## §2. Granica funkcji.

♡ ♡ ♡

**1. Definicja granicy funkcji.** Niech $f$ będzie funkcją określoną w całym zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ i niech $a, g$ będą dwoma elementami prostej rozszerzonej $\mathbb{R}_\infty$ (a więc liczbami rzeczywistymi lub elementami "niewłaściwymi" $\infty, -\infty$.) Mówimy, że *funkcja $f$ ma granicę $g$ przy $x \to a$*, jeżeli dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $\{x_n\}$ spełniającego warunki

$$(\alpha) \qquad x_n \neq a \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(\beta) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

zachodzi

$$(\gamma) \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Zapisujemy

$$\lim_{x\to a} f(x) = g.$$

W przypadku gdy $a \in \mathbb{R}$, zamiast *granica funkcji $f$ przy $x \to a$* można mówić również *granica funkcji $f$ w punkcie $a$*. Jeżeli $g = \infty$ lub $g = -\infty$, to mówimy, że funkcja $f$ ma *granicę niewłaściwą* przy $x \to a$.

**Przykład 1.** Niech $a = \infty$, niech

$$f(x) = x^2 + 3x - 1$$

i niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki $(\alpha), (\beta)$. Oznacza to, że

$$(1) \qquad x_n \to \infty,$$

zaś warunek $(\alpha)$ jest spełniony automatycznie, gdyż z założenia $x_n \in \mathbb{R}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Okażemy, że ciąg $\{f(x_n)\}$ jest rozbieżny do $\infty$. Niech $P$ będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Musimy udowodnić, że można dobrać $N$ tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$(2) \qquad f(x_n) > P.$$

Z założenia (1) wynika, że do dowolnie obranej liczby $Q$ można tak dobrać $N_1$ aby spełniony był warunek

$$x_n > Q \quad \text{dla} \quad n > N_1.$$

Zakładając, że $Q > 1$ mamy stąd

$$x_n^2 + 3x_n - 1 > 4Q - 1.$$

Nierówność (2) będzie spełniona, jeżeli obierzemy liczbę $Q$ tak, by

$$4Q - 1 > P,$$

na przykład możemy przyjąć

$$Q = \max(1, \frac{1}{4}P + 1).$$

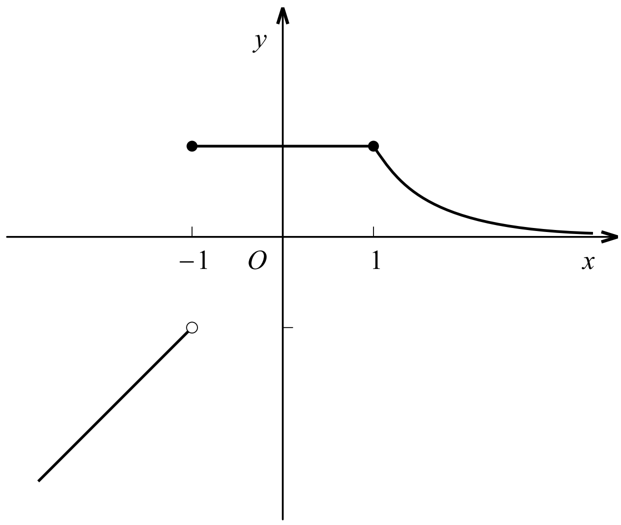
Wówczas przyjmując $N = N_1$ widzimy, że nierówność (2) jest spełniona dla $n > N$, co kończy dowód. Zatem

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 + 3x - 1) = \infty.$$

□

**Przykład 2.** Niech (rys. 5)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x < -1, \\ 1 & \text{dla} \quad |x| \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$$




[rys. 5]

i niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem rozbieżnym do $\infty$. Wobec tego do dowolnej liczby $P$ można tak dobrać $N$, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$x_n > P.$$

Przyjmując $P = 1$ mamy zatem dla $n > N_1$

(3)
$$f(x_n) = \frac{1}{x_n}.$$

Okażemy, że ciąg (3) jest zbieżny do zera. Niech $\varepsilon$ będzie dowolnie obraną liczbą dodatnią. Nierówność epsilonowa

(4)
$$|\frac{1}{x_n}| < \varepsilon$$

będzie spełniona, jeżeli założymy, że

$$x_n > \frac{1}{\varepsilon},$$

zaś ta ostatnia nierówność zachodzi dla $n > N_2$, gdzie $N_2$ jest dobrane do liczby $P = \frac{1}{\varepsilon}$. Zatem nierówność epsilonowa (4) jest spełniona dla $n > \max(N_1, N_2)$ a to oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

Okazaliśmy więc, że

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

□

Zbadamy teraz granicę funkcji $f$ przy $x \to -\infty$. Niech $\{y_n\}$ będzie dowolnym ciągiem rozbieżnym do $-\infty$. Wobec tego do dowolnej liczbu $p$ można dobrać $N$ tak, by zachodziła nierówność

$$y_n < p$$

dla $n > N$. Zakładając, że $p < -1$ mamy wówczas dla $n > N$

$$f(y_n) = y_n < p,$$

a to oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -\infty.$$

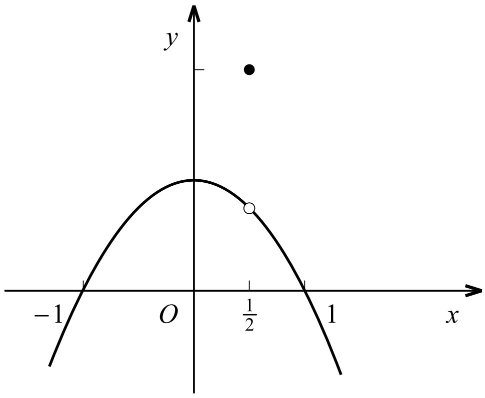
Zatem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

□

**Przykład 3.** Niech (rys. 6)

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{dla} \quad x \neq \frac{1}{2},$$
$$f(\frac{1}{2}) = 2.$$




[rys. 6]

Znajdziemy granicę funkcji $f$ przy $x \to \frac{1}{2}$. Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}, \quad x_n \neq \frac{1}{2} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wobec tego

$$f(x_n) = 1 - x_n^2$$

i stosując twierdzenia o działaniach na granicach udowodnione dla ciągów (rozdz. II §1) stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{3}{4}.$$

Zatem

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \frac{3}{4}.$$

□

Zauważmy, że w podanym przykładzie granica funkcji w punkcie $x = \frac{1}{2}$ nie jest równa wartości funkcji w tym punkcie.

Z definicji granicy funkcji wynika, że liczba $g$ spełniająca $(\gamma)$ musi być niezależna od sposobu w jaki obieramy ciąg $\{x_n\}$ spełniający warunki $(\alpha), (\beta)$. Stąd prosty sposób okazywania, że granica funkcji przy $x \to a$ nie istnieje: wystarczy obrać dwa ciągi $\{x'_n\}, \{x''_n\}$, oba spełniające $(\alpha), (\beta)$, w taki sposób, by granice

$$g' = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$$

oraz

$$g'' = \lim_{n\to\infty} f(x''_n)$$

były różne.

