Rozdział III

Funkcje zmiennej rzeczywistej.

♡ ♡ ♡

§1. Funkcje elementarne.

1. Przykłady funkcji. W poprzednim rozdziale zdefiniowaliśmy ciąg nieskończony jako funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ i przyjmującą wartości należące do zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Obecnie przejdziemy do rozważania funkcji określonych na całym zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub na jego podzbiorze i przyjmujących wartości rzeczywiste. Wiele przykładów takich funkcji poznał już Czytelnik podczas nauki w szkole.

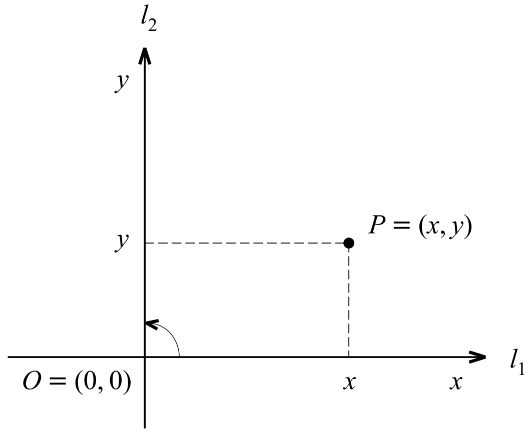
Zbiór $D \subset \mathbb{R}$ na którym określona jest funkcja f nazywamy *dziedziną* tej funkcji. Dla oznaczenia *wartości* funkcji f w punkcie $x \in D$ będziemy używali oznaczenia $f(x)$ lub y (to drugie jest wygodniejsze w rachunkach). Zmienną x nazywamy *argumentem* funkcji f. Zbiór wartości przyjmowanych przez funkcję f na zbiorze $A \subset D$ będziemy oznaczać przez $f(A)$. Najczęściej będziemy mieli do czynienia z funkcjami, których dziedziną jest przedział (ograniczony lub nie).

Wprowadźmy na płaszczyźnie układ dwóch prostopadłych osi liczbowych l_1, l_2 przecinających się w punkcie 0, które nazwiemy osią x-ów i osią y-ów. Dla dowolnie ustalonego punktu P płaszczyzny niech P_x będzie jego rzutem prostopadłym na oś x-ów, zaś P_y - rzutem prostopadłym na oś y-ów. Oznaczmy dalej przez x współrzędną punktu P_x na osi x-ów oraz przez y współrzędną punktu P_y na osi y-ów. Liczby x, y nazywamy *współrzędnymi prostokątnymi* punktu P (x jest *odciętą*, y jest *rzędną* punktu P), zaś układ osi l_1, l_2 - *prostokątnym układem współrzędnych.* Płaszczyznę z wprowadzonym prostokątnym układem współrzędnych będziemy oznaczali przez $\mathbb{R}^2$. Zgodnie z twierdzeniem sformułowanym w punkcie 3 rozdz. I §1 każdej parze liczb rzeczywistych (x, y) odpowiada dokładnie jeden punkt P płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ taki, że x jest odciętą zaś y rzędną punktu P. Wobec tego możemy używać zapisu

$$P = (x, y)$$

utożsamiając punkty płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ z parami liczb rzeczywistych.

Punkt przecięcia osi $O = (0, 0)$ nazywamy *początkiem układu współrzędnych.* Umówimy się, że dodatnia półoś x-ów po obrocie o kąt prosty wykonanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara pokrywa się z dodatnią półosią y-ów (rys. 2). Umowa ta określa *orientację układu współrzędnych* (zwaną orientacją dodatnią).



[rys. 2]

Wykresem funkcji f będziemy nazywali zbiór punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ postaci (x, y), gdzie $y = f(x)$, $x \in D$.

A oto parę przykładów funkcji:

(i) $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$
określona dla $x \in [-1, 1]$;

(ii) $g(x) = \log|x|(1 - |x|)$
określona dla $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ (przez log rozumiemy tu logarytm dziesiętny);

(iii) $h(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 7x + 10}$
określona dla $x \in (-\infty, 2) \cup (2, 5) \cup (5, \infty)$ (jak łatwo sprawdzić, mianownik jest zerem dla $x = 2$ oraz $x = 5$);

(iv) $d(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \quad \text{wymiernych} \\ 0 & \text{dla} \quad x \quad \text{niewymiernych} \end{cases}$
określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Funkcję d, zwaną *funkcją Dirichleta*[1], można również określić jako granicę pewnego ciągu o wyrazach zależnych od x (por. zadanie 11 rozdz. II §1).

Omówimy teraz dokładniej funkcje, które zazwyczaj obejmuje się wspólną nazwą *funkcji elementarnych.*

2. Wielomiany. Dla ustalonej liczby całkowitej nieujemnej n funkcję

$$w(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

[1]Peter Gustaw Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), matematyk niemiecki, w 1826 r. został docentem na uniwersytecie we Wrocławiu, w późniejszych latach był profesorem uniwersytetu w Berlinie, następnie w Getyndze. Zajmował się teorią liczb, teorią szeregów i rachunkiem całkowym. Jako jeden z pierwszych zastosował metody analityczne w teorii liczb.

nazywamy *wielomianem stopnia* n, zaś liczby rzeczywiste a_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ *współczynnikami* wielomianu w. Wielomian jest funkcją określoną dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

W szczególności wielomian stopnia $n \leq 1$ jest *funkcją liniową*

$$f(x) = ax + b, \tag{1}$$

wielomian stopnia $n = 0$ jest *funkcją stałą*

$$f(x) = c.$$

Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta, wykresem funkcji stałej jest prosta równoległa do osi x-ów.

3. Funkcje wymierne. *Funkcją wymierną* nazywamy funkcję postaci

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdzie P, Q są wielomianami, przy czym Q nie jest funkcją stałą. Funkcja wymierna jest określona dla każdego $x \in \mathbb{R}$ nie będącego miejscem zerowym mianownika.

