| < \varepsilon$$

dla $k > K$, przy czym liczba K została dobrana do ε - a to oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} b_k = g.$$

Dowód twierdzenia w przypadku granicy niewłaściwej $g = \infty$ lub $g = -\infty$ pozostawiamy Czytelnikowi. □

Udowodnimy teraz

Lemat. *Jeżeli* $\{n_k\}$ *jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to*

$$n_k \geq k \tag{3}$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

DOWÓD przeprowadzimy metodą indukcji. Dla $k = 1$ nierówność (3) jest oczywista. Zakładając, że jest prawdziwa dla pewnego k, dostajemy

$$n_{k+1} > n_k \geq k$$

czyli

$$n_{k+1} \geq k + 1,$$

co kończy dowód indukcyjny. □

Jeżeli ciąg $\{n_k\}$ jest ściśle rosnący, to ciąg (2) nazywamy *podciągiem ciągu* $\{a_n\}$. Z udowodnionego lematu wynika, że podciąg jest szczególnym przypadkiem ciągu wybranego. Jako wniosek z twierdzenia 2 dostajemy

Twierdzenie 3 (o podciągach). *Jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

gdzie

$$-\infty \leq g \leq \infty,$$

to każdy podciąg ciągu $\{a_n\}$ *ma tą samą granicę* g. □

Przykład 2. Rozważmy ciąg

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Przyjmując

$$n_k = 2k$$

dostajemy podciąg ciągu $\{a_n\}$ złożony z jego wyrazów o numerze parzystym. Ma on postać

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots, \frac{1}{4^k}, \ldots.$$

Przyjmując natomiast

$$n_k = 2k - 1$$

otrzymujemy podciąg ciągu $\{a_n\}$ złożony z jego wyrazów o numerze nieparzystym

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{32}, \ldots, -\frac{1}{2^{2k-1}}, \ldots.$$

Twierdzenie o podciągach daje wygodną metodę dowodzenia, że dany ciąg nie ma granicy. Wystarczy w tym celu wybrać z niego dwa podciągi zbieżne do różnych granic.

Przykład 3. Wykazaliśmy, (por. Przykład 3 §1) że ciąg

$$a_n = (-1)^{n+1}$$

nie ma granicy. Udowodnimy to ponownie, opierając się na twierdzeniu 2. Mamy dla $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2n-1} = 1, \quad a_{2n} = -1$$

zatem

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = -1.$$

Z ciągu $\{a_n\}$ wybraliśmy dwa podciągi (podciąg wyrazów nieparzystych i podciąg wyrazów parzystych) zbieżne do różnych granic. Wobec tego ciąg $\{a_n\}$ nie ma granicy, nawet niewłaściwej. □

Przykład 4. Niech dla $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2n} = n, \quad a_{2n-1} = 1.$$

Ciąg $\{a_n\}$ wygląda następująco

$$1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, \ldots.$$

Podciąg złożony z wyrazów parzystych jest rozbieżny do ∞, natomiast podciąg wyrazów nieparzystych ma granicę 1 jako ciąg stały. Zatem ciąg $\{a_n\}$ nie ma granicy. □

Przykład 5. Rozważmy ciąg $\{a_n\}$ określony następująco

$$a_{2n-1} = -1 + \frac{1}{n}, \quad a_{2n} = 1 - \frac{1}{n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg ten jest ograniczony gdyż dla każdego naturalnego n mamy

$$-1 \leq a_n \leq 1.$$

Możemy z niego wybrać dwa podciągi zbieżne, bowiem

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$$

(ponieważ granice te są różne, ciąg $\{a_n\}$ nie może być zbieżny). Podobnie ciąg podany w Przykładzie 3 jest ograniczony i można z niego wybrać dwa podciągi zbieżne $\{a_{2n-1}\}$ oraz $\{a_{2n}\}$. □

Zaobserwowane w Przykładzie 5 fakty nie są przypadkowe, zachodzi bowiem

Twierdzenie 4 (Bolzano[2] -Weierstrassa)[3] *Z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.*

DOWÓD. Z założenia istnieją liczby p, P takie, że wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$ leżą w przedziale $\mathbb{P}_0 = [p, P]$. Jeżeli podzielimy przedział $\mathbb{P}_0$ na połowy, to przynajmniej jedna z nich zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Niech $\mathbb{P}_1$ będzie połową o tej własności i niech n_1 oznacza najmniejszą z liczb k takich, że $a_k \in \mathbb{P}_1$. Podzielmy następnie przedział $\mathbb{P}_1$ na połowy, przez $\mathbb{P}_2$ oznaczmy tę połowę, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu i wybierzmy liczbę naturalną n_2 jako najmniejszą z liczb $k > n_1$ takich, że $a_k \in \mathbb{P}_2$. Powtarzając opisane postępowanie otrzymujemy ciąg zstępujący przedziałów domkniętych $\{\mathbb{P}_k\}$ i ciąg rosnący liczb naturalnych $\{n_k\}$ takich, że

$$a_{n_k} \in \mathbb{P}_k, \tag{4}$$

przy czym długość przedziału $\mathbb{P}_k$ wynosi $\dfrac{a}{2^k}$, gdzie $a = P - p$. Na mocy twierdzenia Ascoliego istnieje liczba x_0 taka, że

$$x_0 \in \mathbb{P}_k \tag{5}$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Z warunków (4), (5) wynika nierówność

$$|a_{n_k} - x_0| \le \frac{a}{2^k}. \tag{6}$$

Ponieważ (por. lemat w punkcie 3)

$$2^k \ge k \tag{7}$$

więc z (6), (7) wynika nierówność ε-owa

$$|a_{n_k} - x_0| < \varepsilon$$

dla $k > N = \dfrac{a}{\varepsilon}$. Zatem

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x_0,$$

co kończy dowód. □

4. Twierdzenie o ciągu monotonicznym. Opierając się na twierdzeniu Bolzano-Weierstrassa udowodnimy

---

[2]Bernard Bolzano (1781 - 1848), urodzony w Pradze, w 1804 r. został profesorem matematyki i nauczycielem religii na Uniwersytecie Karola w Pradze. Władze austriackie usunęły go z katedry z przyczyn światopoglądowych, zabraniając jednocześnie publikowania jego prac. Część tych prac wydano dopiero w XX wieku. Zajmował się analizą matematyczną i logiką. Był prekursorem wielu twierdzeń analizy matematycznej, odkrywanych później przez innych matematyków.

[3]Karol Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897), urodzony w Ostenfeld (Westfalia). Po nieudanych studiach prawniczych rozpoczął w 1839 r. studia matematyczne w Akademii w Münster, po ich ukończeniu pracował jako nauczyciel gimnazjalny. Równocześnie zajmował się matematyką, co doprowadziło go do uzyskania stopnia doktora w 1854 r. W latach 1856 - 1890 był profesorem na Uniwersytecie Przemysłowym w Berlinie, w 1856 r. został członkiem Berlińskiej Akademii Nauk. Zajmował się teorią funkcji zmiennej rzeczywistej i zmiennej zespolonej oraz teorią szeregów nieskończonych. Jego wykłady przyciągały licznych słuchaczy i często zawierały nigdy później nie publikowane przez niego nowe wyniki.

Twierdzenie 5. *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

DOWÓD. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem spełniającym założenia twierdzenia. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że jest on rosnący (dla ciągu malejącego dowód oparty jest na takim samym rozumowaniu). Na mocy twierdzenia 3 istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny do pewnej granicy $g \in \mathbb{R}$. Wobec tego przy dowolnie ustalonym $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna l taka, że dla $k \geq l$ zachodzi nierówność

$$g - \varepsilon < a_{n_k} < g + \varepsilon. \tag{8}$$

Ponieważ $n_k \geq k$ (por. lemat w punkcie 3), więc

$$a_{n_k} \geq a_k$$

zatem z nierówności (8) wynika, że

$$a_k < g + \varepsilon \tag{9}$$

dla $k \geq l$. Oprócz tego dla $k \geq n_l$ mamy

$$a_k \geq a_{n_l}$$

a więc na mocy (8)

$$g - \varepsilon < a_k. \tag{10}$$

Obie nierówności (9), (10) zachodzą dla

$$k \geq \max(l, n_l) = n_l,$$

a to oznacza, że

$$\lim_{k\to\infty} a_k = g.$$

□

5. Liczba e. Twierdzenie 4 daje metodę dowodzenia zbieżności ciągu. Zastosujemy ją do ciągu

$$d_n = (1 + \frac{1}{n})^n.$$

(i) Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona dostajemy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \tag{11}$$

oraz

(12)
$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \\ &> \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}. \end{aligned}$$

Okażemy, że

(13)
$$d_{n+1} \geq d_n.$$

Wobec (11), (12) wystarczy w tym celu okazać, że nierówność

(14)
$$\binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \geq \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

zachodzi dla $0 \leq k \leq n$. Dla $k = 0, 1$ obie strony nierówności (14) są równe 1. Dla $2 \leq k \leq n$ mamy

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k},$$

czyli po wykonaniu dzielenia

(15)
$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}),$$

natomiast po podobnym przekształceniu

(16)
$$\binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n+1}).$$

Ponieważ dla $j = 1, 2, \ldots, k-1$ mamy

$$1 - \frac{j}{n} < 1 - \frac{j}{n+1}$$

więc z (15), (16) wynika (14). Udowodniona nierówność (13) oznacza, że ciąg $\{d_n\}$ jest *rosnący.*

(ii) Aby udowodnić, że ciąg $\{d_n\}$ jest *ograniczony* wystarczy okazać, że jest on ograniczony z góry (ograniczeniem dolnym jest pierwszy wyraz ciągu d_1). Oprzemy się na znanym z kursu szkolnego wzorze

(17)
$$1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad (q \neq 1),$$

który sprawdzamy łatwo mnożąc obie strony przez mianownik. Zgodnie z (11), (15) mamy

$$d_n \le 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}},$$

gdyż

$$k! \ge 2^{k-1}$$

dla $k \ge 2$. Wobec tego stosując równość (17) dla $q = \frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$d_n \le 3,$$

co kończy punkt (ii).

