§3. Funkcje ciągłe i ich własności.

♡ ♡ ♡

1. Ciągłość funkcji w punkcie. Niech f będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}$. Mówimy, że *f jest ciągła w punkcie a* (lub *dla $x = a$*), jeżeli spełnione są warunki

(i) istnieje granica $\lim_{x\to a} f(x) = g \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(a) = g$.

Przykład 1. Wiemy, że (Przykład 5 §2)

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Wobec tego funkcja p określona wzorami

$$p(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 \quad \text{dla} & x = 0. \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x = 0$. Natomiast funkcja

$$q(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

spełnia warunek (i), nie jest jednak ciągła w punkcie $x = 0$, gdyż nie czyni zadość warunkowi (ii). Mówimy, że funkcja q ma w punkcie $x = 0$ *nieciągłość nieistotną*. Łatwo ją usunąć, zmieniając definicję funkcji w punkcie $x = 0$ tak, by przyjmowała ona w tym punkcie wartość równą granicy. Otrzymujemy wówczas funkcję p, która jest ciągła dla $x = 0$.

Przykład 2. Wiemy, że (Przykład 5 §2) nie istnieje granica

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}.$$

Wobec tego funkcja

$$f_c(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ c & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

jest nieciągła w punkcie $x = 0$ niezależnie od tego, jak obierzemy liczbę rzeczywistą c, gdyż nie spełnia warunku (i). Mówimy, że funkcjaf_c ma w punkcie $x = 0$ *nieciągłość istotną*.

Ponieważ w §2 wprowadziliśmy dwie równoważne definicje granicy funkcji (definicję Heinego i definicję Cauchy'ego), możemy sformułować dwa warunki konieczne i dostateczne ciągłości funkcji w punkcie a.

Twierdzenie 1. *Funkcja f określona w otoczeniu punktu a jest ciągła w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $x_n \to a$*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Twierdzenie 2. *Funkcja f określona w otoczeniu punktu a jest ciągła w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $x \in \mathbb{R}$ spełniających nierówność*

$$|x - a| < \delta$$

zachodziła nierówność epsilonowa

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Zauważmy, że twierdzenie 2 można sformułować w sposób równoważny następująco

Twierdzenie 3. *Funkcja f określona w otoczeniu punktu a jest ciągła w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy do każdego otoczenia U punktu $f(a)$ można dobrać otoczenie V punktu a tak, by*

$$f(V) \subset U.$$

Dowody twierdzeń pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

2. Ciągłość jednostronna. Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym prawostronnym otoczeniu punktu a. Mówimy, że f jest *prawostronnie ciągła w punkcie a* (lub *dla $x = a$*) jeżeli

(i_+) istnieje granica prawostronna

$$\lim_{x\to a+} f(x) = g_+ \in \mathbb{R}$$

oraz

(ii_+) $f(a) = g_+$.

Podobnie określamy ciągłość lewostronną, zakładając że funkcja f jest określona w pewnym lewostronnym otoczeniu punktu a. Mówimy, że f jest *lewostronnie ciągła w punkcie a* (lub *dla $x = a$*), jeżeli

(i_-) istnieje granica lewostronna

$$\lim_{x\to a_-} f(x) = g_- \in \mathbb{R}$$

oraz

(ii_-) $f(a) = g_-$.

Z definicji granicy prawostronnej oraz z twierdzenia 9 §2 wynikają następujące warunki konieczne i dostateczne ciągłości prawostronnej.

Twierdzenie 4. *Funkcja f określona w prawostronnym otoczeniu punktu a jest prawostronnie ciągła w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\}$ spełniającego warunki*

$$x_n \to a, \quad x_n \geq a$$

zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Twierdzenie 5. *Funkcja f określona w prawostronnym otoczeniu punktu a jest prawostronnie ciągła w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $x \in \mathbb{R}$ spełniających nierówność*

$$0 \leq x - a < \delta$$

zachodziła nierówność epsilonowa

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Dowody obu twierdzeń pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. Proponujemy również, by Czytelnik samodzielnie sformułował analogiczne twierdzenia podające warunki konieczne i dostateczne ciągłości lewostronnej funkcji. $\square$