4. Funkcje monotoniczne i funkcja odwrotna. Mówimy, że funkcja f jest

rosnąca, jeżeli
$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 < x_2;$$

ściśle rosnąca, jeżeli
$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 < x_2;$$

malejąca , jeżeli
$$f(x_2) \geq f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 < x_2;$$

ściśle malejąca, jeżeli
$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 < x_2.$$

Funkcje (ściśle) rosnące lub (ściśle) malejące obejmujemy wspólną nazwą funkcji *(ściśle) monotonicznych.*

Przykład 1. Funkcja stała jest jednocześnie rosnąca i malejąca. Funkcja liniowa (1) jest ściśle rosnąca, gdy $a > 0$, ściśle malejąca, gdy $a < 0$, rosnąca i malejąca, gdy $a = 0$ (wtedy oczywiście jest funkcją stałą).

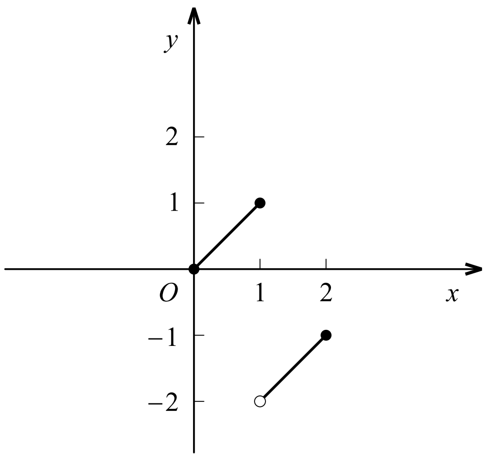
Mówimy, że funkcja f jest *różnowartościowa*, jeżeli

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 \neq x_2.$$

Oczywiście każda funkcja ściśle monotoniczna jest różnowartościowa, ale nie na odwrót. Na przykład funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1 \\ x - 3 & \text{dla} \quad 1 < x \le 2. \end{cases} \tag{2}$$

jest różnowartościowa ale nie jest ściśle monotoniczna w przedziale $[0, 2]$ (rys. 3).



[rys. 3]

Jeżeli f jest funkcją różnowartościową, to możemy określić nową funkcję g przyjmując

$$g(y) = x \tag{3}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = y. \tag{4}$$

Funkcja g jest dobrze określona na zbiorze wartości funkcji f, gdyż na mocy założenia każdej liczbie y należącej do tego zbioru odpowiada dokładnie jedna liczba x taka, że zachodzi (4). Funkcję g nazywamy *funkcją odwrotną* do funkcji f. Używane jest oznaczenie

$$g = f^{-1}.$$

Aby znaleźć funkcję odwrotną f^{-1} należy rozwiązać równanie (4) względem x (nie zawsze można to zrobić efektywnie).

Przykład 2. Niech

$$f(x) = ax + b$$

gdzie $a \neq 0$. Funkcja f jest ściśle monotoniczna (por. Przykład 1), a więc różnowartościowa. Rozwiązując równanie

$$y = ax + b$$

względem x otrzymujemy

$$x = \frac{y-b}{a}$$

zatem

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}.$$

Funkcja odwrotna jest również liniowa. Obie funkcje f, f^{-1} są określone na całym zbiorze $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 1. *Jeżeli f jest funkcją ściśle rosnącą (ściśle malejącą), to f^{-1} ma tą samą własność.*

DOWÓD. Dowód podamy dla funkcji ściśle rosnącej. Załóżmy, że

$$y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$$

wobec tego

$$x_1 = f^{-1}(y_1), \quad x_2 = f^{-1}(y_2).$$

Gdyby było $x_1 \geq x_2$, to na mocy założenia otrzymalibyśmy

$$y_1 \geq y_2$$

wbrew założeniu. □

5. Funkcja $\sqrt[n]{x}$. Funkcja

$$f(x) = x^n \tag{5}$$

zwana *funkcją potęgową o wykładniku naturalnym n* jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Z reguły mnożenia nierówności wynika, że

$$0 < x_1^n < x_2^n$$

dla $0 \leq x_1 < x_2$, zatem f jest ściśle rosnąca w przedziale $[0, \infty)$ i przyjmuje w tym przedziale wartości dodatnie. Zgodnie z rozważaniami punktu 7 rozdz. I §2 równanie

$$y = x^n$$

ma dla dowolnego $y \geq 0$ dokładnie jedno rozwiązanie

$$x = \sqrt[n]{y}.$$

Wobec tego

$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$

jest funkcją odwrotną do funkcji potęgowej f danej wzorem (5). Funkcja g jest określona w całym przedziale $[0,\infty)$.

6. Potęga o wykładniku wymiernym. Potęgę

$$a^w \qquad (w \in W)$$

określimy przy założeniu $a > 0$. Liczbę a nazywamy *podstawą potęgi*, liczbę w *wykładnikiem potęgi.*

Przyjmując

$$\begin{aligned} & a^1 = a, \qquad a^{n+1} = a^n \cdot a \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N} \\ & a^0 = 1, \\ (6) \qquad & a^w = \sqrt[q]{a^p} \quad \text{gdzie} \quad w = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N} \\ & a^{-w} = \frac{1}{a^w}, \end{aligned}$$

udowodnimy

Twierdzenie 2. *Potęga o wykładniku wymiernym ma następujące własności:*

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \qquad a^w > 0, \\ & \text{(ii)} \qquad a^{w+v} = a^w a^v, \\ & \text{(iii)} \qquad (a^w)^v = a^{wv} \qquad (a, b > 0;\ w, v \in W) \\ (7) \qquad & \text{(iv)} \qquad (ab)^w = a^w b^w \\ & \text{(v)} \qquad \textit{jeżeli} \quad w < v, \quad \textit{to} \\ & \quad a^w < a^v \qquad \textit{dla} \quad a > 1, \\ & \quad a^w > a^v \qquad \textit{dla} \quad a < 1. \end{aligned}$$

DOWÓD. Punkt (i) wynika z definicji potęgi. Dla dowodu punktów (ii) - (iv) zauważmy najpierw, że dla wykładników v, w naturalnych wynikają one z przemienności i łączności mnożenia liczb rzeczywistych. Dowód dla dowolnych wykładników wymiernych poprzedzimy lematami.