Okazaliśmy, że ciąg $\{d_n\}$ jest rosnący i ograniczony. Na podstawie twierdzenia 5 jest on zbieżny, jego granicę oznaczamy przez e. Przyjmujemy więc jako definicję liczby e równość

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n. \tag{18}$$

Z nierówności

$$2 = d_1 \le d_n \le 3$$

dostajemy po przejściu do granicy

$$2 \le e \le 3.$$

Można udowodnić, że liczba e jest niewymierna. Podamy bez dowodu, że

$$2,71 < e < 2,72.$$

Przykład 6. Udowodnimy, że

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}. \tag{19}$$

Mamy

$$(1 - \frac{1}{n})^n = (\frac{n-1}{n})^n = \frac{1}{a_n},$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_n &= (\frac{n}{n-1})^n \\ &= (1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}(1 + \frac{1}{n-1}). \end{aligned}$$

Równość (19) otrzymujemy stosując twierdzenia o działaniach na granicach i korzystając z (18). □

6. Warunek Cauchy'ego. Ciąg $\{a_n\}$ spełnia *warunek Cauchy'ego*[4] jeżeli do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, by dla $n, k > N$ zachodziła nierówność

$$|a_n - a_k| < \varepsilon.$$

Przykład 7. Mając dane dwie różne liczby rzeczywiste a, b określimy ciąg $\{u_n\}$ następująco:

$$\begin{aligned} &u_1 = a, \quad u_2 = b, \\ &u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_n) \quad \text{dla} \quad n \geq 2. \end{aligned} \tag{20}$$

Aby okazać, że ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego zaczniemy od oszacowania różnicy dwóch sąsiednich wyrazów. Mamy

$$|u_2 - u_1| = |b - a|. \tag{21}$$

Udowodnimy metodą indukcji, że

$$|u_{n+1} - u_n| = \frac{|b-a|}{2^{n-1}}. \tag{22}$$

Dla $n = 1$ równość (22) ma postać (21). Zastępując w (21) liczbę n przez $n + 1$ mamy

$$\begin{aligned} |u_{n+2} - u_{n+1}| &= |\frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) - u_{n+1}| = \\ &= \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|, \end{aligned}$$

a stąd przyjmując (22) jako założenie indukcyjne dostajemy tezę indukcyjną w postaci

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \frac{|b-a|}{2^n}.$$

Równość (22) jest zatem prawdziwa dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Aby oszacować różnicę dwóch dowolnych wyrazów ciągu przyjmiemy $k = n+p$, wówczas

$$\begin{aligned} &|u_n - u_{n+p}| \leq \\ &\leq |u_n - u_{n+1}| + |u_{n+1} - u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p-1} - u_{n+p}| \end{aligned}$$

[4] Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), wybitny matematyk francuski. Po ukończeniu w 1810 r. szkoły inżynieryjnej (École Polytechnique) prowadził samodzielnie badania matematyczne, zostając w 1815 r. profesorem matematyki w École Polytechnique. W 1830 r. ze względów politycznych opuścił Francję, wykładając następnie w Turynie a później w Pradze, po powrocie w 1838 r. do Paryża wykładał na Sorbonie. Pozostawił około 500 prac z zakresu matematyki, mechaniki i atronomii.

skąd na mocy (22)

$$|u_n - u_{n+p}| \leq \frac{|b-a|}{2^{n-1}}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}).$$

Stosując do prawej strony wzór (17) otrzymujemy

$$|u_n - u_{n+p}| \leq \frac{|b-a|}{2^{n-2}}. \tag{23}$$

Ponieważ $2^{n-2} \geq n-2 > 0$ dla $n \geq 3$, więc przyjmując

$$N = \frac{|b-a|}{\varepsilon} + 2$$

dostajemy z (23)

$$|u_n - u_{n+p}| < \varepsilon$$

dla $n > N$ i dowolnego $p \in \mathbb{N}$. Wracając do oznaczenia $n + p = k$ widzimy, że

$$|u_n - u_k| < \varepsilon$$

dla $n, k > N$. Zatem ciąg $\{u_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego. □

Twierdzenie 6 (Cauchy'ego). *Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.*

DOWÓD. Udowodnimy najpierw, że warunek Cauchy'ego jest warunkiem koniecznym zbieżności ciągu. Zakładając, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

i obierając dowolnie $\varepsilon > 0$ mamy dla $n, k > N$

$$|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_k - g| < \frac{\varepsilon}{2}$$

a stąd

$$|a_n - a_k| \leq |a_n - g| + |g - a_k| < \varepsilon.$$

Aby udowodnić dostateczność warunku Cauchy'ego załóżmy, że jest on spełniony dla ciągu $\{a_n\}$ i przyjmijmy $\varepsilon = 1$. Na mocy założenia istnieje liczba N_1 taka, że

$$|a_n - a_k| < 1 \tag{24}$$

dla $n, k > N_1$. Ustalając $k = k_1$ możemy nierówność (24) zapisać w postaci

$$-1 + a_{k_1} < a_n < 1 + a_{k_1}.$$

Przyjmując

$$\max_{n \leq N_1} |a_n| = A$$

mamy zatem dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$

$$\min(-1 + a_{k_1}, -A) \leq a_n \leq \max(1 + a_{k_1}, A)$$

a to oznacza, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony. Wobec tego opierając się na twierdzeniu Bolzano-Weierstrassa możemy z ciągu $\{a_n\}$ wybrać podciąg zbieżny $\{a_{n_k}\}$. Niech

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = g. \tag{25}$$

Opierając się na warunku Cauchy'ego udowodnimy, że g jest granicą ciągu $\{a_n\}$. Mamy

$$|a_n - g| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - g|.$$

Niech ε będzie dowolnie obraną liczbą dodatnią. Wobec (25) istnieje liczba N_2 taka, że dla $k > N_2$

$$|a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{26}$$

natomiast z warunku Cauchy'ego wynika istnienie liczby N_3 takiej, że dla $n_k, n > N_3$ zachodzi nierówność

$$|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{27}$$

Ponieważ $n_k \geq k$ (por. lemat w punkcie 3), więc dla $n, k > N = \max(N_2, N_3)$ zachodzą obie nierówności (26), (27) a z nich wynika

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

dla $n > N$. Okazaliśmy zatem, że

$$\lim_{n \to \infty} a_n = g.$$

□

Przy pomocy dość prostych rachunków wykazaliśmy, że ciąg rozważany w przykładzie 7 spełnia warunek Cauchy'ego - zatem zgodnie z twierdzeniem 6 jest to ciąg zbieżny. Mamy więc dowód istnienia granicy ciągu $\{u_n\}$, ale nie znamy jej wartości liczbowej. Obliczenie tej ostatniej wymaga nieco dłuższego rozumowania (por. zadanie 16).

W dowodzie dostateczności warunku Cauchy'ego oparliśmy się na twierdzeniu Bolzano-Weierstrassa, które udowodniliśmy poprzednio opierając się na twierdzeniu Ascoliego. W dowodzie twierdzenia Ascoliego wykorzystaliśmy aksjomat kresu. Ostatecznie więc fakt, że z warunku Cauchy'ego wynika zbieżność ciągu, jest konsekwencją aksjomatu kresu, który jak wiemy opisuje istotną własność zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Pokażemy na przykładzie, że twierdzenie Cauchy'ego (a ściślej jego druga część - dostateczność warunku Cauchy'ego) nie jest prawdziwe jeżeli zbiór $\mathbb{R}$ zastąpimy przez zbiór Q liczb wymiernych.

Przykład 8. Niech a będzie liczbą niewymierną i niech w_n będzie liczbą wymierną spełniającą nierówność

$$a + \frac{1}{2^{n+1}} < w_n < a + \frac{1}{2^n} \tag{28}$$

(liczba taka istnieje zgodnie z twierdzeniem 5 rozdz. I §2). Ponieważ (por. Przykład 3 §1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

stosując do nierówności (28) twierdzenie o trzech ciągach dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} w_n = a.$$

Ciąg $\{w_n\}$ nie ma więc granicy w zbiorze liczb wymiernych. Natomiast spełnia on warunek Cauchy'ego, gdyż dla dowolnych $n, p \in \mathbb{N}$

$$|w_n - w_{n+p}| \leq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+p+1}} < \frac{1}{2^n}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$$

więc

$$|w_n - w_{n+p}| < \varepsilon$$

dla $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$ i dowolnego $p \in \mathbb{N}$. □

♡ ♡ ♡

7*. Ułamki łańcuchowe. Dla ustalonej liczby rzeczywistej x utwórzmy ciąg

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{x - [x]}, \\ x_2 &= \frac{1}{x_1 - [x_1]}, \\ &\dots \\ x_n &= \frac{1}{x_{n-1} - [x_{n-1}]} \\ &\dots \end{aligned} \tag{29}$$

(przypominamy, że $[x]$ oznacza *część całkowitą* x - por. rozdz. I§2). Oczywiście liczba x_n jest poprawnie zdefiniowana tylko wtedy, gdy mianownik ułamka nie jest zerem tzn. gdy

x_{n-1} nie jest liczbą całkowitą. Z równości (29) otrzymujemy natychmiast

(30)
$$\begin{aligned}
&x = [x] + \frac{1}{x_1}\\
&x_1 = [x_1] + \frac{1}{x_2}\\
&\dots\\
&x_{n-1} = [x_{n-1}] + \frac{1}{x_n}\\
&\dots
\end{aligned}$$

przy czym $x_j > 1$ dla dowolnego j.