**Przykład 4.** Okażemy, że nie istnieje

$$\lim_{x\to\infty} \cos x.$$

Przyjmijmy

$$x'_n = 2n\pi, \quad x''_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2},$$

wówczas

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n = \infty,$$

oba ciągi spełniają więc warunki $(\alpha), (\beta)$. Natomiast

$$f(x'_n) = 1, \quad f(x''_n) = 0$$

zatem $g' = 1, g'' = 0$, a więc $g' \neq g''$. □

**2. Sąsiedztwo punktu.** Przez *sąsiedztwo* $S(a)$ *punktu* $a \in \mathbb{R}$ rozumiemy zbiór postaci

$$S(a) = U(a) \setminus \{a\},$$

gdzie $U(a)$ jest otoczeniem punktu $a$ (por. rozdz.II §1 punkt 8). Jeżeli

$$c < a < d$$

oraz

$$U(a) = (c, d)$$

to zbiór $S(a)$ można zapisać w postaci

$$S(a) = (c, a) \cup (a, d).$$

W szczególności obierając jako otoczenie punktu $a$ jego otoczenie epsilonowe

$$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

(gdzie $\varepsilon$ jest ustaloną liczbą dodatnią) otrzymujemy *sąsiedztwo epsilonowe*

$$S_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon).$$

W przypadku $a = \infty$ lub $a = -\infty$ *sąsiedztwem punktu* $a$ nazwiemy każde jego otoczenie, czyli

każdy przedział $(P, \infty)$ gdy $a = \infty$

względnie

każdy przedział $(-\infty, p)$ gdy $a = -\infty$.

Podając w poprzednim punkcie definicję granicy funkcji $f$ przy $x \to a$ założyliśmy, że funkcja $f$ jest określona w całym zbiorze liczb rzeczywistych. Czytelnik z łatwością zauważy, że definicja ta pozostaje poprawna, gdy założymy, że funkcja $f$ jest określona jedynie w pewnym sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$.

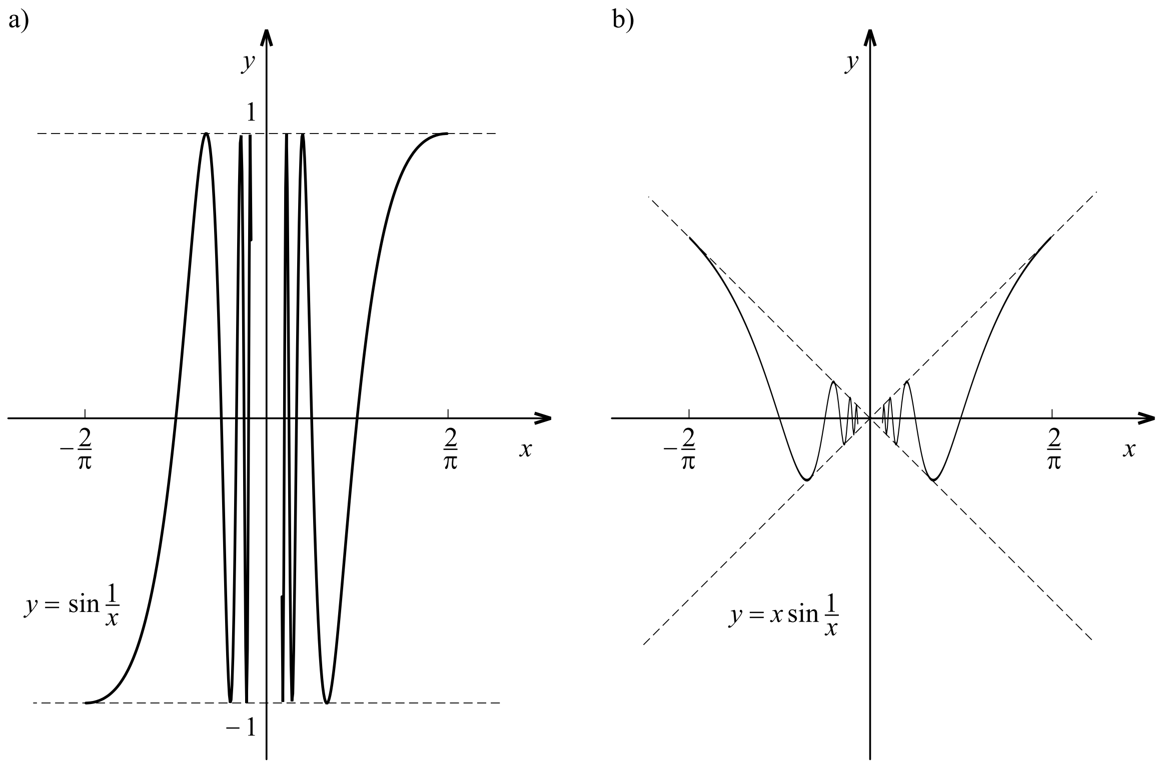
**Przykład 5.** Zbadamy istnienie granic

$$\text{(i)} \qquad \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

oraz

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

(rys. 7a, 7b).




[rys. 7]

Obie funkcje są określone dla $x \neq 0$ a więc w szczególności w zbiorze $(-\frac{2}{\pi}, 0) \cup (0, \frac{2}{\pi})$, który jest sąsiedztwem punktu $a = 0$.

W przykładzie (i) przyjmijmy

$$x_n' = \frac{1}{n\pi}, \quad x_n'' = \frac{2}{(4n+1)\pi}.$$

Oba ciągi spełniają warunki $(\alpha), (\beta)$ punktu 1 dla $a = 0$, ale

$$\sin\frac{1}{x_n'} = 0, \quad \sin\frac{1}{x_n''} = 1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

więc granice ciągów $\{\sin\frac{1}{x_n'}\}$ i $\{\sin\frac{1}{x_n''}\}$ są różne. Wobec tego granica w przykładzie (i) nie istnieje. $\square$

Przechodząc do przykładu (ii) załóżmy, że $\{x_n\}$ jest dowolnym ciągiem spełniającym warunki

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad x_n \neq 0.$$

Ponieważ

$$|\sin \frac{1}{x_n}| \leq 1$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, więc na mocy twierdzenia 4 rozdz. II §1

$$\lim_{n\to\infty} x_n \sin \frac{1}{x_n} = 0.$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

□

**3. Działania na granicach.** Twierdzenia o działaniach na granicach udowodnione dla ciągów w rozdz. II §1 przenoszą się łatwo na przypadek granicy funkcji. Zachodzi mianowicie

**Twierdzenie 1.** *Zakładamy, że funkcje $f, g$ są określone w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$ i że mają skończoną granicę przy $x \to a$. Wówczas istnieją granice przy $x \to a$ funkcji $f(x) \pm g(x)$ oraz $f(x)g(x)$, przy czym zachodzą równości*

$$\lim_{x\to a}\Big(f(x) \pm g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x), \tag{5}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big). \tag{6}$$

*Jeżeli założymy dodatkowo, że*

$$\lim_{x\to a} g(x) \neq 0,$$

*to $g(x) \neq 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu $a$ oraz istnieje granica przy $x \to a$ funkcji $\frac{f(x)}{g(x)}$, przy czym*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}. \tag{7}$$

**Twierdzenie 2.** *Załóżmy, że funkcje $f, g$ określone w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$ spełniają nierówność*

$$f(x) \leq g(x)$$

*oraz że funkcje te mają skończone granice przy $x \to a$. Wówczas*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Prawdziwy jest również odpowiednik twierdzenia o trzech ciągach.