Lemat 1. *Jeżeli*

$$a^q = b^q \qquad (a, b > 0,\ q \in \mathbb{N})$$

to

$$a = b.$$

DOWÓD. Przypuśćmy, że $a > b$ - wówczas zgodnie z regułą mnożenia nierówności mamy $a^q > b^q$ wbrew założeniu. Podobnie okazujemy, że nie może być $a < b$. □

Lemat 2. *Przyjmując*

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[q]{a}}, \quad \beta = \sqrt[q]{\frac{1}{a}} \quad (a > 0,\ q \in \mathbb{N})$$

mamy

$$\alpha = \beta.$$

DOWÓD. Zgodnie z wprowadzonym oznaczeniem

$$\sqrt[q]{a} = \frac{1}{\alpha}$$

zatem zgodnie z definicją pierwiastka (por. pumkt 7 rozdz. I §2)

$$a = \frac{1}{\alpha^q}, \quad \frac{1}{a} = \beta^q$$

skąd wynika

$$\alpha^q = \beta^q$$

a to w oparciu o lemat 1 daje tezę. □

Lemat 3. *Dla $a > 0,\ p \in Z, q \in \mathbb{N}$ mamy*

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

DOWÓD. Dla $p \geq 0$ teza lematu wynika ze wzorów (6). Jeżeli $p < 0$, to zgodnie ze wzorami (6)

$$a^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^{-p}}}$$

oraz

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{\frac{1}{a^{-p}}}.$$

Korzystając z lematu 2 dostajemy tezę. □

Lemat 4. *Dla $a > 0,\ p \in Z, s \in \mathbb{N}$ mamy*

$$(a^p)^s = a^{ps}.$$

DOWÓD. Dla $p \geq 0$ teza lematu wynika ze wzorów (6). Dla $p < 0$ mamy, ponownie korzystając ze wzorów (6) i opierając sią na własnościach potęgi o wykładniku naturalnym

$$\begin{aligned}(a^p)^s &= (\frac{1}{a^{-p}})^s \\ &= \frac{1}{a^{-ps}} = a^{ps}.\end{aligned}$$

□

Lemat 5. *Jeżeli* $p, r \in Z$, *to*

$$a^p a^r = a^{p+r}.$$

DOWÓD. Dla $p, r > 0$ teza lematu była już omawiana (jest to własność (ii) dla wykładników naturalnych). Jeżeli przynajmniej jedna z liczb p, r jest zerem, równość jest oczywista. Pozostają do rozważenia przypadki

a.) liczby p, r są różnych znaków, niech na przykład $p < 0, r > 0$;

b.) $p < 0, r < 0$.

W przypadku b.) mamy zgodnie z (6)

$$\begin{aligned} a^p a^r &= \frac{1}{a^{-p}} \frac{1}{a^{-r}} \\ &= \frac{1}{a^{-p-r}} = \frac{1}{a^{-(p+r)}} = a^{p+r} \end{aligned}$$

zaś w przypadku a.)

$$a^p a^r = \frac{1}{a^{-p}} a^r = \frac{a^r}{a^{-p}}.$$

W ostatnim ułamku mamy w liczniku i w mianowniku potęgę o wykładniku naturalnym. Po skróceniu (należy rozróżnić przypadki: $-p > r, -p = r, -p < r$) dostajemy tezę lematu. □

Możemy teraz udowodnić własność (ii). Niech $w = \frac{p}{q}, v = \frac{r}{s}$ $(p, r \in Z;\ q, s, \in \mathbb{N})$ i niech

$$x = a^{w+v}, \quad y = a^w, \quad z = a^w.$$

Wystarczy udowodnić, że

$$x^{qs} = (yz)^{qs} \tag{8}$$

i skorzystać z lematu 1. Zgodnie z lematem 3 mamy

$$x^{qs} = a^{ps+rq}. \tag{9}$$

Z drugiej strony opierając się na własnościach (iii), (iv) dla wykładników naturalnych oraz na lematach 4, 5 dostajemy

$$\begin{aligned} (yz)^{qs} &= (y^q)^s (z^s)^q = (a^p)^s (a^r)^q \\ &= a^{ps} a^{rq} = a^{ps+rq}. \end{aligned} \tag{10}$$

Równość (8) wynika z (9) i (10).

Dalszy ciąg dowodu twierdzenia poprzedzimy kolejnymi lematami.

Lemat 6. *Jeśli*

$$x = \sqrt[q]{ab}, \quad y = \sqrt[q]{a}, \quad z = \sqrt[q]{b},$$
$$a, b > 0, \quad q \in \mathbb{N}.$$

to zachodzi równość

$$x = yz.$$

DOWÓD. Z definicji pierwiastka wynika, że

$$x^q = ab, \quad y^q = a, \quad z^q = b$$

wobec tego (na mocy własności (iv) dla wykładnikówe naturalnych)

$$x^q = y^q z^q = (yz)^q.$$

Stąd w oparciu o lemat 1 dostajemy tezę. □

Lemat 7. *Dla $a > 0, q, s \in \mathbb{N}$ zachodzi równość*

$$(\sqrt[q]{a})^s = \sqrt[q]{a^s}.$$

DOWÓD polega na indukcji względem s i wykorzystaniu lematu 6. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi. □

Lemat 8. *Zachodzi równość*

$$(a^{\frac{p}{q}})^r = a^{\frac{pr}{q}}$$

dla $a > 0, p, r \in Z, q \in \mathbb{N}$.

DOWÓD. Oznaczmy przez α, β odpowiednio lewą i prawą stronę równości. Dla $r = 0$ równość jest oczywista, gdyż $\alpha = \beta = 1$. Przeprowadzimy dowód dla $r \neq 0$ rozróżniając przypadki $r > 0$ oraz $r < 0$. Na mocy lematu 3 i definicji pierwiastka

$$\beta^q = a^{pr}.$$

Wystarczy zatem okazać, że

(11) $$\alpha^q = a^{pr}$$

a następnie skorzystać z lematu 1.