Jeżeli x jest liczbą wymierną, to liczby $x_1, x_2, \dots$ są również wymierne. Przypuśćmy, że dla pewnego j

$$x_j = \frac{p}{q}$$

nie jest liczbą całkowitą. Wówczas

$$x_j - [x_j] = \frac{k}{q}$$

gdzie $1 \leq k < q$, zatem na mocy (29)

$$x_{j+1} = \frac{q}{k}.$$

Widzimy więc, że mianowniki liczb x_j tworzą ciąg ściśle malejący. Wynika stąd, że jeżeli

$$x = \frac{l}{m} \quad (l \in Z,\ m \in \mathbb{N})$$

jest ułamkiem nieskracalnym, to istnieje liczba n $(1 \leq n < m)$ taka, że ciąg (29) jest ciągiem skończonym złożonym z wyrazów $x_1, x_2, \dots, x_n$, przy czym x_n jest liczbą całkowitą. Przyjmując oznaczenia

(31)
$$a_0 = [x], \quad a_j = [x_j] \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

otrzymujemy z (30) kolejno

$$
\begin{aligned}
x &= a_0 + \frac{1}{x_1},\\
x &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}},\\
x &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Każde z wyrażeń występujących po prawej stronie we wzorach (32) nazywamy *ułamkiem łańcuchowym skończonym*, zaś liczby $a_j \quad (j = 1, 2, \dots)$ jego *mianownikami*. Z ostatniego ze wzorów (32) wynika, że każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka łańcuchowego o mianownikach naturalnych. Oczywiście z postaci prawej strony widać, że własność tą mają tylko liczby wymierne.

Przykład 9. Niech $x = \frac{25}{7}$, zatem

$$x = 3 + \frac{4}{7}$$

i ze wzorów (29) dostajemy

$$x_1 = \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}, \qquad x_2 = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}, \qquad x_3 = 3.$$

Mianowniki liczb x_j $(j = 1, 2, 3)$ tworzą ciąg ściśle malejący 4, 3, 1, przy czym $n = 3$.

Wzory (30) przyjmują postać

$$\begin{aligned} x &= 3 + \frac{1}{x_1}, \\ x_1 &= 1 + \frac{1}{x_2}, \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{x_3}, \\ x_3 &= 3, \end{aligned}$$

skąd wynika rozkład liczby x na ułamek łańcuchowy

$$x = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}$$

- zgodnie ze wzorami (31), (32).

Załóżmy teraz, że x jest liczbą niewymierną. Ze wzorów (29) wnioskujemy, że liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ są również niewymierne, wobec tego mianowniki po prawej stronie nie znikają i wyrażenie x_n jest dobrze określone dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ciąg $\{x_n\}$ jest teraz ciągiem nieskończonym. Postępując podobnie jak w przypadku x wymiernego dostajemy odpowiednik wzorów (32) w postaci

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \atop \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}} \tag{33}$$

Nasuwa się myśl, by przyjmując oznaczenia (29), (31) przyporządkować liczbie niewymiernej x *ułamek łańcuchowy nieskończony*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} \tag{34}$$

Oczywiście wyrażenie (34) ma sens tylko wtedy, gdy określimy jego wartość liczbową. Dla dowolnego ciągu liczb dodatnich $y_j \quad (j = 1, 2, \ldots)$ i dowolnego y_0 oznaczmy przez

$$R_n(y_0, y_1, \ldots, y_n)$$

ułamek łańcuchowy występujący w ostatnim wzorze (32), w którym a_j zastąpiono przez y_j. Mamy zatem

$$R_0 = y_0$$

$$R_n(y_0, y_1, \ldots, y_n) = y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cdots \atop \cdots\cdots\cdots\cdots \cfrac{1}{y_{n-1} + \cfrac{1}{y_n}}}}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$. Umówimy się, że *wartością nieskoćzonego ułamka łańcuchowego* (34) jest granica

$$\lim_{n\to\infty} R_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

o ile ta granica istnieje. Wyrażenie

$$R_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

nazwiemy *n-tym reduktem* nieskończonego ułamka łańcuchowego (34).

Jak Czytelnik na pewno zauważył, ułamki łańcuchowe skończone mają dość skomplikowaną budowę. Okażemy teraz, że każdy taki ułamek można zapisać w postaći "zwykłego" ułamka, w którym licznik i mianownik są odpowiednio dobranymi wielomianami zmiennych a_j.

Twierdzenie 7. *Przyjmijmy dla dodatnich y_j $(j = 1, 2, \ldots)$ i dowolnego y_0*

$$\begin{aligned} P_0 &= y_0, & Q_0 &= 1, \\ P_1 &= y_0\, y_1 + 1, & Q_1 &= y_1, \\ P_k &= y_k\, P_{k-1} + P_{k-2} \\ Q_k &= y_k\, Q_{k-1} + Q_{k-2} \end{aligned} \tag{35}$$

$$(k = 2, 3, \ldots)$$

Wówczas

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n}. \tag{36}$$

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Równość jest łatwa do sprawdzenia dla $n = 0,\ 1$. Dla $n > 1$ można ją zapisać w postaci

$$R_n = \frac{y_n P_{n-1} + P_{n-2}}{y_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}. \tag{37}$$

Ze wzorów (35) widać, że zmienna y_n nie występuje w wyrażeniach P_j, Q_j dla $j < n$. Wobec tego zamieniając y_n przez $y_n + \dfrac{1}{y_{n+1}}$ we wzorze (37) dostajemy

$$R_{n+1} = \frac{y_{n+1}(P_{n-1}y_n + P_{n-2}) + P_{n-1}}{y_{n+1}(Q_{n-1}y_n + Q_{n-2}) + Q_{n-1}}$$

czyli

$$R_{n+1} = \frac{y_{n+1}P_n + P_{n-1}}{y_{n+1}Q_n + Q_{n-1}}$$

albo w równoważnej postaci

$$R_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}. \tag{38}$$

Okazaliśmy zatem, że traktując (36) jako założenie indukcyjne otrzymujemy z niego tezę indukcyjną (38). Dowód indukcyjny jest zakończony. □

Przyjmując w szczególności $y_j = a_j$ widzimy, że n-ty redukt $R_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ daje się zapisać jako ułamek $\dfrac{P_n}{Q_n}$ z zastąpieniem y_j przez a_j.

Udowodnimy teraz ważną własność nieskończonych uląmków łańcuchowych.

Twierdzenie 8. *Jeżeli x jest liczbą niewymierną, to*

$$x = \lim_{n\to\infty} R_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

(a zatem liczba x jest wartością przyporządkowanego jej nieskończonego ułamka łańcuchowego).

DOWÓD twierdzenia poprzedzimy lematami dotyczącymi wielomianów P_k, Q_k.

Lemat 1. *Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$*

$$Q_k > 0, \tag{39}$$

$$Q_k P_{k-1} - P_k Q_{k-1} = (-1)^k. \tag{40}$$

DOWÓD. Nierówność (39) wynika z definicji wielomianów Q_k. Dla dowodu (40) oznaczmy lewą stronę przez S_k. Mamy

$$S_1 = -1$$

oraz po wykorzystaniu wzorów (35)

$$S_{k+1} = -S_k$$

skąd po zastosowaniu indukcji wynika (40). □

Lemat 2. *Jeżeli* $y_j \geq 1$ *dla* $j = 1, 2, \ldots$ *to*

$$Q_k \geq Q_{k-1} \tag{41}$$

oraz

$$Q_k \geq k \tag{42}$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

DOWÓD. Ze wzorów (35) wynika

$$Q_0 \leq Q_1 < Q_2$$

oraz dla $k > 2$

$$Q_k = y_k Q_{k-1} + Q_{k-2} > y_k Q_{k-1} \geq Q_{k-1}.$$

Nierówność (42) udowodnimy metodą indukcji. Zgodnie z wzorami (35)

$$Q_0 > 0,\ Q_1 \geq 1,\ Q_2 = y_1 y_2 + 1 \geq 2.$$

Załóżmy teraz, że nierówność (42) jest prawdziwa dla $k = n - 1$ oraz $k = n$, gdzie $n \geq 2$. Wykażemy, że zachodzi ona po zastąpieniu n przez $n + 1$ czyli dla $k = n$ oraz $k = n + 1$. Oczywiście wystarczy rozważyć tylko przypadek $k = n + 1$. Mamy na mocy założenia indukcyjnego

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= y_{n+1} Q_n + Q_{n-1} \geq \\ &\geq n y_{n+1} + n - 1 \geq 2n - 1, \end{aligned}$$

a więc

$$Q_{n+1} \geq n + 1,$$

gdyż $2n - 1 \geq n + 1$ dla $n \geq 2$. □

Możemy teraz przystąpić do dowodu twierdzenia 8. Oznaczmy przez $\bar{P}_n, \bar{Q}_n, \bar{R}_n$ wyrażenia P_n, Q_n, R_n w których zmienne y_j zastąpiono przez a_j. Zgodnie ze wzorem (33) mamy (po zastąpieniu n przez $n + 1$)

$$x = R_{n+1}(a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}),$$

a zatem wobec (35), (36)

$$x = \frac{x_{n+1}\bar{P}_n + \bar{P}_{n-1}}{x_{n+1}\bar{Q}_n + \bar{Q}_{n-1}} \tag{43}$$

oraz

$$\bar{R}_n = \frac{\bar{P}_n}{\bar{Q}_n}. \tag{44}$$

Odejmując (43), (44) dostajemy po wykorzystaniu równości (40)

$$x - \bar{R}_n = \frac{(-1)^n}{(x_{n+1}\bar{Q}_n + \bar{Q}_{n-1})\bar{Q}_n}. \tag{45}$$

Ponieważ zgodnie ze wzorami (30)

$$x_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+2}} > a_{n+1}$$

więc

$$x_{n+1}\bar{Q}_n + \bar{Q}_{n-1} > a_{n+1}\bar{Q}_n + \bar{Q}_{n-1} = \bar{Q}_{n+1},$$

zatem z (45) dostajemy oszacowanie

$$|x - \bar{R}_n| < \frac{1}{\bar{Q}_n\bar{Q}_{n+1}}.$$

Po uwzględnieniu lematu 2 z ostatniej nierówności wynika

$$|x - \bar{R}_n| < \frac{1}{\bar{Q}_n^2} \tag{46}$$

a stąd

$$|x - \bar{R}_n| < \frac{1}{n^2}.$$

Ostatnia nierówność kończy dowód twierdzenia. □

W dalszym ciągu (punkt 9) będą podane przykłady rozwinięcia liczby niewymiernej na ułamek łańcuchowy.