**Twierdzenie 3 (o trzech funkcjach).** *Załóżmy, że funkcje $f, g, h$ określone w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$ spełniają w tym sąsiedztwie nierówności*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

*oraz że*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = G,$$

*gdzie $G$ jest liczbą rzeczywistą. Wówczas*

$$\lim_{x\to a} g(x) = G.$$

Udowodnimy twierdzenie 1 w przypadku ilorazu funkcji. Przypuśćmy, że nie istnieje sąsiedztwo punktu $a$ o którym mowa w tezie twierdzenia. Oznacza to, że w każdym sąsiedztwie punktu $a$ funkcja $g$ ma miejsca zerowe. Wobec tego istnieje ciąg $\{b_n\}$ taki, że

$$b_n \neq a, \quad a - \frac{1}{n} < b_n < a + \frac{1}{n}$$

oraz

$$g(b_n) = 0.$$

Ciąg $\{b_n\}$ czyni zadość warunkom $(\alpha)$, $(\beta)$ punktu 1, zatem

$$\lim_{n\to\infty} g(b_n) = \lim_{x\to 0} g(x) \neq 0,$$

co przeczy poprzedniej równości. Zatem w pewnym sąsiedztwie punktu $a$ funkcja $g$ nie znika, a więc iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest dobrze określony.

Równości (5), (6), (7) oraz twierdzenia 2 i 3 otrzymujemy łatwo z definicji granicy funkcji stosując odpowiednie twierdzenia o ciągach. Szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi. □

**Przykład 6.** Udowodnimy, że

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0. \tag{8}$$

Oprzemy się na nierówności (39) §1, z której wynika

$$0 < \sin x < x = |x|$$

dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Przyjmując $y = -x$ mamy

$$\sin y = -\sin x,$$

a stąd

$$-|y| = y < \sin y < 0$$

dla $-\frac{\pi}{2} < y < 0$. Zatem

$$-|x| < \sin x < |x| \tag{9}$$

dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Z nierówności (9) otrzymujemy (8) w oparciu o twierdzenie 3. □

**Przykład 7.** Okażemy, że

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1. \tag{10}$$

Z nierówności (41) §1 mamy

$$1 - \sin x \leq \cos x \leq 1$$

dla $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Wykorzystując parzystość funkcji cos dostajemy

$$1 - \sin |x| \leq \cos x \leq 1$$

dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a stąd już wynika (10) w oparciu o Przykład 6 i twierdzenie 3. □

**Przykład 8.** Okażemy, że

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{11}$$

Zauważmy, że funkcja

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

jest określona dla wszystkich $x \neq 0$, a więc w dowolnym sąsiedztwie punktu $x = 0$. Z nierówności (40) §1 mamy

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{12}$$

dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$, przy tym obie funkcje występujące w (12) są parzyste, a więc nie zmieniają wartości po zastąpieniu $x$ przez $-x$. Wobec tego nierówność (12) jest prawdziwa dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Korzystając z Przykładu 7 i twierdzenia o trzech funkcjach (twierdzenie 3) otrzymujemy (11). □

## 4. Definicja Cauchy'ego granicy funkcji.

**Twierdzenie 4.** *Niech $f$ będzie funkcją określoną w sąsiedztwie $S$ punktu $a \in \mathbb{R}$ i niech $g$ będzie liczbą rzeczywistą. Wówczas*

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \tag{13}$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

(C) *do dowolnego* $\varepsilon > 0$ *można dobrać liczbę* $\delta > 0$ *tak, aby dla* $x$ *spełniających nierówność*

$$0 < |x - a| < \delta \tag{14}$$

*było*

$$|f(x) - g| < \varepsilon. \tag{15}$$

DOWÓD. Załóżmy najpierw, że spełniony jest warunek (C) i niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem zawartym w $S$ i spełniającym warunki $(\alpha)$, $(\beta)$ punktu 1. Wówczas możemy dobrać $N$ tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$0 < |x_n - a| < \delta$$

a stąd na mocy warunku (C)

$$|f(x_n) - g| < \varepsilon$$

dla $n > N$, co oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g. \tag{16}$$

Udowodniliśmy więc (13).

Okażemy teraz, że z równości (13) wynika warunek (C). Dowód przeprowadzimy przez sprowadzenie do niedorzeczności. Załóżmy, że zachodzi (13) ale warunek (C) nie jest spełniony. Wobec tego istnieje liczba $\varepsilon_0 > 0$ taka, że przy dowolnym obiorze liczby $\delta > 0$ dla pewnego $x_\delta$ spełniającego (14) będzie zachodziła nierówność przeciwna do (15). Mamy zatem

$$0 < |x_\delta - a| < \delta$$

oraz

$$|f(x_\delta) - g| \geq \varepsilon_0.$$

Przyjmijmy w szczególności $\delta = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N})$, $x_\delta = x_n$, wówczas

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \tag{17}$$

oraz

$$|f(x_n) - g| \geq \varepsilon_0. \tag{18}$$

Z nierówności (17) wynika na mocy twierdzenia o trzech ciągach, że ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunki $(\alpha)$, $(\beta)$. Wobec założenia (13) ciąg $\{f(x_n)\}$ musi zatem spełniać warunek $(\gamma)$ - ale to jest sprzeczne z nierównością (18). Dowód jest zakończony. $\square$

Podana w punkcie 1 definicja granicy funkcji, oparta na pojęciu granicy ciągu, pochodzi od E. Heinego[1] i nosi nazwę *definicji Heinego.* Podany w twierdzeniu warunek (C) bywa przyjmowany jako definicja granicy funkcji (zwana *definicją Cauchy'ego*). Z twierdzenia 4 wynika że obie definicje są równoważne.