Jeżeli $r > 0$, to opierając się na własności (iii) dla wykładników naturalnych mamy

$$\alpha^q = (a^{\frac{p}{q}})^{rq}.$$

Korzystając z lematów 3, 4, 7 otrzymujemy stąd kolejno

$$\alpha^q = (\sqrt[q]{a^p})^{rq} = \sqrt[q]{(a^p)^{rq}} =$$
$$= \sqrt[q]{a^{prq}} = a^{pr}.$$

Dla $r < 0$ mamy z definicji potęgi o wykładniku ujemnym

$$\alpha^q = \left(\frac{1}{(a^{\frac{p}{q}})^{-r}}\right)^q$$

a zatem na mocy (iii) dla wykładników naturalnych

$$\alpha^q = \frac{1}{(a^{\frac{p}{q}})^{-rq}}.$$

Ponownie korzystając z lematów 3, 4, 7 otrzymujemy dalej

$$\alpha^q = \frac{1}{(\sqrt[q]{a^p})^{-rq}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(a^p)^{-rq}}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt[q]{a^{-prq}}} = \frac{1}{a^{-pr}} = a^{pr}.$$

Równość (11) została udowodniona w obu przypadkach. Dowód lematu jest zakończony. □

Udowodnimy teraz własność (iii). Oznaczmy przez x, y odpowiednio lewą i prawą stronę równości i niech

$$w = \frac{p}{q}, \quad v = \frac{r}{s} \qquad (p, r \in Z;\ q, s \in \mathbb{N}).$$

Na mocy lematu 3

$$y = \sqrt[qs]{a^{pr}}$$

zatem z definicji pierwiastka

(12) $$y^{qs} = a^{pr}.$$

Ponownie korzystając z lematu 3 i definicji pierwiastka otrzymujemy

$$x^s = (a^{\frac{p}{q}})^r$$

a więc zgodnie z lematem 8

$$x^s = a^{\frac{pr}{q}}.$$

Wykorzystując lematy 3 i 7 oraz własność (iii) dla wykładników naturalnych dostajemy stąd

$$x^{qs} = (x^s)^q = (a^{\frac{pr}{q}})^q =$$
$$= (\sqrt[q]{a^{pr}})^q = \sqrt[q]{a^{prq}}$$

skąd, ponownie korzystając z lematu 3,

(13) $$x^{qs} = a^{pr}.$$

W oparciu o lemat 1 dostajemy z (12), (13) żądaną równość $x = y$. □

Udowodnimy jeszcze dwa proste lematy.

Lemat 9. *Dla $a > 0$, $p \in Z$ zachodzi równość*

$$a^p = \frac{1}{a^{-p}}.$$

DOWÓD. Dla $p = 0$ równość jest oczywista (obie strony są równe 1), dla $p < 0$ wynika z definicji potęgi o wykładniku wymiernym ujemnym, zaś dla $p > 0$ również na mocy tej definicji

$$\frac{1}{a^{-p}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)} = a^p.$$

□

Lemat 10. *Dla dowolnych $a, b > 0, p \in Z$ zachodzi równość*

$$(ab)^p = a^p b^p.$$

DOWÓD. Dla $p = 0$ obie strony są równe 1, zaś dla $p > 0$ jest to własność (iv) dla wykładników naturalnych. Natomiast dla $p < 0$ mamy, ponownie korzystając z (iv) dla wykładników naturalnych i z lematu 9

$$\begin{aligned} a^p b^p &= \frac{1}{a^{-p}} \frac{1}{b^{-p}} \\ &= \frac{1}{a^{-p} b^{-p}} = \frac{1}{(ab)^{-p}} = (ab)^p \end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. □

Możemy teraz udowodnić własność (iv). Przyjmując

$$w = \frac{p}{q} \qquad (p \in Z, q \in \mathbb{N})$$

wprowadzimy oznaczenia

$$x = (ab)^{\frac{p}{q}}, \quad y = a^{\frac{p}{q}}, \quad z = b^{\frac{p}{q}}.$$

Aby udowodnić żądaną równość $x = yz$ wystarczy okazać, że

$$x^q = (yz)^q \tag{14}$$

i skorzystać z lematu 1. Z lematu 3 wynika, że

$$x = \sqrt[q]{(ab)^p}, \quad y = \sqrt[q]{a^p}, \quad z = \sqrt[q]{b^p}.$$

Wobec tego na mocy definicji pierwiastka

$$x^q = (ab)^p, \quad y^q = a^p, \quad z^q = b^p,$$

co po zastosowaniu lematu 10 daje

$$x^q = a^p b^p = y^q z^q$$

a stąd po wykorzystaniu (iv) dla wykładników naturalnych wynika (14).

Pozostała do udowodnienia własność (v). Najpierw zauważmy, że dla dowolnej liczby wymiernej w

$$1 = a^{w-w} = a^w a^{-w}$$

na mocy własności (ii), a stąd

(15) $$a^{-w} = \frac{1}{a^w} \quad \text{dla} \quad a > 0,\ w \in W.$$

Dowód własności (v) podamy dla $a > 1$. Dla $a < 1$ rozumowanie jest podobne i pozostawiamy je Czytelnikowi. Korzystając z (15) i z własności (ii) możemy nierówność (7) zapisać w równoważnej postaci

(16) $$a^{v-w} > 1$$

dla $w < v$, zaś dla dowodu (16) wystarczy okazać, że

(17) $$a^w > 1$$

dla $a > 1$ i dowolnej liczby wymiernej $w > 0$. Dowód (17) nie nastręcza trudności. Przede wszystkim dla dowolnego $b > 1, q \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[q]{b} > 1$$

-gdyby bowiem zachodziła nierówność przeciwna, to podnosząc obie strony do q-tej potęgi otrzymalibyśmy $b \leq 1$, co przeczy założeniu. Jeżeli teraz $w = \frac{p}{q}$, $(p, q \in \mathbb{N})$, to na mocy (6)

$$a^w = \sqrt[q]{b}$$

gdzie $b = a^p > 1$, zatem (17) zachodzi i w tym przypadku.

Dowód twierdzenia jest zakończony. □

7. Potęga o dowolnym wykładniku rzeczywistym. Dla dowolnie ustalonych $a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ przyjmiemy

(18) $$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{w_n},$$

jeżeli $\{w_n\}$ jest ciągiem liczb wymiernych takim, że

(19) $$\lim_{n\to\infty} w_n = \alpha.$$

Podobnie jak w punkcie 6 liczbę a nazwiemy *podstawą potęgi* zaś liczbę α - *wykładnikiem potęgi.*

Oczywiście należy wykazać, że przyjęta definicja jest poprawna, co sprowadza się do udowodnienia, że

(A) *dla dowolnie ustalonego* $\alpha \in \mathbb{R}$ *istnieje ciąg liczb wymiernych spełniający warunek* (19);

(B) *granica po prawej stronie (18) istnieje i nie zależy od wyboru ciągu* $\{w_n\}$.