Z otrzymanych oszacowań wynika twierdzenie dotyczące aproksymacji liczb niewymiernych przez wymierne, które będzie wykorzystane dalej.

Twierdzenie 9. *Niech x będzie liczbą niewymierną. Wówczas do dowolnego $m \in \mathbb{N}$ można dobrać liczby wymierne*

$$w = \frac{p}{q}, \quad w_1 = \frac{p_1}{q_1}$$

tak, by zachodziły nierówności

(i) $q, q_1 > m$,
(ii) $0 < x - w < \frac{1}{q^2}$,
(iii) $0 < w_1 - x < \frac{1}{q_1^2}$,

przy czym oba ułamki w, w_1 są nieskracalne.

DOWÓD. Jak widać ze wzorów (35), wielomiany Q_k nie zależą od y_0. Ponieważ $a_j = [x_j]$ dla $j = 1, 2, \ldots$ jest liczbą naturalną (liczba $a_0 = [x]$ może być ujemna), drogą indukcji wnioskujemy, że dla każdego k wyrażenie $\bar{P}_k$ jest liczbą całkowitą zaś wyrażenie $\bar{Q}_k$ liczbą naturalną.

Dla dowodu twierdzenia zauważmy, że zgodnie z (45) wyrażenie $x - \bar{R}_n$ jest dodatnie dla n parzystych, ujemne dla n nieparzystych. Wystarczy zatem przyjąć

$$w = \bar{R}_{2k}, \qquad w_1 = \bar{R}_{2k+1}$$

gdzie $2k > m$ i skorzystać z oszacowania (46). Zgodnie z lematem 2 mamy

$$q = \bar{Q}_{2k} \geq 2k > m$$

oraz

$$q_1 = \bar{Q}_{2k+1} \geq 2k + 1 > m$$

co kończy dowód własności (i) - (iii).

Pozostaje wykazać, że ułamek

$$\bar{R}_n = \frac{\bar{P}_n}{\bar{Q}_n}$$

jest nieskracalny dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wynika to natychmiast z równości (40). Przypuśćmy bowiem, że dla pewnego k mamy

$$\bar{P}_k = m_k\, p_k, \qquad \bar{Q}_k = m_k\, q_k$$

gdzie m_k, q_k są liczbami naturalnymi, p_k jest całkowite oraz $m_k > 1$. Wówczas (40) daje

$$q_k \bar{P}_{k-1} - p_k \bar{Q}_{k-1} = \frac{(-1)^k}{m_k}$$

co jest niemożliwe, gdyż lewa strona jest liczbą całkowitą a moduł prawej strony należy do przedziału $(0, 1)$. $\square$

Z dowodu twierdzenia 9 wynika, że znając rozwinięcie liczby niewymiernej na ułamek łańcuchowy możemy otrzymać jej przybliżenie wymierne z dowolną, z góry daną dokładnością. Z oszacowań (ii), (iii) widać, że błąd przybliżenia może być mały przy niedużym mianowniku q.

8*. Ciąg $a_n = \{nx\}$. Niech $\{y\} = y - [y]$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej y. Zbadamy własności ciągu, którego n-ty wyraz dany jest wzorem

$$a_n = \{nx\},$$

w zależności od liczby $x \in \mathbb{R}$.

PRZYPADEK 1: *x wymierne.*
Jeżeli x jest liczbą całkowitą, to $a_n = 0$ dla każdego n. Załóżmy wobec tego, że

$$(47) \qquad x = \frac{p}{q} \qquad (p \in Z,\ q \in \mathbb{N})$$

jest ułamkiem nieskracalnym, przy czym $q \geq 2$. Liczbę x możemy przedstawić w postaci

$$x = P + \frac{p_0}{q}$$

gdzie $P = [x]$ jest liczbą całkowitą zaś p_0 liczbą naturalną z przedziału $(0, q)$, przy czym ułamek $\frac{p_0}{q}$ również jest nieskracalny. Wówczas

$$nx = nP + \frac{np_0}{q}$$

a więc

$$\{nx\} = \{\frac{np_0}{q}\}.$$

Możemy wobec tego założyć od razu, że licznik p we wzorze (47) przyjmuje jedną z wartości $\{1, 2, \ldots, q-1\}$.

(i)*Liczby* $a_1, a_2, \ldots, a_q$ *są różne.*
Dla dowodu przypuśćmy, że istnieją takie dwie liczby n, m występujące w ciągu

$$\{1, 2, \ldots, q\},$$

że $n > m$ oraz $a_n = a_m$. Oznacza to, że

$$nx - [nx] = mx - [mx]$$

czyli

$$(n-m)\frac{p}{q} = Q,$$

gdzie $Q = [nx] - [mx]$ jest liczbą naturalną. Zatem

$$(n-m)p = Qq$$

a ponieważ założyliśmy, że liczby p, q są względnie pierwsze, więc musi być $Q = kp$ gdzie $k \in \mathbb{N}$. Po skróceniu dostajemy

$$n - m = kq$$

co jest niemożliwe, gdyż $kq \geq q$ i jednocześnie $n - m \leq q - 1$.

(ii)*Liczby* $a_1, a_2, \ldots, a_q$ *dzielą odcinek* $[0, 1)$ *na* q *równych części.*

Stwierdzenie to wynika natychmiast z udowodnionego przed chwilą punktu (i). Istotnie, każda z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_q$ jest ułamkiem o mianowniku q, w którym licznik przyjmuje jedną z wartości $\{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$. Ponieważ są one różne, muszą to być liczby

$$\frac{0}{q}, \frac{1}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}, \tag{48}$$

być może ustawione w innej kolejności.

(iii) *Dla każdego* $n \in \mathbb{N}$

$$a_{q+n} = a_n.$$

Dowód jest natychmiastowy, gdyż

$$\begin{aligned}\{\frac{(n+q)p}{q}\} &= \{\frac{np}{q} + p\} \\ &= \{\frac{np}{q}\}.\end{aligned}$$

Widzimy więc, że w przypadku gdy x jest liczbą wymierną, w ciągu $\{a_n\}$ mamy tylko skończoną ilość różnych wyrazów, które dzielą odcinek $[0,1)$ na równe części.

Przeprowadzone rozumowanie ilustruje następujący

Przykład 10. Niech

$$x = \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4},$$

wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\{nx\} = \{n \cdot \frac{3}{4}\},$$

zatem

$$a_n = \{n\, x_1\} \quad \text{gdzie} \quad x_1 = \frac{3}{4}.$$

Mamy $q = 4$ oraz

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{2}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = 0.$$

Jak widać, są to liczby postaci $\frac{j}{4}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ ustawione w kolejności od największej do najmniejszej. Ze względu na (iii) liczby te powtarzają się (w podanej kolejności) nieskończenie wiele razy, zatem ciąg $\{a_n\}$ ma postać

$$\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \ldots.$$

PRZYPADEK 2: *x niewymierne.*

Niech $w = \frac{p}{q}$ będzie liczbą wymierną, o której mowa w twierdzeniu 9. Dla $n = 1, 2, \ldots, q$ zachodzi nierówność

$$0 < nx - nw < \frac{1}{q}. \tag{49}$$

Jak wynika z rozważań przypadku 1, do każdego $j = 0, 1, \ldots, q-1$ istnieją liczby $n_j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ oraz l_j całkowite takie, że

$$n_j w = l_j + \frac{j}{q}. \tag{50}$$

Z (49), (50) wynika

$$l_j + \frac{j}{q} < n_j x < l_j + \frac{j+1}{q}$$

a stąd

$$[n_j x] = l_j$$

oraz

$$\frac{j}{q} < a_{n_j} = \{n_j x\} < \frac{j+1}{q}.$$

Ostatnia nierówność oznacza, że w każdym przedziale

$$\mathbb{P}_j = \left(\frac{j}{q}, \frac{j+1}{q}\right)$$

leży (przy tym dokładnie jeden) wyraz ciągu $\{a_n\}$, gdzie $n = 1, 2, \ldots, q$. Możemy teraz łatwo udowodnić

Twierdzenie 10. *Jeżeli x jest liczbą niewymierną, to do dowolnego $x_0 \in [0, 1]$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$a_{n_\varepsilon} = \{n_\varepsilon x\} \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

DOWÓD. Wystarczy dobrać tak q, by dla pewnego $j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$

$$\mathbb{P}_j \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Warunek ten będzie na pewno spełniony, jeżeli obierzemy

$$q > \frac{1}{\varepsilon}$$

a tą nierówność uzyskamy obierając

$$m > \frac{1}{\varepsilon}$$

w twierdzeniu 9. □

Twierdzenie 10 można sformułować nieco inaczej:

Twierdzenie 10'. *Jeżeli x jest liczbą niewymierną, to wyrazy ciągu $\{a_n\}$ leżą gęsto w odcinku $[0,1)$.*

9*. Zastosowanie ułamków łańcuchowych do aproksymacji. Dla uproszczenia oznaczeń nieskończony ułamek łańcuchowy (34) będziemy zapisywali w postaci

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$$

Zgodnie z twierdzeniem 8 każdą liczbę niewymierną można przedstawić w postaci takiego ułamka rozumianego jako granica

$$\lim_{n\to\infty} R_n(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Przykład 11. Przedstawić w postaci nieskończonego ułamka łańcuchowego liczbę $\sqrt{2}$. Ponieważ $1 < 2 < 4$ więc $1 < \sqrt{2} < 2$, zatem

$$a_0 = [\sqrt{2}] = 1.$$

Wobec tego

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1},$$

co po pomnożeniu licznika i mianownika przez $\sqrt{2}+1$ daje

$$x_1 = \sqrt{2}+1.$$

Zatem $2 < x_1 < 3$, skąd

$$a_1 = [x_1] = 2.$$

Okażemy indukcyjnie, że

$$x_n = \sqrt{2}+1 \tag{51}$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Dla $n = 1$ równość (51) została sprawdzona. Przyjmując (51) jako założenie indukcyjne dostajemy

$$x_{n+1} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

czyli

$$x_{n+1} = \sqrt{2}+1.$$

Wobec tego $a_n = a_1 = 2$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ czyli