**Przykład 9.** Dla dowolnie ustalonej liczby $a > 0$

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1.$$

Zgodnie z twierdzeniem 4 wystarczy udowodnić, że do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, że dla $x \in \mathbb{R}$ z warunku

$$0 < |x| < \delta$$

wynika

$$|a^x - 1| < \varepsilon.$$

Dowód był przeprowadzony w §1 (punkt 7, lemat 14). □

Twierdzenie 4 przenosi się na przypadek, gdy $a$ jest elementem niewłaściwym $\infty$ lub $-\infty$ względnie gdy granica $g$ jet niewłaściwa. Zachodzą mianowicie następujące twierdzenia:

**Twierdzenie 5.** *Załóżmy, że funkcja $f$ jest określona dla $x > r$, gdzie $r$ jest odpowiednio dobraną liczbą. Wówczas*

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = g \qquad (g \in \mathbb{R})$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek*

(A$_1$) *do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $P$ tak, by dla $x > P$ zachodziła nierówność*

$$|f(x) - g| < \varepsilon.$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek*

(A$_2$) *do dowolnej liczby $Q$ można dobrać liczbę $P$ tak, by dla $x > P$ zachodziła nierówność*

$$f(x) > Q.$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek*

(A$_3$) *do dowolnej liczby $q$ można dobrać liczbę $P$ tak, by dla $x > P$ zachodziła nierówność*

$$f(x) < q.$$

Analogicznie

[1]Heinrich Eduard Heine (1821 - 1881), urodzony w Berlinie, profesor na uniwersytetach w Bonn i w Halle. Zajmował się funkcjami zmiennej rzeczywistej i zmiennej zespolonej oraz równaniami różniczkowymi. W 1872 r. podał (niezależnie od G. Cantora) konstrukcję zbioru liczb rzeczywistych, jako uzupełnienia zbioru liczb wymiernych w zwykłej metryce.

**Twierdzenie 6.** *Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona dla $x < s$, gdzie $s$ jest odpowiednio dobrane. Wówczas*

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = g \qquad (g \in \mathbb{R})$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek*

($B_1$) *do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $p$ tak, by dla $x < p$ zachodziła nierówność*

$$|f(x) - g| < \varepsilon.$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

($B_2$) *do dowolnej liczby $Q$ można dobrać liczbę $p$ tak by dla $x < p$ zachodziła nierówność*

$$f(x) > Q.$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

($B_3$) *do dowolnej liczby $q$ można dobrać liczbę $p$ tak, by dla $x < p$ zachodziła nierówność*

$$f(x) < q.$$

Ponadto zachodzi

**Twierdzenie 7.** *Niech $f$ będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$. Wówczas*

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

($D_1$) *do dowolnej liczby $Q$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $x$ spełniających nierówność*

$$0 < |x - a| < \delta$$

*zachodziła nierówność*

$$f(x) > Q;$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

($D_2$)*do dowolnej liczby $q$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $x$ spełniających nierówność*

$$0 < |x - a| < \delta$$

*zachodziła nierówność*

$$f(x) < q.$$

Dowody twierdzeń 5, 6, 7 przebiegają podobnie jak dowód twierdzenia 4, proponujemy zatem Czytelnikowi samodzielne ich przeprowadzenie. □

Na zakończenie zauważmy, że twierdzenia 4 - 7 można sformułować krócej w następującej postaci:

**Twierdzenie 8.** *Niech $a, g \in \mathbb{R}_\infty$ i niech $f$ będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu $a$. Wówczas*

$$\lim_{x \to a} f(x) = g$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

($C_1$) *do dowolnego otoczenia $U(g)$ punktu $g$ można dobrać sąsiedztwo $S(a)$ punktu $a$ tak, by*

$$f(x) \in U(g)$$

*dla $x \in S(a)$.*

**Przykład 10.** Udowodnimy, że dla $a > 1$

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty \tag{19}$$

oraz

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0. \tag{20}$$

Dla dowodu (19) przyjmijmy

$$a = 1 + b, \qquad (b > 0)$$

wówczas z nierówności Bernoulliego (rozdz. I §1 punkt7) mamy

$$a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz z własności funkcji wykładniczej

$$a^x > a^n$$

dla $x > n$. Wobec tego

$$a^x > Q$$

dla $x > n$, gdzie

$$n > \frac{Q - 1}{b}.$$

Wystarczy zatem w warunku ($A_2$) twierdzenia 5 przyjąć

$$P = [\frac{Q - 1}{b}] + 1.$$

Dla dowodu (20) trzeba okazać, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać tak liczbę $p$, by dla $x < p$ zachodziła nierówność

$$a^x < \varepsilon. \tag{21}$$

Wystarczy w tym celu zauważyć, że

$$a^x = \frac{1}{a^y}$$

gdzie $y = -x$. Wobec tego nierówność epsilonowa (21) zachodzi, jeżeli

$$a^y > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{22}$$

Zgodnie z (19) do liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $P_\varepsilon$ tak, by (22) zachodziła dla $y > P_\varepsilon$. Oznacza to, że (21) zachodzi dla $x < -P_\varepsilon$, co kończy dowód (20). □

**5. Granica jednostronna funkcji.** Dla ustalonego $a \in \mathbb{R}$ niech $U(a)$ będzie otoczeniem punktu $a$, zaś $S(a)$ - sąsiedztwem punktu $a$. Przyjmiemy następujące definicje:

*otoczenie prawostronne punktu $a$*

$$U^+(a) = \{x \in U(a) : x \geq a\},$$

*otoczenie lewostronne punktu $a$*

$$U^-(a) = \{x \in U(a) : x \leq a\},$$

*sąsiedztwo prawostronne punktu $a$*

$$S^+(a) = \{x \in S(a) : x > a\},$$

*sąsiedztwo lewostronne punktu $a$*

$$S^-(a) = \{x \in S(a) : x < a\}.$$

Jeżeli w szczególności $U(a) = U_\delta(a)$ oraz $S(a) = S_\delta(a)$ są odpowiednio otoczeniem i sąsiedztwem deltowym punktu $a$, to otoczenie i sąsiedztwo deltowe lewo- względnie prawostronne łatwo określić przy pomocy nierówności, mianowicie

$$\begin{aligned} U_\delta^+(a) &= \{x : 0 \leq x - a < \delta\}, \\ U_\delta^-(a) &= \{x : 0 \leq a - x < \delta\}, \\ S_\delta^+(a) &= \{x : 0 < x - a < \delta\}, \\ S_\delta^-(a) &= \{x : 0 < a - x < \delta\}. \end{aligned}$$