DOWÓD **(A)**. Na mocy twierdzenia o liniowej gęstości zbioru liczb wymiernych (twierdzenie 5 rozdz. I §2) dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba wymierna w_n taka, że

$$\alpha - \frac{1}{n} < w_n < \alpha - \frac{1}{n+1}. \tag{20}$$

Z nierówności (20) i twierdzenia o trzech ciągach wynika, że spełniony jest warunek (19). Ponadto z (20) wynika, że

$$w_n < \alpha - \frac{1}{n+1} < w_{n+1}$$

zatem $\{w_n\}$ jest ciągiem rosnącym. □

W dalszym ciągu będziemy zakładali, że $a > 1$ (w przypadku $a \leq 1$ rozumowania przebiegają podobnie i pozostawiamy je Czytelnikowi jako ćwiczenie).

DOWÓD **(B)**. Z twierdzenia 2 punkt (v) wynika, że ciąg $\{a^{w_n}\}$ jest również rosnący oraz że jest on ograniczony z góry, gdyż nierówność

$$w_n < \alpha < [\alpha] + 1 = M$$

pociąga za sobą

$$a^{w_n} < a^M.$$

Na podstawie twierdzenia 5 rozdz. II §2 ciąg $\{a^{w_n}\}$ jest zbieżny. Granica po prawej stronie (18) istnieje więc, gdy jako ciąg liczb wymiernych aproksymujący α obierzemy ciąg $\{w_n\}$ określony w dowodzie **(A)**. Aby wykazać, że granica ta nie zależy od wyboru ciągu aproksymującego wykładnik α udowodnimy najpierw

Lemat 11. *Dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje liczba* $\delta > 0$ *taka, że*

$$|a^w - 1| < \varepsilon$$

dla wszystkich wymiernych w *spełniających nierówność*

$$|w| < \delta.$$

DOWÓD przeprowadzimy dla $w \geq 0$, dla $w < 0$ rozumowanie jest podobne i nie będziemy go powtarzać.

Jeśli liczba w spełnia nierówność

$$0 \le w \le \frac{1}{n} \tag{21}$$

dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to zgodnie z twierdzeniem 2

$$1 \le a^w \le \sqrt[n]{a}. \tag{22}$$

Przypomnijmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

(por. Przykład 13 rozdz. II §1). Wobec tego z (22) wynika, że do dowolnie ustalonego ε można dobrać $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, aby dla w spełniających (21) przy $n \ge n_\varepsilon$ zachodziła nierówność

$$1 < a^w < 1 + \varepsilon.$$

Zatem wystarczy przyjąć

$$\delta = \frac{1}{n_\varepsilon}$$

co kończy dowód lematu. □

Przypuśćmy teraz, że mamy inny ciąg liczb wymiernych $\{v_n\}$ również zbieżny do α. Na mocy twierdzenia 1 punkt (ii)

$$a^{v_n} = a^{w_n} a^{v_n - w_n}. \tag{23}$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} (v_n - w_n) = 0,$$

więc do liczby δ, o której mowa w lemacie 11, można dobrać N tak, by dla $n > N$ było

$$|v_n - w_n| < \delta. \tag{24}$$

Zgodnie z lematem 11 z nierówności (24) wynika

$$|a^{v_n - w_n} - 1| < \varepsilon$$

dla $n > N$, a więc

$$\lim_{n\to\infty} a^{v_n - w_n} = 1.$$

Stosując do (23) twierdzenie o granicy iloczynu otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} a^{v_n} = \lim_{n\to\infty} a^{w_n}$$

co kończy dowód **(B)**. □

Uwaga. Jeżeli α jest liczbą wymierną, to w definicji (18) możemy przyjąć $w_n = \alpha$ dla $n \in \mathbb{N}$. Widać stąd, że dla wykładników wymiernych nowa definicja potęgi pokrywa się z poprzednią wprowadzoną w punkcie 6.

Twierdzenie 3. *Potęga o wykładniku rzeczywistym ma następujące własności:*

(i) $a^\alpha > 0$,

(ii) $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$,

(iii) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$,

(iv) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$,

(v) *jeżeli* $\alpha < \beta$, *to*

$a^\alpha < a^\beta$ *gdy* $a > 1$,

$a^\alpha > a^\beta$ *gdy* $a < 1$,

(vi) *jeżeli* $0 < a < b$, $\alpha > 0$ *to*

$a^\alpha < b^\alpha$ *oraz* $a^{-\alpha} > b^{-\beta}$.

DOWÓD zaczniemy od punktów (ii) i (iv). Niech $\{w_n\}$, $\{v_n\}$ będą ciągami liczb wymiernych takimi, że

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \beta.$$

Na mocy twierdzenia 1 mamy

$$a^{w_n+v_n} = a^{w_n} a^{v_n}$$

a stąd po przejściu do granicy dostajemy (ii). Podobnie przebiega dowód (iv). Dowód (iii) zaczniemy od lematów.

Lemat 12. *Jeżeli* $a > 0$ *oraz* $\{a_n\}$ *jest ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym warunek*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

to

(25) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[q]{a_n} = \sqrt[q]{a}$$

dla dowolnie ustalonego $q \in \mathbb{N}$.

DOWÓD. Przypuśćmy że nie jest prawdą (25), wobec tego (por. rozdz. II §1 punkt 2) istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$, że nierówność epsilonowa nie zachodzi dla $\varepsilon = \varepsilon_0$ po odrzuceniu dowolnej skończonej ilości wyrazów ciągu $\{\sqrt[q]{a_n}\}$. Zatem do dowolnego $k \in \mathbb{N}$ można dobrać wskaźnik $n_k > k$ tak, że zachodzi jedna z nierówności

$$\sqrt[q]{a_{n_k}} \le \sqrt[q]{a} - \varepsilon_0$$

lub

$$\sqrt[q]{a_{n_k}} \ge \sqrt[q]{a} + \varepsilon_0$$

dla $k \in \mathbb{N}$. Z nierówności tych otrzymujemy

$$a_{n_k} \le (\sqrt[q]{a} - \varepsilon_0)^q = a_1 < a$$

lub

$$a_{n_k} \ge (\sqrt[q]{a} + \varepsilon_0)^q = a_2 > a.$$

Oznacza to, że istnieje otoczenie (a_1, a_2) punktu a nie zawierające żadnego wyrazu podciągu $\{a_{n_k}\}$, co przeczy założeniu lematu. □

Natychmiastowym wnioskiem z lematu 12 jest

Lemat 13. *Przy założeniach lematu* 12

$$\lim_{n\to\infty} a_n^w = a^w$$

dla dowolnie ustalonej liczby wymiernej w.