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots].$$

Przykład 12. Przedstawić w postaci nieskończonego ułamka łańcuchowego liczbę $\sqrt{3}$. Ponieważ $1 < 3 < 4$ więc $1 < \sqrt{3} < 2$, skąd

$$a_0 = [\sqrt{3}] = 1.$$

Rachując podobnie jak w przykładzie 11 dostajemy

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1),$$

zatem $1 < x_1 < \frac{3}{2}$, skąd

$$a_1 = [x_1] = 1.$$

Dalszy rachunek daje

$$x_2 = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1,$$

a stąd $2 < x_2 < 3$, zatem

$$a_2 = [x_2] = 2.$$

Udowodnimy metodą indukcji, że

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1), \\ x_{2n} &= \sqrt{3} + 1 \end{aligned} \tag{52}$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Dla $n = 1$ równości (52) zostały już sprawdzone. Przyjmując (52) jako założenie indukcyjne otrzymujemy

$$x_{2n+1} = \frac{1}{(\sqrt{3} + 1) - 2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1),$$

a stąd po przekształceniu ułamka

$$x_{2n+2} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1,$$

co kończy dowód indukcyjny. Zatem

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= a_1 = 1, \\ a_{2n} &= a_2 = 2 \end{aligned}$$

co daje

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots].$$

W obu przykładach ciągi mianowników są okresowe. W Przykładzie 11 ciąg mianowników jest ciągiem stałym - okres zawiera tylko jeden wyraz 2. W Przykładzie 12 okres składa się z dwóch wyrazów 1, 2. Można udowodnić, że liczba niewymierna rozwija się na ułamek łańcuchowy okresowy wtedy i tylko wtedy gdy jest pierwiastkiem równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych.[5]

Przykład 13. Dla liczby $\sqrt{3}$ znaleźć przybliżenia wymierne w z niedomiarem i w_1 z nadmiarem, z błędem nie przekraczającym $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Wystarczy przyjąć

$$w = \bar{R}_{2k}, \quad w_1 = \bar{R}_{2k+1}$$

obierając odpowiednio k. Dla przybliżenia z niedomiarem mamy

$$0 < x - w < \frac{1}{(\bar{Q}_{2k})^2} \leq \frac{1}{4k^2} \leq \varepsilon,$$

wystarczy zatem przyjąć $k = 1$. Dla przybliżenia z nadmiarem

$$0 < w_1 - x < \frac{1}{(\bar{Q}_{2k+1})^2} \leq \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \varepsilon$$

skąd wynika, że również wystarczy $k = 1$. Ułamki w i w_1 znajdziemy posługując się twierdzeniem 6. Otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}
&\bar{P}_0 = \bar{Q}_0 = 1, \\
&\bar{P}_1 = 2, \qquad && \bar{P}_2 = 2\bar{P}_1 + \bar{P}_0 = 5, \\
& && \bar{P}_3 = \bar{P}_2 + \bar{P}_1 = 7, \\
&\bar{Q}_1 = 1, \qquad && \bar{Q}_2 = 2\bar{Q}_1 + \bar{Q}_0 = 3, \\
& && \bar{Q}_3 = \bar{Q}_2 + \bar{Q}_1 = 4,
\end{aligned}$$

stąd

$$w = \bar{R}_2 = \frac{5}{3}, \quad w_1 = \bar{R}_3 = \frac{7}{4}.$$

Przykład 14. Dla liczby $\sqrt{2}$ znaleźć przybliżenia wymierne w z niedomiarem i w_1 z nadmiarem, z błędem nie przekraczającym $\varepsilon = 0,1$. Rozumując podobnie, jak w przykładzie 10, otrzymujemy oszacowanie dla k

$$k \geq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad \text{dla przybliżenia z niedomiarem,}$$

$$k \geq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{dla przybliżenia z nadmiarem.}$$

Ponieważ $\sqrt{10} < \sqrt{16} = 4$, w obu przypadkach wystarczy przyjąć $k = 2$. Posługując się twierdzeniem 6 otrzymujemy kolejno

[5]Dowód można znaleźć w książce W. Narkiewicz, Teoria liczb, wyd. 2, Warszawa 1990, str. 293.

$$
\begin{aligned}
&\bar{P}_0 = \bar{Q}_0 = 1 \\
&\bar{P}_1 = 3, \qquad \bar{P}_2 = 2\bar{P}_1 + \bar{P}_0 = 7 \\
&\qquad\qquad\ \ \bar{P}_3 = 2\bar{P}_2 + \bar{P}_1 = 17 \\
&\qquad\qquad\ \ \bar{P}_4 = 2\bar{P}_3 + \bar{P}_2 = 41 \\
&\qquad\qquad\ \ \bar{P}_5 = 2\bar{P}_4 + \bar{P}_3 = 99 \\
&\bar{Q}_1 = 2, \qquad \bar{Q}_2 = 2\bar{Q}_1 + \bar{Q}_0 = 5 \\
&\bar{Q}_3 = 2\bar{Q}_2 + \bar{Q}_1 = 12 \\
&\bar{Q}_4 = 2\bar{Q}_3 + \bar{Q}_2 = 29 \\
&\bar{Q}_5 = 2\bar{Q}_4 + \bar{Q}_3 = 70
\end{aligned}
$$

zatem

$$w = \bar{R}_4 = \frac{41}{29}, \qquad w_1 = \bar{R}_5 = \frac{99}{70}.$$

Znajdując przybliżenia dziesiętne ułamków stwierdzamy, że

$$1,413 < w < \sqrt{2} < w_1 < 1,415.$$

Błąd znalezionych przybliżeń jest więc w rzeczywistości mniejszy od założonej z góry wartości $0,1$, nie przekracza bowiem $0,002$.

10. Twierdzenie Stolza. Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym do granicy a i utwórzmy ciąg średnich arytmetycznych:

$$
\begin{aligned}
&s_1 = a_1, \quad s_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&s_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Powstaje pytanie, czy ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny do tej samej granicy, co ciąg $\{a_n\}$? Pytanie to ma prostą interpretację fizyczną. Przypuśćmy, że a jest wartością jakiejś wielkości fizycznej zaś wyrazy a_n są liczbami otrzymanymi z pomiarów tej wielkości, przy czym ze wzrostem n wzrasta dokładność pomiaru. Rozważając abstrakcyjną sytuację nieskończenie wielu pomiarów mamy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Intuicyjnie wydaje się oczywiste, że biorąc średnie arytmetyczne pomiarów otrzymamy również dobre przybliżenia wartości a tzn. że ciąg $\{s_n\}$ jest również zbieżny do granicy a. Spróbujemy udowodnić to formalnie.

Załóżmy na chwilę, że a jest liczbą dodatnią oraz że

$$a_n > \frac{a}{2} \tag{53}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ (z definicji granicy wynika, że nierówność ta jest słuszna począwszy od pewnego wskaźnika $n = n_0$, będzie więc spełniona dla wszystkich n po odrzuceniu pewnej skończonej ilości początkowych wyrazów ciągu $\{a_n\}$). Wobec (53)

$$a_1 + \cdots + a_n > \frac{na}{2}$$

skąd wynika, że ciąg po lewej stronie jest rozbieżny do ∞. Zatem ciąg $\{s_n\}$ jest ilorazem dwóch ciągów rozbieżnych do ∞ i nie możemy zastosować do niego twierdzenia o granicy ilorazu. Mówimy, że wyrażenie s_n jest *nieoznaczonością typu* $\frac{\infty}{\infty}$. Do obliczania granicy takich ciągów bywa przydatne następujące

Twierdzenie 11 (Stolza). [6] *Załóżmy, że ciąg $\{y_n\}$ jest ściśle rosnący, przy czym $y_n \neq 0$ (przynajmniej począwszy od pewnego wskaźnika $n = n_0$) oraz że spełniony jest jeden z warunków*

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \infty.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \tag{54}$$

przy założeniu, że istnieje granica g po prawej stronie (właściwa lub niewłaściwa).

DOWÓD. Odrzucając w rozważanych ciągach n_0 początkowych wyrazów (co, jak wiemy, nie wpływa na zbieżność) możemy bez zmniejszenia ogólności założyć, że

$$y_{n+1} > y_n, \qquad y_n \neq 0 \tag{55}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy najpierw przypadek $g \in \mathbb{R}$ i obierzmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Istnieje wówczas liczba P (dobrana do ε) taka, że dla $k > P$ zachodzi nierówność epsilonowa

$$g - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} < g + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{56}$$

zaś wobec (55) nierówność tą można zapisać w równoważnej postaci

$$\left(g - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_k - y_{k-1}) < x_k - x_{k-1} < \left(g + \frac{\varepsilon}{2}\right(y_k - y_{k-1}). \tag{57}$$

[6] Otto Stolz (1842 - 1905), matematyk austriacki.