Z twierdzenia 10 §3 wynika natychmiast

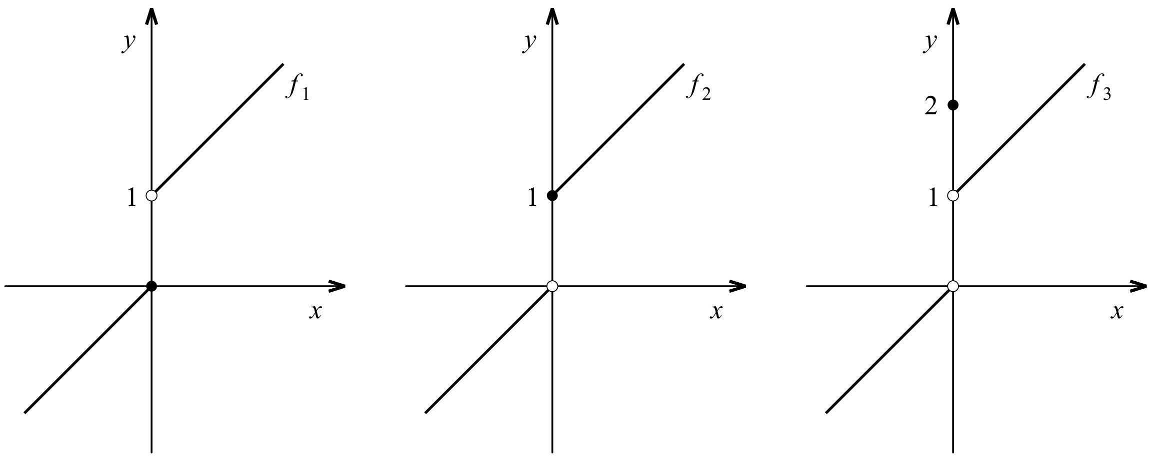
Twierdzenie 6. *Funkcja określona w otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}$ jest w tym punkcie ciągła wtedy i tylko wtedy gdy jest w nim ciągła prawo- i lewostronnie.*

Przykład 3. Niech (rys. 11)

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ x+1 & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x < 0, \\ x+1 & \text{dla} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x < 0, \\ 2 & \text{dla} \quad x = 0, \\ x+1 & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$



[rys. 11]

Jak łatwo sprawdzić

$$\lim_{x\to 0+} f_j(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0-} f_j(x) = 0$$

dla $j = 1, 2, 3$. Z definicji funkcji f_j wynika, że

$$f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 1, \quad f_3(0) = 2$$

zatem

f_1 jest ciągła lewostronnie dla $x = 0$,

f_2 jest ciągła prawostronnie dla $x = 0$,

f_3 nie jest ciągła (nawet jednostronnie) dla $x = 0$. Jest to punkt nieciągłości istotnej, gdyż nie istnieje granica funkcji f_3 przy $x \to 0$.

3. Ciągłość funkcji w przedziale. Załóżmy, że funkcja f jest określona w przedziale $\mathbb{P} = (a, b)$, gdzie $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Mówimy, że f *jest ciągła w przedziale* $\mathbb{P}$, jeżeli jest ciągła w każdym jego punkcie. Jeżeli przedział $\mathbb{P}$ zawiera jeden ze swoich końców tzn. jest postaci

$[a, b]$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$

lub

$(a, b]$, gdzie $-\infty \leq a < b < \infty$

lub

$[a, b)$, gdzie $-\infty < a < b \leq \infty$

to o funkcji f zakładamy dodatkowo, że jest ciągła prawostronnie w lewym końcu przedziału $\mathbb{P}$ względnie ciągła lewostronnie w prawym końcu przedziału $\mathbb{P}$.

Z twierdzenia 2 widać, że warunek ciągłości funkcji można w sposób mniej precyzyjny sformułować następująco:

funkcja f jest ciągła w przedziale $\mathbb{P}$, jeżeli mała zmiana argumentu $x \in \mathbb{P}$ powoduje małą zmianę wartości funkcji $f(x)$.

Przykład 4. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

Dla dowolnego $x_0 > 0$ mamy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0},$$

funkcja f jest więc ciągła w przedziale $(0,\infty)$. Nie jest natomiast ciągła w przedziale $[0,\infty)$ gdyż

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Funkcja f nie ma skończonej granicy prawostronnej przy $x \to 0$, nie może więc czynić zadość warunkom (i_+), (ii_+).

4. Działania na funkcjach ciągłych i ciągłość funkcji elementarnych. Z twierdzeń o działaniach na granicach (§2) wynika natychmiast

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że funkcje f, g określone w otoczeniu punktu a są ciągłe w tym punkcie. Wówczas*

(i) funkcje $f+g, f-g$ oraz fg są ciągłe w punkcie a;

(ii) jeżeli $g(a) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie a.

Twierdzenie pozostaje słuszne jeżeli ciągłość funkcji zastąpimy przez ciągłość prawo- (lewo-)stronną. Szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi. □

W §1 były wprowadzone przykłady funkcji zwanych umownie funkcjami elementarnymi. Zbadamy teraz ich ciągłość.

Z definicji funkcji ciągłej wynika łatwo, że funkcja stała $f(x) = c$ (gdzie $c \in \mathbb{R}$) oraz funkcja tożsamościowa $f(x) = x$ są ciągłe w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. W oparciu o twierdzenie 7 stwierdzamy, że

1^0 *wielomian jest funkcją ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$,

2^0 *funkcja wymierna jest ciągła w każdym punkcie nie będącym miejscem zerowym mianownika.*

W szczególności

3^0 *funkcja potęgowa o wykładniku naturalnym*

$$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$

oraz

4^0 *funkcja potęgowa o wykładniku całkowitym ujemnym*

$$f(x) = x^{-n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

jest ciągła wszędzie poza punktem $x_0 = 0$.