DOWÓD. Niech

$$w = \frac{p}{q} \quad (p \in Z, q \in \mathbb{N}).$$

Na podstawie lematu 3 (punkt 6)

$$a_n^w = \sqrt[q]{a_n^p}.$$

Z twierdzeń o granicy iloczynu i ilorazu wynika

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = a^p,$$

zatem na mocy lematu 12

$$\lim_{n\to\infty} a_n^w = \sqrt[q]{a^p} = a^w.$$

□

Lemat 14. *Dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje liczba* $\eta > 0$ *taka, że*

$$|a^\alpha - 1| < \varepsilon \tag{26}$$

dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}$ *spełniających nierówność*

$$|\alpha| < \eta.$$

DOWÓD. Niech $\{w_n\}$ będzie ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do α i niech $\eta = \frac{1}{2}\delta$. Wówczas dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$|w_n| < \delta$$

zatem zgodnie z lematem 11 (z zastąpieniem ε przez $\frac{\varepsilon}{2}$)

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} < a^{w_n} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przechodząc do granicy zgodnie z (18) dostajemy

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq a^\alpha \leq < 1 + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon$$

co daje (26). □

Lemat 15. *Jeżeli* $\{\alpha_n\}$ *jest dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym warunek*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

to

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = 1.$$

DOWÓD. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$ i niech η będzie liczbą dobraną do ε, o której mowa w lemacie 14. Na mocy założenia istnieje liczba N taka, że dla $n > N$

$$|\alpha_n| < \eta.$$

Z lematu 14 wynika, że wobec tego dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$|a^{\alpha_n} - 1| < \varepsilon$$

co kończy dowód lematu. □

Przechodząc do dowodu (iii) załóżmy, że

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \beta \tag{27}$$

gdzie w_n, v_n są liczbami wymiernymi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Dla dowolnie ustalonej liczby wymiernej w mamy

$$(a^{w_n})^w = a^{w_n w}$$

na mocy twierdzenia 2, skąd po przejściu do granicy wynika zgodnie z lematem 13

$$(a^{\alpha})^w = a^{\alpha w} \tag{28}$$

dla dowolnego $w \in W$. Przyjmując $w = v_n$ w równości (28) i korzystając z udowodnionego już punktu (ii) otrzymujemy

$$(a^{\alpha})^{v_n} = a^{(\alpha - w_n)v_n} a^{w_n v_n}$$

co po przejściu do granicy w oparciu o lemat 15 daje tezę (iii).

Udowodnimy teraz (v) zakładając $a > 1$ (dowód dla $a < 1$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie). Zauważmy najpierw, że ciągi $\{w_n\}$, $\{v_n\}$ spełniające (26) można obrać w taki sposób, by pierwszy z nich był ciągiem rosnącym a drugi ciągiem malejącym. Wystarczy w tym celu przyjąć

$$\alpha - \frac{1}{n} < w_n < \alpha - \frac{1}{n+1}, \quad \beta + \frac{1}{n+1} < v_n < \beta + \frac{1}{n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, co jest możliwe wobec liniowej gęstości zbioru liczb wymiernych. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$w_n < v_n$$

a zatem na mocy twierdzenia 2

$$a^{w_n} < a^{v_n}$$

co po przejściu do granicy daje

$$a^{\alpha} \leq a^{\beta}. \tag{29}$$

Korzystając z udowodnionego już punktu (ii) i rozumując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2 okazujemy, że dla dowodu (v) wystarczy okazać, że

$$a^{\gamma} > 1 \tag{30}$$

dla $\gamma > 0$. Obierzmy liczbę $k \in \mathbb{N}$ tak, by

$$0 < \frac{1}{k} < \gamma$$

(jest to możliwe na mocy zasady Archimedesa - por. twierdzenie 2 rozdz. I §2). Wówczas przyjmując $\alpha = \frac{1}{k}$, $\beta = \gamma$ w (29) dostajemy

$$a^{\frac{1}{k}} \leq a^{\gamma}.$$

Z drugiej strony na mocy twierdzenia 2 mamy

$$1 = a^0 < a^{\frac{1}{k}}.$$

Ostatnie dwie nierówności dają (30) co kończy dowód (v).

Możemy teraz udowodnić punkt (i). Jeżeli $\alpha \geq 0$ to zgodnie z (29)

$$a^{\alpha} \geq 1 > 0.$$

Jeżeli $\alpha < 0$, to korzystając z (ii) okazujemy łatwo, że

$$a^{\alpha} = \frac{1}{a^{-\alpha}}$$

a więc i w tym przypadku mamy nierówność (i).

Pozostał do udowodnienia punkt (vi). Z założenia mamy

$$(\frac{b}{a})^0 = 1 < \frac{b}{a}$$

wobec tego na mocy (v)

$$(\frac{b}{a})^{-\alpha} < 1 < (\frac{b}{a})^{\alpha}$$

a z tej nierówności wynika (vi).

Twierdzenie jest udowodnione. □

8. Funkcje: wykładnicza, logarytm i potęgowa. *Funkcją wykładniczą o podstawie* a (gdzie $a > 0$ jest daną liczbą) nazywamy funkcję

$$f(x) = a^x \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{31}$$

Zgodnie z twierdzeniem 3 funkcja wykładnicza jest ściśle rosnąca gdy $a > 1$ i ściśle malejąca gdy $a < 1$. *W dalszym ciągu będziemy rozważali wyłącznie funkcję wykładniczą o podstawie* $a > 1$. Bardzo ważny w analizie jest przypadek gdy $a = e$ (por. rozdz. II §2 punkt 5) gdyż, jak zobaczymy w dalszym ciągu, taka funkcja wykładnicza ma szczególnie wygodne własności rachunkowe. Używane jest oznaczenie

$$e^x = \exp x.$$

Funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej (31) nazywamy *logarytmem* (lub *funkcją logarytmiczną*) *o podstawie* a. Przy założeniu $a > 1$ jest to funkcja ściśle rosnąca (por. twierdzenie 1). Z definicji równania

$$x = a^y \tag{32}$$

oraz

$$y = \log_a x$$

są równoważne. Funkcja $\log_a$ jest określona na zbiorze wartości funkcji wykładniczej. Z twierdzenia 3 wynika, że zbiór ten zawiera się w przedziale $(0, \infty)$. W dalszym ciągu wykładu zobaczymy, że jest on identyczny z przedziałem $(0, \infty)$, zatem funkcja logarytm określona wzorem (33) jest określona dla wszystkich $x > 0$. W przypadku gdy $a = e$ wzory (32), (33) określają *logarytm naturalny* który oznaczamy symbolem log (bez podawania podstawy). Z własności potęgi o wykładniku rzeczywistym wynikają własności rachunkowe logarytmu, które sformułujemy w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 4. *Dla* $a > 1$, $x, x_1, x_2 > 0$ *oraz dowolnego* $\alpha \in \mathbb{R}$ *zachodzą wzory*

$$\text{(i)}\quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$
$$\text{(ii)}\quad \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