Zakładając, że funkcja $f$ jest określona w sąsiedztwie prawostronnym punktu $a$ wprowadzimy definicję granicy prawostronnej. Mówimy, że funkcja $f$ ma *granicę prawostronną* $g \in \mathbb{R}_\infty$ *przy* $x \to a$ (lub *w punkcie* $a$ ), jeżeli dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $\{x_n\}$ spełniającego warunki

$$\begin{aligned} &(\alpha_+) \qquad x_n > a \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}, \\ &(\beta) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = a \end{aligned}$$

zachodzi

$$(\gamma) \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Zapisujemy

$$\lim_{x \to a+} f(x) = g.$$

Podobnie, zakładając że $f$ jest określona w sąsiedztwie lewostronnym punktu $a$, definiujemy granicę lewostronną. Mówimy, że $f$ ma *granicę lewostronną* $g \in \mathbb{R}_\infty$ *przy* $x \to a$ (lub *w punkcie* $a$), jeżeli dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $\{x_n\}$ spełniającego warunki

$$(\alpha_-) \qquad x_n < a \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$
$$(\beta) \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

zachodzi

$$(\gamma) \qquad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g.$$

Zapisujemy

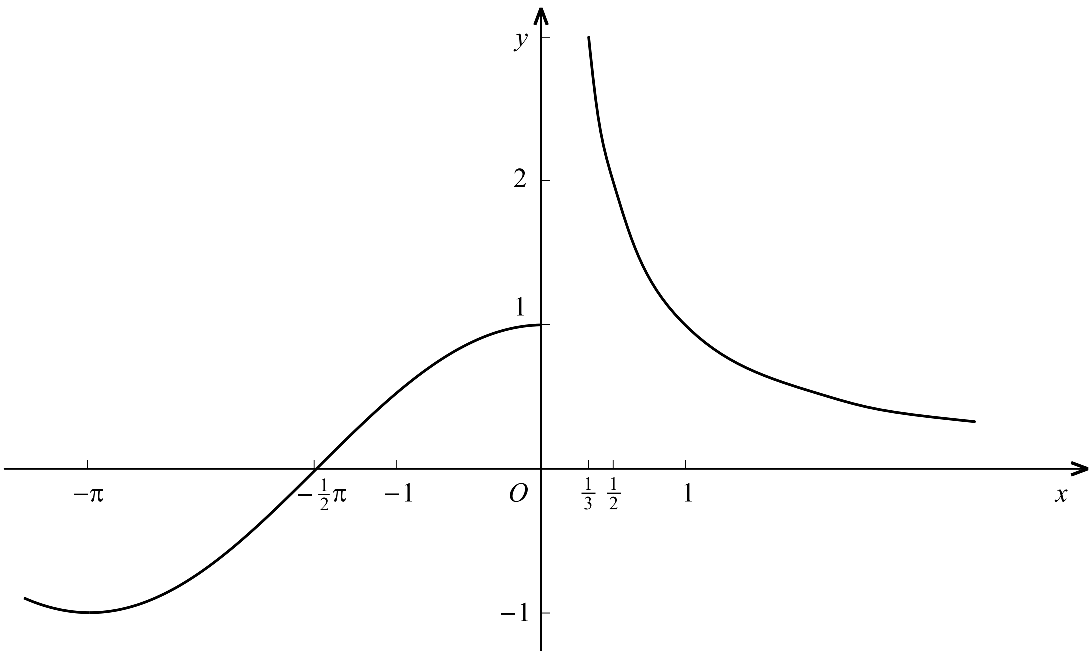
$$\lim_{x \to a-} f(x) = g.$$

Jeżeli $g = \infty$ lub $g = -\infty$, to mówimy, że $f$ ma w punkcie $x = a$ granicę prawostronną (lewostronną) *niewłaściwą*. Obie granice, lewostronną i prawostronną nazywamy *granicami jednostronnymi*.

Z podanych definicji widać, że jeżeli funkcja $f$ ma przy $x \to a$ granicę, to ta granica jest jednocześnie granicą prawostronną i lewostronną. Twierdzenia sformułowane w punkcie 3 dla granicy funkcji pozostają prawdziwe dla granic jednostronnych.

**Przykład 11.** Niech (rys. 8)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \\ \cos x & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$$




[rys. 8]

Funkcja $f$ jest określona dla $x \neq 0$, a więc w każdym lewostronnym i w każdym prawostronnym sąsiedztwie punktu $x = 0$.

Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki

$$x_n \to 0,\ x_n > 0 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

i niech $P$ będzie dowolnie obraną liczbą rzeczywistą. Z definicji granicy ciągu wynika, że do liczby $\varepsilon = \frac{1}{P}$ można tak dobrać $N$, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$x_n < \frac{1}{P}.$$

Wobec tego

$$f(x_n) > P$$

dla $n > N$, a to oznacza że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty.$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty.$$

Natomiast

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$$

jak wynika z przykładu 7. □

Twierdzenia udowodnione w punkcie 4 przenoszą się łatwo na przypadek granicy jednostronnej. Sformułujemy je dla granicy prawostronnej.

**Twierdzenie 9.** *Załóżmy, że funkcja $f$ jest określona w prawostronnym sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$. Wówczas*

$$\text{(i)} \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = g \quad (g \in \mathbb{R})$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

($C_+$) *do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $x$ spełniających nierówność*

$$0 < x - a < \delta \tag{23}$$

*było*

$$|f(x) - g| < \varepsilon;$$

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = \infty$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

($A_+$) *do dowolnej liczby $Q$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $x$ spełniających nierówność* (23) *było*

$$f(x) > Q;$$

$$\text{(iii)} \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = -\infty$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

($B_+$) *do dowolnej liczby $q$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $x$ spełniających nierówność* (23) *było*

$$f(x) < q.$$

Analogiczne twierdzenie dla granicy lewostronnej otrzymujemy zakładając, że funkcja $f$ jest określona w lewostronnym sąsiedztwie punktu $a$ i zastępując nierówność (23) przez

$$0 < a - x < \delta \tag{24}$$

(proponujemy, by Czytelnik sformułował to twierdzenie dokładnie). Dowody obu twierdzeń przebiegają zupełnie podobnie do dowodu twierdzenia 4 i pozostawiamy je Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

Jako wniosek otrzymujemy

**Twierdzenie 10.** *Niech $f$ będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$. Wówczas*

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \quad (g \in \mathbb{R}_\infty)$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = g.$$

**Przykład 12.** Udowodnimy, że

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e = \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y. \tag{25}$$

Dla dowodu zauważmy najpierw, że nierówność

$$n \le y \le n+1, \tag{26}$$

po wykorzystaniu znanych własności potęgi (twierdzenie 3 §1), daje

$$a_n \le \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \le b_n, \tag{27}$$

gdzie

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ponieważ

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$$

oraz

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right),$$

stosując twierdzenie o granicy iloczynu otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e$$

(por. rozdz. II §2 punkt 5). Wynika stąd, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $N$ tak, by dla $n > N$ zachodziły nierówności

$$a_n > e-\varepsilon, \qquad b_n < e+\varepsilon$$

i w konsekwencji

$$-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{y}\right)^y - e < \varepsilon \tag{28}$$

dla $y$ spełniających (26). Zauważmy, że nierówność (26) jest spełniona (przy odpowienio dobranym $n > N$), jeżeli założymy, że

$$y > P = [N]+1. \tag{29}$$

Zatem nierówność (28) zachodzi dla $y$ spełniających (29) - a to oznacza, zgodnie z twierdzeniem 5, że prawdziwa jest pierwsza z równości (25). Drugą równość (25) otrzymujemy łatwo z pierwszej. Podstawienie

$$y = -t$$

daje bowiem

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t,$$

skąd wynika, że

$$\lim_{y\to-\infty}\left(+\frac{1}{y}\right)^y = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right]$$

a zatem

$$\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

**Przykład 13.** Opierając się na równości (25) łatwo wykazać, że

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{30}$$

Istotnie, podstawienie

$$y = \frac{1}{x}$$

daje

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$

oraz

$$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y,$$

zatem z (25) otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{31}$$

Ostatnia równość (31) oznacza, zgodnie z twierdzeniem 10, że zachodzi (30). □

**6. Twierdzenie o zbieżności monotonicznej.** Twierdzenie o zbieżności ciągów monotonicznych udowodnione w rozdz. II §2 przenosi się na przypadek granicy funkcji w następujący sposób:

**Twierdzenie 11.** *Jeżeli funkcja $f$ jest monotoniczna i ograniczona w pewnym sąsiedztwie prawostronnym $S_+$ (lewostronnym $S_-$) punktu $a \in \mathbb{R}$, to istnieje skończona granica*

$$\lim_{x\to a+} f(x) \qquad \left(\lim_{x\to a-} f(x)\right).$$

DOWÓD. Dla ustalenia uwagi rozważmy granicę prawostronną zakładając, że $f$ jest rosnąca (w pozostałych przypadkach funkcji malejącej względnie granicy lewostronnej rozumowanie jest zupełnie podobne i nie będziemy go powtarzać).

Ciąg $\{a + \frac{1}{n}\}$ jest malejący, wobec tego ciąg $\{f(a + \frac{1}{n})\}$ jest również malejący i ograniczony (przynajmniej począwszy od $n = n_0$, jeżeli $a + \frac{1}{n} \in S_+$ dla $n \geq n_0$). Na mocy twierdzenia 5 rozdz. II §2 istnieje skończona granica

$$\lim_{n\to\infty} f(a + \frac{1}{n}) = g, \tag{32}$$

przy czym

$$f(a + \frac{1}{n}) \geq g \tag{33}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Niech teraz $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki $(\alpha_+)$, $(\beta)$ (por. punkt 5). Okażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g. \tag{34}$$

Z uwagi na (32), (33) do ustalonej dowolnie liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $m \in \mathbb{N}$ tak, by zachodziła nierówność

$$0 \leq f(a + \frac{1}{m}) - g < \varepsilon.$$

Z założenia $(\beta)$ wynika z kolei, że do liczby $m$ można tak dobrać liczbę $N$, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$x_n < a + \frac{1}{m}.$$

Z ostatnich dwóch nierównosci dostajemy

$$f(x_n) - g < \varepsilon \tag{35}$$

dla $n > N$. Ponadto przy dowolnie ustalonym $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba naturalna $r_n$ taka, że

$$x_n > a + \frac{1}{r_n} \tag{36}$$

- wystarczy w tym celu przyjąć

$$r_n > \frac{1}{x_n - a},$$

co jest możliwe zgodnie z zasadą Archimedesa (twierdzenie 2 rozdz.I §2). Z nierówności (36) i (33) wynika

$$f(x_n) \geq f(a + \frac{1}{r_n}) \geq g,$$

zatem

$$f(x_n) - g \geq 0. \tag{37}$$

Porównując (35) i (37) widzimy, że

$$0 \leq f(x_n) - g < \varepsilon$$

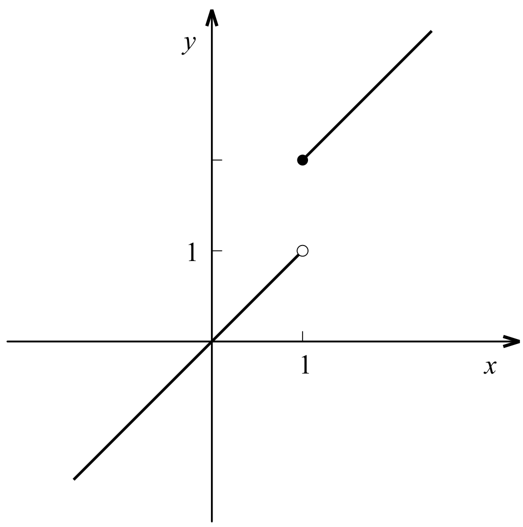
dla $n > N$, przy czym liczba N jest dobrana do $\varepsilon$ a to oznacza, że zachodzi (34). Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ był dowolnym ciągiem spełniającym warunki ($\alpha$) i ($\beta$), wynika stąd, że

$$\lim_{x \to a+} f(x) = g.$$

□

**Przykład 14.** Niech (rys. 9)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x > 1, \\ x \quad \text{dla} & x < 1. \end{cases}$$




[rys. 9]

Funkcja $f$ jest rosnąca i ograniczona w zbiorze $(0,1) \cup (1,2)$, który jest sąsiedztwem punktu $x = 1$, zatem zgodnie z twierdzeniem 11 ma przy $x \to 1$ granice lewostronną i prawostronną. Łatwo sprawdzić, że

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 1-} f(x) = 1.$$

Granice jednostronne nie są równe, nie istnieje więc granica funkcji $f$ przy $x \to 1$. □

Z podanego przykładu widać, że twierdzenie 11 przestaje być prawdziwe, jeżeli zamiast o granicach jednostronnych będziemy mówili po prostu o granicy funkcji - nawet w przypadku gdy funkcja ta jest monotoniczna i ograniczona w pewnym sąsiedztwie punktu.

Twierdzenie 11 można następująco uogólnić na przypadek, gdy $a = \infty$ lub $a = -\infty$:

**Twierdzenie 12.** *Jeżeli istnieje liczba $P$ taka, że funkcja $f$ jest monotoniczna i ograniczona dla $x > P$ $(x < -P)$ to istnieje skończona granica*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \qquad (\lim_{x\to-\infty} f(x)).$$

DOWÓD przebiega podobnie do dowodu twierdzenia 11 i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

♡ ♡ ♡

**7. Warunek Cauchy'ego istnienia granicy.** W rozdziale II §2 punkt 6 sformułowaliśmy warunek Cauchy'ego dla ciągów i udowodniliśmy, że jest on warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności ciągu. Podamy teraz analogiczny warunek zapewniający istnienie granicy funkcji.

**Twierdzenie 13.** *Niech $f$ będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$. Na to, by istniała skończona granica funkcji $f$ przy $x \to a$, potrzeba i wystarcza, by spełniony był warunek*

$(\mathrm{C}_f)$ *do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $x, x'$ spełniających nierówności*

$$0 < |x-a| < \delta, \quad 0 < |x'-a| < \delta \tag{38}$$

*było*

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{39}$$

DOWÓD. Załóżmy że istnieje

$$\lim_{x\to a} f(x) = g,$$

Wobec tego zgodnie z twierdzeniem 4 do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $x$, $x'$ spełniających (38) zachodziły nierówności

$$-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - g < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < g - f(x') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dodając te nierówności stronami dostajemy (39). Zatem warunek $(\mathrm{C}_f)$ jest warunkiem koniecznym istnienia granicy.