Obierając dowolnie $p > P$ oraz $n > p$ i dodając stronami nierówności (57) dla $k = p+1, p+2, \ldots, n$ dostajemy po redukcji

$$\left(g - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_p) < x_n - x_p < \left(g + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_p) \tag{58}$$

Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek (i) i ustalmy liczbę p. Przechodząc do granicy przy $n \to \infty$ w nierówności (58) dostajemy

$$\left(g - \frac{\varepsilon}{2}\right)(-y_p) \leq -x_p \leq \left(g + \frac{\varepsilon}{2}\right)(-y_p). \tag{59}$$

Ponieważ ciąg $\{y_n\}$ jest ściśle rosnący i zbieżny do 0, jego wyrazy muszą być ujemne. Wobec tego, dzieląc nierówność (59) przez $-y_p$, dostajemy

$$g - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{x_p}{y_p} \leq g + \frac{\varepsilon}{2}$$

i stąd

$$\left|\frac{x_p}{y_p} - g\right| < \varepsilon$$

dla $p > P$. Udowodniliśmy więc (54) przy założeniu, że spełniony jest warunek (i) i że g jest granicą właściwą. Przechodząc do przypadku granicy niewłaściwej załóżmy, że $g = \infty$ i obierzmy dowolnie liczbę $M > 0$. Istnieje wówczas liczba P (dobrana do M) taka, że dla $k > P$ zachodzi nierówność

$$2M < \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}},$$

którą można zapisać w równoważnej postaci

$$2M(y_k - y_{k-1}) < x_k - x_{k-1}. \tag{60}$$

Dalej postępujemy podobnie, jak w przypadku granicy g właściwej.Ustalmy dowolnie liczbę $p > P$ i niech $n > p$. Dodając stronami nierówności (60) dla $k = p+1, p+2, \ldots, n$ otrzymujemy po redukcji

$$2M(y_n - y_p) < x_n - x_p,$$

co po przejściu do granicy przy $n \to \infty$ i podzieleniu nierówności przez $-y_p$ daje

$$2M \leq \frac{x_p}{y_p},$$

skąd wynika, że

$$M < \frac{x_p}{y_p}$$

dla $p > P$. Oznacza to, .ze (54) zachodzi przy założeniu (i) w przypadku, gdy $g = \infty$. Dowód dla $g = -\infty$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi.

Przejdziemy teraz do dowodu (54) przy założeniu, że spełniony jest warunek (ii). Rozważymy najpierw przypadek $g \in \mathbb{R}$. Wówczas nierówność (58) można po uwzględnieniu (55) zapisać w postaci

$$g - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_p}{y_n - y_p} < g + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n > p > P), \tag{61}$$

przy czym liczba P jest dobrana do ε.

W dalszym ciągu dowodu będziemy korzystać z następującego lematu, którego dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Lemat. *Jeżeli* $a_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

□

Aby oszacować różnicę

$$\frac{x_n}{y_n} - g$$

przekształcimy najpierw wyrażenie

$$X_{n,p} = \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_n - x_p}{y_n - y_p}.$$

Mamy

$$X_{n,p} = \frac{x_p y_n - x_n y_p}{y_n(y_n - y_p)}$$

skąd, dodając i odejmując w liczniku $x_p y_p$, dostajemy

$$X_{n,p} = \frac{x_p(y_n - y_p) + y_p(x_p - x_n)}{y_n(y_n - y_p)}$$

czyli

(62) $$X_{n,p} = \frac{x_p}{y_n} + \frac{y_p}{y_n} \cdot \frac{x_p - x_n}{y_n - y_p}.$$

Ustalając p stwierdzamy na mocy lematu, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_p}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_p}{y_n} = 0,$$

ponadto, zgodnie z nierównością (61) ciąg $\{u_n\}$, gdzie

$$u_n = \frac{x_p - x_n}{y_n - y_p},$$

jest ograniczony. Zatem drugi wyraz po prawej stronie (62) dąży do 0 przy $n \to \infty$ jako iloczyn ciągu zbieżnego do 0 przez ciąg ograniczony (por. twierdzenie 4 §1) i w konsekwencji (przy ustalonym $p > P$) mamy

(63) $$\lim_{n\to\infty} X_{n,p} = 0.$$

Wobec (63) istnieje liczba $N > p$ taka, że dla $n > N$ zachodzi nierówność epsilonowa

$$|X_{n,p}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{64}$$

Ponieważ

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - g\right| \leq |X_{n,p}| + \left|\frac{x_n - x_p}{y_n - y_p} - g\right|, \tag{65}$$

uwzględniając (61), (64), (65) dostajemy

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - g\right| < \varepsilon$$

dla $n > N$, gdzie liczba N jest dobrana do ε, a to daje tezę twierdzenia przy założeniu (ii), jeżeli g jest granicą właściwą.

Pozostaje do rozważenia przypadek przy założeniu (ii), gdy granica g po prawej stronie (54) jest niewłaściwa.

Jeżeli $g = \infty$, to istnieje taka liczba r, że dla $n > r$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$$

a więc wobec (58)

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0. \tag{66}$$

Nierówność (66) możemy napisać kolejno dla $n = r + 1, r + 2, \ldots, k$. Dodając stronami otrzymane nierówności dostajemy

$$x_k - x_r > y_k - y_r$$

skąd wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} x_k = \infty.$$

Ponadto z (66) widać, że ciąg $\{x_n\}$ jest, przynajmniej począwszy od wyrazu x_r, ciągiem ściśle rosnącym. Zatem ciąg $\{x_n\}$ spełnia założenia uczynione w twierdzeniu o ciągu $\{y_n\}$. Ponieważ założyliśmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \infty,$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0,$$

a to pozwala zastosować udowodnioną już część twierdzenia w przypadku $g = 0$ z zamianą ról ciągów $\{x_n\}, \{y_n\}$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0. \tag{67}$$

Ponieważ oba ciągi są rozbieżne do ∞, więc przynajmniej dla dostatecznie dużych n mamy

$$x_n > 0, \quad y_n > 0.$$

Opierając się na lemacie 2 dostajemy z (67)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty,$$

co daje tezę w przypadku $g = \infty$.

Jeżeli $g = -\infty$, to przyjmując $z_n = -x_n$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-z_n + z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = -\infty$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \infty$$

i stosując już udowodnioną część twierdzenia dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{y_n} = \infty$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$$

co kończy dowód. □

Możemy teraz wrócić do postawionego poprzednio pytania dotyczącego zbieżności ciągu średnich arytmetycznych.

Twierdzenie 12 (o średniej arytmetycznej). *Jeżeli $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym do granicy a (właściwej lub niewłaściwej), to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = a.$$

DOWÓD otrzymujemy natychmiast z twierdzenia Stolza przyjmując

$$x_n = a_1 + \cdots + a_n, \qquad y_n = n$$

gdyż

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a_n.$$

□

11. Granica górna i dolna ciągu. Liczbę α nazywamy *liczbą graniczną ciągu* $\{a_n\}$,[7] jeżeli jest ona granicą pewnego podciągu ciągu $\{a_n\}$. Na przykład ciąg

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \tag{68}$$

ma dwie liczby graniczne $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$, bowiem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2n-1} = 1, \quad a_{2n} = 0 \tag{69}$$

zatem

$$\alpha_1 = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}, \quad \alpha_2 = \lim_{n\to\infty} a_{2n}$$

przy czym łatwo zauważyć, że każdy podciąg zbieżny wyjęty z ciągu (68) musi być od pewnego miejsca identyczny z jednym z podciągów (69).

Liczbę G nazywamy *granicą górną* ciągu $\{a_n\}$, jeżeli ciąg ten jest ograniczony z góry i G jest największą jego liczbą graniczną. Zapisujemy

$$G = \overline{\lim}\, a_n$$

lub

$$G = \limsup a_n.$$

Liczbę g nazywamy *granicą dolną* ciągu $\{a_n\}$, jeżeli ciąg ten jest ograniczony z dołu i g jest najmniejszą jego liczbą graniczną. Zapisujemy

$$g = \underline{\lim}\, a_n$$

lub

$$g = \liminf a_n.$$

Twierdzenie 13. *Każdy ciąg ograniczony ma granicę górną i dolną.*

DOWÓD. Z założenia istnieją liczby m, M takie, że

$$m \le a_n \le M \tag{70}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb granicznych ciągu $\{a_n\}$. Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa zbiór ten nie jest pusty, natomiast z nierówności (70) wynika, że jest on zbiorem ograniczonym. Wobec tego (por. rozdz.I §2) zbiór A ma kres górny G i kres dolny g. Okażemy, że

$$G = \limsup a_n, \quad g = \liminf a_n. \tag{71}$$

[7] Używany jest również termin *punkt skupienia ciągu* $\{a_n\}$.

Udowodnimy najpierw pierwszą z równości (71). Z definicji kresu górnego (warunek (sup1))

$$\alpha \leq G$$

dla dowolnej liczby granicznej α. Wystarczy wobec tego okazać, że G jest liczbą graniczną. Wykorzystamy teraz ponownie definicję kresu górnego przyjmując $\varepsilon_1 = 1$ w warunku (sup2). Wynika z niego istnienie liczby granicznej α_1 takiej, że

$$G - 1 < \alpha_1 \leq G < G + 1.$$

Ponieważ α_1 jest granicą pewnego podciągu wyjętego z ciągu$\{a_n\}$, w przedziale $(G-1, G+1)$ leży nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$. Oznaczmy przez a_{n_1} wyraz o najniższym numerze. Mamy

$$G - 1 < a_{n_1} < G + 1.$$

Przyjmując $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ i powtarzając opisane rozumowanie możemy znaleźć $n_2 > n_1$ takie, że

$$G - \frac{1}{2} < a_{n_2} < G + \frac{1}{2}.$$

Postępując podobnie dla $\varepsilon_k = \frac{1}{k}(k = 3, 4, \dots)$ konstruujemy ciąg ściśle rosnący wskaźników $\{n_k\}$ o tej własności, że

$$G - \frac{1}{k} < a_{n_k} < G + \frac{1}{k} \tag{72}$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Z nierówności (72) wynika na mocy twierdzenia o trzech ciągach, że

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = G.$$

Zatem G jest liczbą graniczną.
Dla dowodu drugiej równości (71) zauważmy, że zgodnie z definicją kresu dolnego (warunek (inf1))

$$g \leq \alpha$$

dla dowolnej liczby granicznej α. Pozostaje wykazać, że g jest również liczbą graniczną, podobnie jak G. Dowód jest podobny i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

Podobnie, jak w przypadku granicy ciągu, można wprowadzić niewłaściwe granice górną i dolną. Mówimy, że

$$\limsup a_n = \infty,$$

jeżeli istnieje podciąg ciągu $\{a_n\}$ rozbieżny do ∞. Podobnie

$$\liminf a_n = -\infty,$$

jeżeli z ciągu $\{a_n\}$ można wyjąć podciąg rozbieżny do $-\infty$.