DOWÓD przeprowadzimy przy dodatkowym założeniu, że liczby x, x_1, x_2 należą do zbioru wartości funkcji wykładniczej (31). Wobec tego

$$x = a^y, \quad x_1 = a^{y_1}, \quad x_2 = a^{y_2}$$

dla pewnych $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ a to oznacza, że

$$y = \log_a x, \quad y_1 = \log_a x_1, \quad y_2 = \log_a x_2. \tag{34}$$

Na mocy twierdzenia 3 punkt (ii)

$$x_1 x_2 = a^{y_1 + y_2}$$

zatem

$$y_1 + y_2 = \log_a (x_1 x_2) \tag{35}$$

zaś wobec punktu (iii) tegoż twierdzenia

$$x^\alpha = a^{\alpha y}$$

skąd

$$\alpha y \log_a x^\alpha. \tag{36}$$

Porównując (34), (35), (36) dostajemy tezę twierdzenia. □

Przy danej liczbie $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcję

$$f(x) = x^\alpha \qquad (x > 0)$$

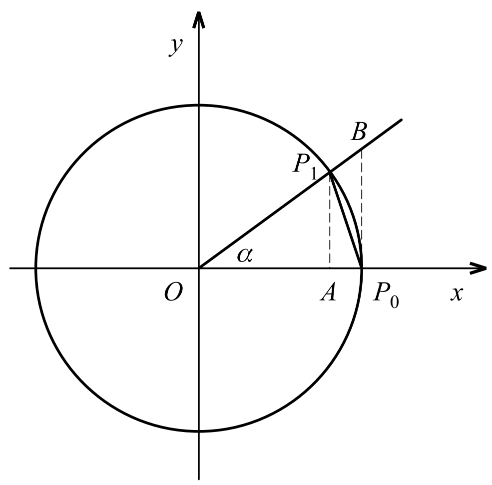
nazywamy *funkcją potęgową o wykładniku* α. Zgodnie z twierdzeniem 3 punkt (vi) jest ona ściśle rosnąca, gdy $\alpha > 0$ i ściśle malejąca, gdy $\alpha < 0$.

9. Funkcje trygonometryczne. Wprowadźmy na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych okrąg o środku w początku układu i promieniu jednostkowym, oznaczmy przez P_0 jego punkt przecięcia z dodatnią półosią x-ów (rys. 4) i niech $P_1 = (x_1, y_1)$ będzie dowolnie obranym punktem okręgu. Oznaczmy przez α kąt, o jaki należy obrócić półprostą OP_0 tak, by punkt P_0 pokrył się z punktem P_1 zaś przez $s(\alpha)$ długość łuku okręgu przebieganego przy tym obrocie przez punkt P_0. Jako miarę kąta α (zwaną *miarą łukową*) przyjmiemy

(i) $s(\alpha)$ gdy obrót odbywał się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,

(ii) $-s(\alpha)$ gdy obrót odbywał się zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

W dalszym ciągu miarę łukową kąta α będziemy oznaczać tą samą literą α.



[rys. 4]

Przypomnimy znane z kursu szkolnego definicje funkcji trygonometrycznych kąta α (którego miara może przyjmować dowolne wartości rzeczywiste, dodatnie lub ujemne)

$$\sin\alpha = y_1, \qquad \cos\alpha = x_1,$$
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1} \ (x_1 \neq 0), \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{x_1}{y_1} \ (y_1 \neq 0)$$

Z sensu geometrycznego podanych definicji łatwo wynikają własności tych funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a.) okresowość} \quad \sin(\alpha+2\pi) &= \sin\alpha, \\ \cos(\alpha+2\pi) &= \cos\alpha, \\ \mathrm{tg}(\alpha+\pi) &= \mathrm{tg}\alpha, \\ \mathrm{ctg}(\alpha+\pi) &= \mathrm{ctg}\alpha, \end{aligned}$$

$$\text{b.)} \quad \sin 0 = \sin\pi = 0, \quad \sin\frac{1}{2}\pi = 1, \sin\frac{3}{2}\pi = -1,$$
$$\cos 0 = 1, \cos\frac{1}{2}\pi = \cos\frac{3}{2}\pi = 0, \cos\pi = -1,$$

c.) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$

d.) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$

Przypomnimy jeszcze wzory

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{37}$$

z których wynika po uwzględnieniu d.)

$$\begin{aligned} 2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta), \\ 2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta), \\ 2\sin\alpha\sin\beta &= \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta). \end{aligned} \tag{38}$$

Wzory (38) mają zastosowanie w rachunku całkowym.

Zakładając, że $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ udowodnimy teraz pewne nierówności. Oznaczmy przez A rzut prostopadły punktu P_1 na oś x-ów i przez B punkt przecięcia prostopadłej do osi x-ów wystawionej w punkcie P_0 z półprostą OP_1 (rys. 4).Z trójkąta P_1AP_0 wynika, że

$$|P_1A| < |P_0P_1|,$$

ponadto długość cięciwy P_0P_1 jest mniejsza niż długość łuku P_0P_1, zatem

$$0 < \sin\alpha < \alpha.$$

Jak widać z rysunku, wycinek koła P_0OP_1 jest zawarty w trójkącie P_0OB, zaś odpowiednia nierówność dla pól ma postać

$$\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Z dwóch ostatnich nierówności wynika, że

$$0 < \sin\alpha < \alpha < \mathrm{tg}\alpha \tag{39}$$

a stąd

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1. \tag{40}$$

Z trójkąta AOP_1 mamy ponadto

$$1 - y_1 < x_1$$

czyli

$$1 - \sin\alpha < \cos\alpha < 1. \tag{41}$$

Nierówności (39), (40), (41) będą wykorzystane w dalszym ciągu przy badaniu funkcji trygonometrycznych.