Dla dowodu dostateczności warunku $(\mathrm{C}_f)$ załóżmy, że jest on spełniony i obierzmy $\delta > 0$ tak, by nierówność (39) była spełniona z zastąpieniem $\varepsilon$ przez $\varepsilon/2$. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem spełniającym warunki

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad x_n \neq a \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

wówczas istnieje liczba $N$ taka, że dla $n$, $m > N$ zachodzą nierówności

$$0 < |x_n - a| < \delta, \qquad 0 < |x_m - a| < \delta,$$

z których wynika, że
$$|f(x_n) - f(x_m)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Zatem ciąg $\{f(x_n)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego i na mocy twierdzenia 6 rozdz. II §2 jest zbieżny. Niech
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g,$$
wówczas istnieje liczba $N_1$ taka, że dla $n > N_1$ mamy
$$|f(x_n) - g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Ponieważ
$$|f(x) - g| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - g|,$$
ustalając $n > \max(N, N_1)$ i zakładając, że
$$0 < |x - a| < \delta$$
dostajemy
$$|f(x) - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
a to oznacza (por twierdzenie 4), że
$$\lim_{x\to a} f(x) = g.$$
□

Twierdzenie przenosi się na przypadek $a = \infty$ lub $a = -\infty$ (definicja sąsiedztwa punktu $a = \infty$, względnie $a = -\infty$ była podana w punkcie 2).

**Twierdzenie 14.** *Niech $f$ będzie funkcją określoną dla dostatecznie dużych $x$. Wówczas $f$ ma skończoną granicę przy $x \to \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek*
($C_\infty$) *do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $Q$ takie, że dla $x, x' > Q$ zachodzi nierówność*
$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

**Twierdzenie 15.** *Niech $f$ będzie funkcją określoną dla $x < p$, gdzie $p$ jest odpowiednio dobraną liczbą. Wówczas $f$ ma skończoną granicę przy $x \to -\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek*
($C_{-\infty}$) *do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $q$ takie, że dla $x, x' < q$ zachodzi nierówność*
$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Dowody obu twierdzeń są analogiczne do dowodu twierdzenia 13. Proponujemy, aby Czytelnik przeprowadził je samodzielnie. □

**Przykład 15.** Niech
$$f(x) = \cos x.$$
Wiemy (Przykład 4), że funkcja ta nie ma granicy (nawet niewłaściwej) przy $x \to \infty$. Okażemy, że nie jest spełniony warunek $(\mathrm{C}_\infty)$ podany w twierdzeniu 14. Zaprzeczenie warunku ma postać

(*nie* $\mathrm{C}_\infty$) istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$, że dla dowolnej liczby $Q$ można znaleźć liczby $x_Q, x'_Q > Q$ tak, by zachodziła nierówność

$$|f(x_Q) - f(x'_Q)| \geq \varepsilon_0. \tag{40}$$

Wystarczy przyjąć
$$\varepsilon_0 = 1, \quad x_Q = 2n\pi, \quad x'_Q = (2n+1)\pi,$$
dobierając dostatecznie duże $n \in \mathbb{N}$. Wówczas
$$\cos x_Q = 1, \quad \cos x'_Q = -1,$$
zatem różnica po lewej stronie (40) wynosi 2. □

**Przykład 16.** Niech
$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0).$$
Wiemy, (Przykład 5), że nie istnieje granica (nawet niewłaściwa) tej funkcji przy $x \to 0$. Pokażemy, że nie jest spełniony warunek $(\mathrm{C}_f)$ podany w twierdzeniu 13. Zaprzeczenie warunku ma postać

(*nie* $\mathrm{C}_f$) istnieje takie $\varepsilon_0$, że dla dowolnej liczby $\delta > 0$ można znaleźć liczby $x_\delta, x'_\delta$ takie, że spełnione są nierówności
$$|x_\delta| < \delta, \quad |x'_\delta| < \delta$$
oraz

$$|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \varepsilon_0. \tag{41}$$

Wystarczy przyjąć

$$\varepsilon_0 = 1, \quad x_\delta = \frac{2}{(4n+1)\pi}, \quad x'_\delta = \frac{2}{(4n+3)\pi}$$

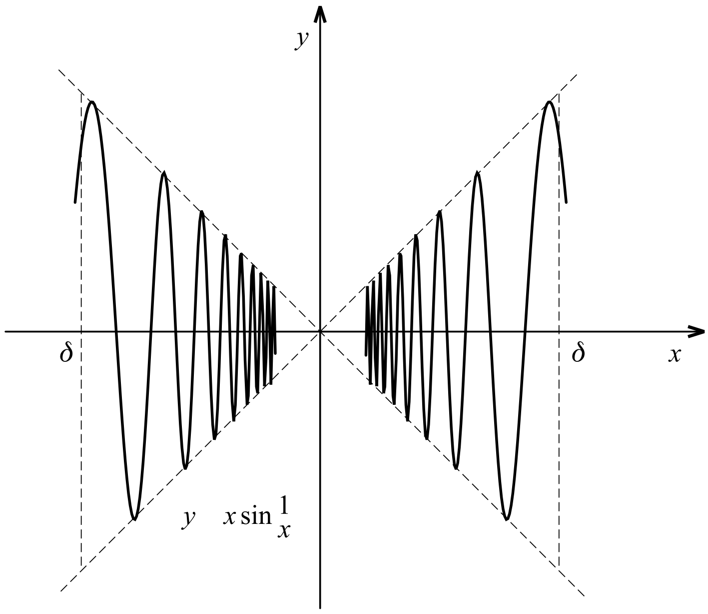
dobierając $n$ tak, by było
$$\frac{2}{(4n+1)\pi} < \delta,$$
wówczas
$$\sin x_\delta = 1, \quad \sin x'_\delta = -1,$$
a więc różnica po lewej stronie (41) wynosi 2. □

**Przykład 17.** Wiemy, że (Przykład 5)

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Okażemy, że funkcja

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x}$$




[rys. 10]

spełnia warunek ($\mathrm{C}_f$) przy $x = 0$. Istotnie, z rys. 10 widać, że różnica wartości funkcji $f$ w dowolnych dwóch punktach zbioru $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ nie przekracza $2\delta$. Zatem dla $x, x'$ spełniających nierówności

$$|x| < \delta, \quad |x'| < \delta$$

mamy

$$|f(x) - f(x')| < 2\delta$$

i wystarczy w warunku ($\mathrm{C}_f$) przyjąć $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. □

**Zadania.**

1. Przy ustalonym $p \in \mathbb{N}$ obliczyć granice

$$\text{a.)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^p - p}{x-1},$$
$$\text{b.)} \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)\cdots(1+px)-1}{x}.$$

Wskazówka. Zauważyć, że obie funkcje są wielomianami. Zastosować twierdzenia o działaniach na granicach, następnie wykorzystać zadanie 10 rozdz. I §1.