Zachodzi łatwe do udowodnienia

Twierdzenie 14.
(i) *Ciąg* $\{a_n\}$ *jest nieograniczony z góry wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\limsup a_n = \infty,$$

(ii) *ciąg* $\{a_n\}$ *jest nieograniczony z dołu wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\liminf a_n = -\infty.$$

DOWÓD. Udowodnimy punkt (i); dowód (ii) przebiega tak samo i pozostawiamy go Czytelnikowi. Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony z góry, to do dowolnego $M > 0$ istnieją wyrazy ciągu spełniające nierówność

$$a_n \geq M. \tag{73}$$

Wyrazów tych jest nieskończenie wiele. Przypuśćmy bowiem, że tak nie jest i (73) zachodzi jedynie dla skończonej ilości wyrazów $a_{n_1}, \ldots, a_{n_p}$. Wówczas nierówność (73) nie będzie spełniona dla żadnego n jeżeli zastąpimy M przez

$$M_1 = \max(M, a_{n_1}, \ldots, a_{n_p}).$$

Niech teraz $M = 1$ i niech n_1 oznacza najmniejszy wskaźnik taki, że

$$a_{n_1} \geq 1.$$

Przyjmując dalej $M = 2$ wybierzemy z pośród nieskończenie wielu wyrazów ciągu spełniających (73) wyraz a_{n_2}, gdzie n_2 jest najmniejszym wskaźnikiem większym od n_1. Mamy zatem

$$a_{n_2} \geq 2, \quad n_2 > n_1.$$

Kontynuując opisane postępowanie otrzymujemy ściśle rosnący ciąg wskaźników $\{n_k\}$ taki, że

$$a_{n_k} \geq k. \tag{74}$$

Ciąg $\{a_{n_k}\}$ jest podciągiem ciągu $\{a_n\}$, przy czym z nierówności (74) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = \infty.$$

Na odwrót - jeżeli z ciągu $\{a_n\}$ można wybrać podciąg $\{a_{n_k}\}$ rozbieżny do ∞, to do dowolnego M można dobrać liczbę k_0 tak, by

$$a_{n_k} > M$$

dla $k > k_0$. Zatem ciąg $\{a_n\}$ nie jest ograniczony z góry. □

Niech będzie dany ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}$. Mówimy, że

(i) wyrazy tego ciągu mają własność (w) *dla prawie wszystkich* n, jeżeli istnieje liczba n_0 taka, że a_n ma własność (w) dla $n > n_0$;

(ii) wyrazy ciągu mają własność (w) dla *nieskończenie wielu* n, jeżeli istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ taki, że a_{n_k} ma własność (w) dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Przykład 15.
(A) Ciąg $\{a_n\}$ ma postać

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

W ciągu tym jest nieskończenie wiele wyrazów równych zeru, natomiast nie jest prawdą że prawie wszystkie wyrazy są równe zeru.
(B) Niech

$$a_n = \begin{cases} (11-n)^{-1} & \text{dla} \quad n \leq 9 \\ (-1)^n & \text{dla} \quad n > 9. \end{cases}$$

Ciąg $\{a_n\}$ ma więc postać

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2}, 1, -1, 1, -1, \dots$$

W ciągu tym
a.) jest nieskończenie wiele wyrazów dodatnich,
b.) prawie wszystkie wyrazy są całkowite,
c.) jest nieskończenie wiele wyrazów równych -1.

Posługując się wprowadzoną terminologią można następująco sformułować podaną w §1 definicję granicy ciągu: Liczba a jest *granicą ciągu* $\{a_n\}$ jeżeli dla dowolnego dodatniego ε nierówność

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

jest spełniona dla prawie wszystkich n. Pokażemy teraz, że również granice górną i dolną można zdefiniować przy pomocy nierówności epsilonowej.

Twierdzenie 15. *Liczba G jest granicą górną ciągu $\{a_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$*
a.) *nierówność*

$$G - \varepsilon < a_n$$

jest spełniona dla nieskończenie wielu n oraz
b.) *nierówność*

$$a_n < G + \varepsilon$$

jest spełniona dla prawie wszystkich n.

DOWÓD. Załóżmy że

$$G = \overline{\lim}\, a_n,$$

wówczas istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ taki, że

$$G = \lim_{k \to \infty} a_{n_k}$$

skąd wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ nierówność a.) jest spełniona przez prawie wszystkie wyrazy podciągu, a więc przez nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Zgodnie z definicją granicy górnej ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, zatem istnieje liczba M taka, że

$$a_n \leq M$$

dla wszystkich n. Przypuśćmy teraz, że warunek b.) nie jest spełniony dla pewnego ε_0, wobec tego dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność

$$G + \varepsilon_0 \leq a_n \leq M.$$

Wyrazy ciągu spełniające ostatnią nierówność tworzą ciąg ograniczony, na podstawie twierdzenia Bolzano-Weierstrassa można więc z niego wyjąć podciąg zbieżny. Ale to oznacza, że z ciągu $\{a_n\}$ można wyjąć podciąg zbieżny do liczby $\alpha \in [G + \varepsilon_0, M]$, G nie jest więc największą liczbą graniczną wbrew założeniu.

Przypuśćmy teraz, że są spełnione warunki a.), b.) podane w twierdzeniu. Przyjmując $\varepsilon = 1$ w warunku b.) widzimy, że co najwyżej skończona ilość wyrazów ciągu $\{a_n\}$ jest większa od liczby $G + 1$, zatem ciąg ten jest ograniczony z góry. Przyjmując w warunkach a.), b.) kolejno $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $(k = 1, 2. \dots)$ możemy skonstruować ciąg ściśle rosnący wskaźników $\{n_k\}$ taki, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

$$G - \frac{1}{k} < a_{n_k} < G + \frac{1}{k}$$

(por. rozumowanie w dowodzie twierdzenia 13). Zatem

$$G = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$

co oznacza, że G jest liczbą graniczną. Gdyby istniała liczba graniczna $G_1 > G$, to przyjmując $\varepsilon = \frac{1}{2}(G_1 - G)$ otrzymalibyśmy dla nieskończenie wielu n nierówność

$$a_n > G_1 - \varepsilon = G + \varepsilon$$

co przeczy warunkowi b.). A więc G jest największą liczbą graniczną czyli granicą górną.
□

W podobny sposób można udowodnić

Twierdzenie 16. *Liczba g jest granicą dolną ciągu $\{a_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$*

a.) *nierówność*

$$g - \varepsilon < a_n$$

jest spełniona dla prawie wszystkich n oraz

b.) *nierówność*

$$a_n < g + \varepsilon$$

jest spełniona dla nieskończenie wielu n.

DOWÓD pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

Twierdzenie 17. *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę dolną g i granicę górną G, to*

$$g \le G \tag{75}$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy ciąg jest zbieżny.

DOWÓD. Nierówność (75) wynika bezpośrednio z definicji. Jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

to a jest jedyną liczbą graniczną (por. twierdzenie 3), zatem

$$g = G = a.$$

Na odwrót, jeżeli $g = G$, to zbieżność ciągu wynika natychmiast z twierdzeń 15 (warunek b.)) i 16 (warunek a.)). □

Przykład 16. Wróćmy do ciągu

$$a_n = \{nx\}$$

rozważanego w punkcie 8. Jeżeli $x = \frac{p}{q}$ (ułamek nieskracalny, $q \ge 2$), to ciąg $\{a_n\}$ ma q różnych liczb granicznych

$$\alpha_j = \frac{j}{q} \qquad (j = 0, 1, \ldots, q-1),$$

zatem

$$\liminf a_n = 0, \qquad \limsup a_n = \frac{q-1}{q}.$$

Jeżeli zaś x jest niewymierne, to z twierdzenia 10 wynika, że każda liczba z przedziału $[0,1]$ jest liczbą graniczną, wobec tego

$$\liminf a_n = 0, \qquad \limsup a_n = 1.$$

Przykład 17. Niech

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla} \quad n \quad \text{parzystych}, \\ n & \text{dla} \quad n \quad \text{nieparzystych}. \end{cases}$$

Wówczas

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \infty.$$

Ciąg jest ograniczony z dołu, nieograniczony z góry. Jedyną liczbą graniczną jest 0, zatem

$$\liminf a_n = 0, \qquad \limsup a_n = \infty.$$

Warto zauważyć, że twierdzenia o działaniach na granicach (§1 punkt 4) nie są prawdziwe dla granic górnej i dolnej.

Przykład 18. Niech

$$a_{2n} = b_{2n+1} = 1, \qquad a_{2n+1} = b_{2n} = 0.$$

Wówczas

$$a_n + b_n = 1, \quad a_n b_n = 0$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Mamy

$$\limsup a_n = \limsup b_n = 1$$

oraz

$$\liminf a_n = \liminf b_n = 0$$

a więc

$$\begin{aligned} &\limsup a_n + \limsup b_n = 2, \\ &\liminf a_n + \liminf b_n = 0, \\ &(\limsup a_n)(\limsup b_n) = 1. \end{aligned}$$

Natomiast oba ciągi $\{a_n+b_n\}$ oraz $\{a_n b_n\}$ są stałe, a więc zbieżne i zgodnie z twierdzeniem 17 mamy

$$\limsup(a_n + b_n) = \liminf(a_n + b_n) = 1$$

oraz

$$\limsup(a_n b_n) = \liminf(a_n b_n) = 0.$$

Zadania.

1. Podać przykłady
   a.) ciągu rosnącego zbieżnego,
   b.) ciągu malejącego zbieżnego,
   c.) ciągu rosnącego rozbieżnego do ∞,
   d.) ciągu malejącego rozbieżnego do $-\infty$.

2. Pokazać na przykładzie, że ciąg rozbieżny do ∞ może nie być rosnący.

3. Znaleźć granice ciągów

$$a_n = \sqrt[n^2]{n^2}, \quad b_n = 3^{\frac{1}{2n+1}}.$$

Wskazówka. Wykorzystać przykłady 13, 14 §1 oraz twierdzenie o podciągach.