10. Funkcje odwrotne do trygonometrycznych. Funkcje trygonometryczne

$$\sin x, \quad ,\cos x, \quad \mathrm{tg}x, \quad \mathrm{ctg}x$$

są ściśle monotoniczne odpowiednio w przedziałach

$$[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi], \quad [0, \pi], \quad (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi), \quad (0, \pi)$$

istnieją więc w tych przedziałach funkcje odwrotne. Przyjmujemy, że

$$\begin{array}{llll} y = \arcsin x & \text{gdy} & x = \sin y, & -\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi, \\ y = \arccos x & \text{gdy} & x = \cos y, & 0 \leq y \leq \pi, \\ y = \mathrm{arctg}\, x & \text{gdy} & x = \mathrm{tg}\, y, & -\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi, \\ y = \mathrm{arcctg}\, x & \text{gdy} & x = \mathrm{ctg}\, y, & 0 < y < \pi. \end{array}$$

Wprowadzone w ten sposób funkcje odwrotne do trygonometrycznych noszą nazwę *funkcji kołowych* lub *cyklometrycznych.*

11. Funkcja złożona (superpozycja). Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$, zaś g funkcją określoną na zbiorze $f(D)$. Możemy wówczas utworzyć nową funkcję

$$h(x) = g(y) \quad \text{gdzie} \quad y = f(x),\ x \in D$$

czyli

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in D.$$

Funkcję h nazywamy *superpozycją funkcji* f, g (lub *funkcją złożoną z funkcji* f, g). Używany jest zapis

$$h = g \circ f$$

oraz

$$h(x) = (g \circ f)(x).$$

Przykład 3. Niech

$$f(x) = 1 + \sin x, \quad g(y) = \sqrt{y}.$$

Funkcja g jest określona dla $y \geq 0$, zaś

$$f(x) \geq 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wobec tego funkcja złożona

$$h(x) = \sqrt{1 + \sin x}$$

jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 4. Niech

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(y) = y^{\sqrt{3}}.$$

Funkcja potęgowa g jest określona dla $y > 0$. Wobec tego superpozycja $h = g \circ f$ jest określona tylko dla takich wartości argumentu x, dla których f przyjmuje wartości dodatnie. Aby je znaleźć rozwiązujemy nierówność

$$x^2 - 1 > 0,$$

którą można zapisać w równoważnej postaci

$$|x| > 1.$$

Wobec tego funkcja

$$h(x) = (x^2 - 1)^{\sqrt{3}}$$

jest określona na zbiorze $D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Na zakończenie wprowadzimy jeszcze dwie definicje. Dla uproszczenia założymy, że funkcja f jest określona na całym zbiorze $\mathbb{R}$.
Funkcja f jest
parzysta jeżeli $f(-x) = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$,
nieparzysta jeżeli $f(-x) = -f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.
Jak łatwo zauważyć, podane definicje zachowują sens, gdy dziedzina funkcji D ma tą własność, że dla każdego $x \in D$ również $-x \in D$.

Przykładem funkcji parzystej jest funkcja cosinus, gdyż

$$\cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

funkcją nieparzystą jest sinus, gdyż

$$\sin(-x) = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi y-ów, wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.
♡ ♡ ♡

Zadania.

1. W jakich przedziałach funkcja

$$y = ax^2 + bx + c$$

jest ściśle monotoniczna? W każdym z tych przedziałów znaleźć funkcję odwrotną.
Wskazówka. Przedstawić trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.

2.Udowodnić, że

$$\text{(i)} \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi,$$

$$\text{(ii)} \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{1}{2}\pi.$$

3. Które z podanych funkcji są
   a.) ściśle monotoniczne,
   b.) różnowartościowe.

Narysować ich wykresy. W przypadku funkcji różnowartościowej znaleźć funkcję odwrotną.

$$f(x) = x^2 \quad (x \geq 1),$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ x - 1 & \text{dla} \quad 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1, \\ -2 & \text{dla} \quad x = -2, \\ 2 & \text{dla} \quad x = 2, \end{cases}$$

$$r(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}x - \frac{\pi}{2} & \text{dla} \quad x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Które z podanych fukcji są
   a.) parzyste,
   b.) nieparzyste?

$$f(x) = x \sin x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 \quad \text{dla} \quad x = -2\pi, \\ \cos x \quad \text{dla} \quad -\pi \leq x \leq \pi, \\ 1 \quad \text{dla} \quad x = 2\pi, \end{cases}$$

$$d(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{dla } x \text{ wymiernych}, \\ 0 \quad \text{dla } x \text{ niewymiernych}. \end{cases}$$

5. Na przykładzie funkcji

$$f(x) = x + \pi, \qquad g(x) = \sin x$$

pokazać, że funkcje złożone $f \circ g$ oraz $g \circ f$ nie są identyczne (superponowanie funkcji nie jest działaniem przemiennym).

6. Znaleźć dziedzinę podanych funkcji:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1},$$
$$g(x) = (x^2 + x - 2)^{\sqrt{2}},$$
$$h(x) = \frac{x \sin x}{x^2 - 2x},$$
$$p(x) = \sqrt{e^{1-x^2} - 1}.$$

Które z tych funkcji są
   a.) parzyste,
   b.) nieparzyste?

7. Niech
   (A.) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sin x - \frac{1}{2}$,
   (B.) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2 - 4$.
Znaleźć funkcje złożone $f \circ g$ oraz $g \circ f$ i podać ich dziedziny.

8. Udowodnić, że każda funkcja określona dla $x \in \mathbb{R}$ daje się przedstawić jako suma funkcji parzystej i nieparzystej.
Wskazówka. Zauważyć, że funkcja

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$

jest parzysta, zaś funkcja
$$h(x) = f(x) - f(-x)$$
jest nieparzysta.

9. Niech f, g będą funkcjami liniowymi spełniającymi nierówności
$$f(a) \leq g(a), \quad f(b) \leq g(b) \quad (a < b).$$
Udowodnić, że nierówność
$$f(x) \leq g(x)$$
jest spełniona w całym przedziale $[a, b]$. Podać sens geometryczny.