2. Obliczyć granice ciągów

$$u_n = n^2 \sin\frac{\pi}{n^2},$$
$$v_n = (\sin\frac{1}{n})^{-1}\sin(\sin\frac{1}{n}),$$
$$w_n = n^2\sin^2(\frac{3}{n}).$$

Wskazówka. Wykorzystać Przykłady 6, 8.

3. Obliczyć granice ciągów

$$a_n = (\sqrt{3})^{(1-\sqrt[n]{n})},$$
$$b_n = (\sqrt{2})^{(1-\sqrt[n]{5})}.$$

Wskazówka. Wykorzystać Przykład 9 oraz Przykłady 13, 14 z rozdz. II §1.

4. Udowodnić, że dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n = e^k.$$

Wskazówka. Skorzystać z Przykładu 13.

5. Zbadać, czy istnieją granice

$$\text{a.)} \quad \lim_{x\to\infty}(x-[x]),$$
$$\text{b.)} \quad \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-[\frac{1}{x}]),$$
$$\text{c.)} \quad \lim_{x\to 0}(1-x[\frac{1}{x}]),$$
$$\text{d.)} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}, \quad a \neq 0.$$

Uwaga. Symbolem $[x]$ oznaczamy funkcję *część całkowita* $x$ (por. rozdz. I §2).

6. Zbadać istnienie następujących granic
   a.) opierając się na definicji granicy funkcji podanej w punkcie 1,
   b.) sprawdzając, czy spełniony jest warunek Cauchy'ego (twierdzenia 13, 14):

$$\text{(i)}\quad \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}, \qquad \text{(ii)}\quad \lim_{x\to\infty}\sin x^2,$$
$$\text{(iii)}\quad \lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}, \qquad \text{(iv)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x^2.$$

7. Zbadać istnienie granic jednostronnych w punkcie $x = a$ następujących funkcji

$$\text{(i)}\quad a = 1,\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & \text{dla}\quad x > 1, \\ 2x \quad \text{dla} & x < 1, \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad a = 0,\quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{dla}\quad x > 0, \\ \dfrac{\sin x}{2x} & \text{dla}\quad x < 0, \end{cases}$$

$$\text{(iii)}\quad a = 0,\quad h(x) = \begin{cases} \cos(x^2) & \text{dla}\quad x < 0, \\ x+1 & \text{dla}\quad x > 0, \end{cases}$$

$$\text{(iv)}\quad a = 0,\quad p(x) = \begin{cases} 2^x & \text{dla}\quad x > 0, \\ 2^{2x} & \text{dla}\quad x < 0. \end{cases}$$

Która z tych funkcji ma granicę przy $x \to a$?

8. Zakładamy, że funkcja $f$ (określona dla dostatecznie dużych $x$)
   (i) jest ograniczona w każdym ograniczonym przedziale,
   (ii) czyni zadość warunkowi

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+1) - f(x)] = g$$

gdzie $g \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że wówczas

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = g.$$

Wskazówka. Z warunku (ii) wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można tak dobrać liczbę $A$, że

$$g - \varepsilon < f(x+1) - f(x) < g + \varepsilon$$

dla $x \geq A$. Należy skorzystać z równości

$$f(x) = (f(x) - f(x-1)) + (f(x-1) - f(x-2)) + \cdots + (f(x-m+1) - f(x-m)) + f(y),$$

gdzie

$$m = [x - A], \quad y = x - m.$$

Następnie zauważyć, że

$$\lim_{x \to \infty} \frac{m}{x} = 1$$

(dlaczego?).

9. Udowodnić twierdzenie sformułowane w zadaniu 8 w przypadku $g = \infty$ oraz $g = -\infty$.
Wskazówka. Gdy $g = \infty$, to na mocy założenia (ii) do dowolnie obranej liczby $P > 0$ można tak dobrać liczbę $A$, że

$$f(x+1) - f(x) > P$$

dla $x \geq A$. Dalsze rozumowanie przebiega podobnie jak w zadaniu 8. Przypadek $g = -\infty$ można rozważać bezpośrednio lub sprowadzić go do poprzedniego wprowadzając nową funkcję $h(x) = -f(x)$.

10. Podać interpretację geometryczną twierdzeń dowodzonych w zadaniach 8 i 9 oraz zilustrować je następującymi przykładami

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && f(x) = ax + b, \\ &\text{(ii)} && f(x) = \sqrt{x}, \\ &\text{(iii)} && f(x) = e^x, \\ &\text{(iv)} && f(x) = \frac{1}{x}\sin x + x. \end{aligned}$$

Narysować wykresy tych funkcji.
Wskazówka. Zauważyć, że

$$f(x+1) - f(x) = \operatorname{tg}\alpha(x), \qquad \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg}\beta(x)$$

przy odpowiednim obiorze kątów $\alpha(x)$, $\beta(x)$.

11. Obliczyć granicę ciągu

$$a_n = \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}.$$

Wskazówka. Rozróżnić przypadki $\varphi = 0$ oraz $\varphi \neq 0$. Dla $\varphi \neq 0$ zastosować $n$-krotnie wzór

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

i wykorzystać przykład 8.

12.Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$
Wskazówka. Wykorzystać przykład 8.

13. Zbadać, czy istnieje granica $g \in \mathbb{R}$ przy $x \to 0$ funkcji
$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x^2}}.$$
Wskazówka. Oszacować ciąg
$$f(\frac{1}{n}).$$

14. Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}.$$
Wskazówka. Zastosować podstawienie $x = \frac{1}{y}$ i wykorzystać Przykład 8.

15. Udowodnić, że przy ustalonych $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^k} = \infty$$
(funkcja wykładnicza dąży do $\infty$ szybciej, niż dowolna potęga $x$ - por. Przykład 10).
Wskazówka. Obierzmy dowolnie ciąg $x_n \to \infty$ i niech $l_n = [x_n]$. Należy oszacować z dołu wyrażenie
$$\frac{a^{x_n}}{(x_n)^k}$$
przez $n$-ty wyraz ciągu
$$b_n = \frac{a^{l_n}}{(l_n)^k},$$
następnie skorzystać z zadania 12 rozdz. II §2 i oprzeć się na twierdzeniu 2 rozdz. II §2.

16. Obliczyć granice
$$\text{a.)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \qquad \text{b.)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}.$$

17.Niech
$$w(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
będzie wielomianem stopnia $m$ o współczynniku $a_m > 0$. Udowodnić, że
$$\text{a.)} \quad \lim_{x\to\infty} w(x) = \lim_{x\to-\infty} w(x) = \infty$$
dla $m$ parzystego,
$$\text{b.)} \quad \lim_{x\to\infty} w(x) = \infty, \lim_{x\to-\infty} w(x) = -\infty$$
dla $m$ nieparzystego.
Wskazówka. Zbadać najpierw granicę wyrażenia $\dfrac{w(x)}{x^m}$.