4. Zbadać zbieżność ciągów

$$a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sqrt[n]{n}, \quad b_n = (-1)^n (1 + (-1)^n) \frac{n}{4n^2+1}.$$

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie o podciągach, twierdzenie 4 §1 oraz przykład 14 §1.

5. Które z podanych ciągów przedziałów są zstępujące? Znaleźć ich część wspólną i porównać wynik z twierdzeniem Ascoliego.

$$\text{a.)}\mathbb{P}_n = [\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}], \qquad \text{b.)}\mathbb{P}_n = [-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}],$$
$$\text{c.)}\mathbb{P}_n = [-\frac{2}{n}, \frac{3}{n^2}] \qquad \text{d.)}\mathbb{P}_n = (1, 1+2^{-n}).$$

6. Udowodnić, że przy założeniach twierdzenia Ascoliego część wspólna wszystkich przedziałów $\mathbb{P}_n$ jest przedziałem $[x_0, x_1]$, gdzie

$$x_0 = \sup A, \quad A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$
$$x_1 = \inf B, \quad B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

7. Znaleźć granice ciągów

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Wskazówka. Wykorzystać punkt 5, twierdzenie o podciągach i zadanie 23 §1.

8. Znaleźć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{6n}.$$

Wskazówka. Wykorzystać punkt 5 oraz twierdzenie o podciągach.

9. Sprawdzić, dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

Wskazówka. Wykorzystać punkt 5.

10. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Wskazówka. Wykorzystując punkt 5 udowodnić najpierw nierówność

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leq e.$$

Następnie wykorzystać przykład 13 §1.

11. Udowodnić zbieżność ciągu $\{a_n\}$ spełniającego warunki

i.) $0 \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$,
ii.) $|a_{2n} - a_{2n-1}| \leq \frac{1}{n}$
dla $n \in \mathbb{N}$.
Wskazówka. Udowodnić najpierw zbieżność ciągu $\{a_{2n+1}\}$, następnie zastosować zadanie 4 §1.

12. Udowodnić, że następujące ciągi są zbieżne do zera:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^k}{a^n} \qquad \text{przy ustalonych} \qquad a > 1, k \in \mathbb{N},\\
b_n &= \frac{p^n}{n!} \qquad \text{przy ustalonym} \qquad p > 0,\\
c_n &= \frac{n^n}{(n!)^2},\\
d_n &= \frac{n!}{n^n}.
\end{aligned}
$$

Wskazówka. Udowodnić, że każdy z tych ciągów jest ograniczony z dołu i malejący począwszy od pewnego wyrazu, następnie oprzeć się na twierdzeniu 5. W celu obliczenia granicy ciągu znaleźć najpierw związek między n-tym i $(n+1)$-szym wyrazem ciągu.

13. Zakładając, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

udowodnić, że ciąg

$$y_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$$

ma również granicę a.
Wskazówka. Opierając się na zadaniu 18 rozdz. I §1 przedstawić najpierw wyrażenie y_n w postaci

$$y_n = z_n + a$$

gdzie

$$z_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x_k - a).$$

Dowód równości

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

zacząć od okazania, że przy ustalonym k

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} \binom{n}{k} = 0,$$

opierając się na zadaniu 17 rozdz.I §1 i zadaniu 12.

14. Zbadać zbieżność ciągu określonego wzorem rekurencyjnym

$$x_n = \frac{a}{1 + x_{n-1}} \quad \text{dla} \quad n > 1$$

zakładając, że $x_1 > 0$ oraz że a jest daną liczbą dodatnią.
Wskazówka. Przewidywana granica g spełnia równanie

$$g = \frac{a}{1+g}.$$

Rozważając przypadki

$$\text{a.)} \quad x_1 < g, \qquad \text{b.)} \quad x_1 > g$$

udowodnić, że każdy z podciągów $\{x_{2k}\}$ oraz $\{x_{2k+1}\}$ jest monotoniczny i ograniczony. Następnie oprzeć się na twierdzeniu 5 i wykorzystać zadanie 4 §1.

15. Udowodnić zbieżność i obliczyć granicę ciągu $\{u_n\}$ określonego następująco (przy ustalonym $c > 0$):

$$\begin{aligned} &u_1 = \sqrt{c}, \\ &u_{n+1} = \sqrt{c + u_n} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{76}$$

Wskazówka. Udowodnić najpierw (metodą indukcji) nierówności

$$\sqrt{c} < u_n < \sqrt{c} + 1, \quad u_{n-1} < u_n$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Wywnioskować stąd, że ciąg jest zbieżny, następnie przejść do granicy w (76) opierając się na zadaniu 23 §1.

16. Wykazać, że ciąg określony następująco (por. przykład 7):

$$\begin{aligned} &u_1 = a, \quad u_2 = b \quad (a \neq b) \\ &u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_n) \quad \text{dla} \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

ma granicę

$$g = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b.$$

Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej.
Wskazówka. Ciąg $\{u_n\}$ był rozważany w Przykładzie 7, gdzie wykazaliśmy że spełnia warunek Cauchy'ego, zatem na podstawie twierdzenia 6 jest zbieżny, przy czym

$$g = \lim u_{2n+1}$$

(dlaczego?). Aby obliczyć tą ostatnią granicę należy najpierw, zakładając że $a < b$, udowodnić indukcyjnie nierówność

$$u_{2n-1} < u_{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

następnie korzystając z równości (22) wyrazić różnicę

$$u_{2n+1} - u_{2n-1}$$

przy pomocy wyrażenia $b - a$ i skorzystać z przedstawienia

$$u_{2n+1} = u_1 + \sum_{k=1}^{n} (u_{2k+1} - u_{2k-1}).$$

W dalszych rachunkach należy wykorzystać równość (17) i Przykład 4 §1. Przypadek $a > b$ sprowadzić do poprzedniego rozważając ciąg $v_n = u_{n+1}$.

17. Obliczyć granicę ciągu $\{h_n\}$ określonego następująco (por. zadanie 8 §1):

$$h_1 = a, \qquad h_2 = b,$$
$$h_{n+1} = \frac{2h_n \cdot h_{n-1}}{h_n + h_{n-1}} \quad \text{dla} \quad n \geq 2.$$

(zakładamy, że a, b są różnymi liczbami dodatnimi). Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej.
Wskazówka. Rozważyć ciąg

$$u_n = \frac{1}{h_n}$$

i skorzystać z zadania 16.

18. Udowodnić zbieżność ciągu

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 5.

19. Dla danych $a > b > 0$ określimy dwa ciągi

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \tag{77}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że oba ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_N\}$ są zbieżne do tej samej granicy leżącej w przedziale (b, a) (zwanej *średnią arytmetyczno - geometryczną* liczb a, b).
Wskazówka. Opierając się na zadaniu 7 rozdz.I §1 udowodnić najpierw, że oba ciągi są monotoniczne i ograniczone. Zastosować twierdzenie 5 i przejść do granicy w równościach (77).

20. Dla danych $a > b > 0$ określimy ciągi

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = \frac{2ab}{a+b}$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

Udowodnić, że oba ciągi są zbieżne do tej samej granicy równej $\sqrt{ab}$.
Wskazówka. Zbieżność ciągów i równość ich granic udowodnić podobnie, jak w zadaniu 19. W celu obliczenia granicy udowodnić najpierw indukcyjnie równość

$$a_n\, b_n = ab \quad (n \in \mathbb{N}).$$

21*. Udowodnić następujące rozwinięcia na ułamki łańcuchowe:

a.) $\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, \dots]$

b.) $\sqrt{6} = [2; 2, 4, 2, 4, \dots]$

c.) $\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]$.

22*. Opierając się na zadaniu 21 znaleźć dla liczb $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ przybliżenia wymierne z nadmiarem i z niedomiarem z błędem nie przekraczający $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

23. Niech

$$a_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1}),$$
$$A_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{2} \tag{78}$$

natomiast ciąg $\{a_n\}$ nie ma granicy. Porównać z twierdzeniem 12.
Wskazówka. W dowodzie (78) wykorzystać zadanie 4 §1.

24. Obliczyć granice

a.) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \sqrt{5} + \sqrt[3]{5} + \dots + \sqrt[n]{5}\right)$,

b.) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}\right)$,

c.) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$,

d.) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{27} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n^n}\right)$.

25. Obliczyć granice ciągów

$$a_n = \frac{1 + 2^2 + \cdots + n^n}{n^n},$$
$$b_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!},$$
$$c_n = \frac{1 + 2^2\sqrt{2} + \cdots + n^2\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(n+2)},$$
$$d_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu Stolza. Przy badaniu ciągu $\{d_n\}$ wykorzystać wzór dwumianowy Newtona.

26. Znaleźć granice górną i dolną ciągów

$$a_n = \frac{2 + (-1)^n n^2}{n(3n+1)},$$
$$b_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n}),$$
$$c_n = [1 + (-1)^n](n - \frac{1}{n})^2.$$

27. Udowodnić, że ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich spełniający jeden z warunków

$$(w_1) \qquad \limsup \sqrt[n]{a_n} < 1,$$
$$(w_2) \qquad \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

jest zbieżny do zera.
Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 15 i wykorzystać Przykład 4 §1.

28. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem ograniczonym. Udowodnić, że

$$\limsup(\lambda a_n) = \begin{cases} \lambda \limsup a_n & \text{dla} \quad \lambda > 0 \\ \lambda \liminf a_n & \text{dla} \quad \lambda < 0. \end{cases}$$

29. Załóżmy, że ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ są ograniczone i że zachodzi nierówność

$$a_n \leq b_n \qquad (s \in \mathbb{N}).$$

Udowodnić, że

$$\limsup a_n \leq \limsup b_n,$$
$$\liminf a_n \leq \liminf b_n.$$

30. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma postać

$$1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{8},\ \ldots$$

Wskazówka. Najpierw znaleźć ogólny wzór dla wyrazów parzystych oraz dla wyrazów nieparzystych ciągu $\{a_n\}$, następnie wykorzystać Przykład 13 §1, twierdzenie o podciągach i zadanie 4 §1.