Przykład 5. Niech

$$f(x) = \frac{x+5}{x^2+x-2}.$$

Mianownik ułamka po prawej stronie ma miejsca zerowe $x_1 = 1$ oraz $x_2 = -2$, wobec tego funkcja f jest określona i ciągła w zbiorze

$$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty).$$

Przechodząc do funkcji wykładniczej o podstawie $a > 0$ mamy dla dowolnie ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$

$$a^x = a^{x-x_0} a^{x_0},$$

zatem przyjmując $y = x - x_0$ dostajemy (por. §2 Przykład 9)

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \lim_{y \to 0} a^y = a^{x_0}.$$

Wobec tego

5^0 *funkcja wykładnicza jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$.

Zbadamy teraz ciągłość funkcji trygonometrycznych. Przyjmując $y = x - x_0$ dla ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$ mamy

$$\sin x = \sin(y + x_0) = \sin y \cos x_0 + \cos y \sin x_0,$$

a stąd (por. §2 Przykłady 6,7)

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = (\cos x_0) \lim_{y \to 0} \sin y + \sin x_0 \lim_{y \to 0} \cos y = \\ = \sin x_0.$$

Podobnie

$$\cos x = \cos(y + x_0) = \cos y \cos x_0 - \sin y \sin x_0$$

a więc

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = (\cos x_0) \lim_{y \to 0} \cos y - (\sin x_0) \lim_{y \to 0} \sin y = \\ = \cos x_0.$$

Stwierdzamy więc, że

6^0 *funkcje* $\sin x$, $\cos x$ *są ciągłe w całym zbiorze liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$

oraz w oparciu o twierdzenie 7

7^0 *funkcja* $\mathrm{tg} x$ *jest ciągła w każdym punkcie* $x_0 \in \mathbb{R}$ *takim, że* $\cos x_0 \neq 0$,

8^0 *funkcja* $\mathrm{ctg} x$ *jest ciągła w każdym punkcie* $x_0 \in \mathbb{R}$ *takim, że* $\sin x_0 \neq 0$.

Na zakończenie udowodnimy twierdzenie o ciągłości funkcji złożonej z funkcji ciągłych.

Twierdzenie 8 (o ciągłości superpozycji). *Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$, zaś g funkcją określoną w otoczeniu punktu $y_0 = f(x_0)$. Jeżeli*

(i) *f jest ciągła w punkcie x_0,*

(ii) *g jest ciągła w punkcie y_0*

to funkcja złożona

$$h(x) = g(f(x))$$

jest ciągła w punkcie x_0.

DOWÓD wynika natychmiast z twierdzenia 1. Dla dowolnego ciągu $x_n \to x_0$ mamy wobec założenia (i)

$$y_n = f(x_n) \to y_0,$$

wobec tego ciąg $\{g(y_n)\}$ jest dobrze określony przynajmniej dla dostatecznie dużych n. Z założenia (ii) wynika, że

$$h(x_n) = g(y_n) \to g(y_0) = h(x_0).$$

Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ był dowolnie obrany, udowodniliśmy ciągłość funkcji h w punkcie x_0. $\square$

Przykład 6. Niech

$$f(x) = \sin x, \qquad g(y) = \frac{1}{y^2 - 1}.$$

Funkcja f jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, zaś funkcja g jest ciągła w każdym punkcie y_0 nie będącym miejscem zerowym mianownika tzn. spełniającym warunek

$$y_0^2 \neq 1.$$

Wobec tego funkcja złożona

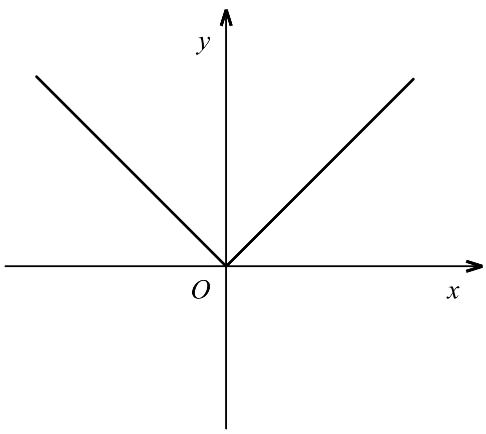
$$h(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\sin^2 x - 1}$$

jest ciągła wszędzie za wyjątkiem punktów postaci$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oraz $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ dla k całkowitych.

Przykład 7. Zbadamy ciągłość funkcji

$$f(x) = |x|$$

(wykres funkcji przedstawiony jest na rys. 12).



[rys. 12]

Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie dowolnie ustalonym punktem. Udowodnimy ciągłość funkcji f w punkcie a opierając się na twierdzeniu 1. Załóżmy, że $\{x_n\}$ jest dowolnie obranym ciągiem zbieżnym do a. Wobec tego do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Ponieważ

$$|f(x_n) - f(a)| = ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|,$$

więc dla $n > N$ zachodzi również nierówność

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$$

a to oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a),$$

co kończy dowód.

Ciągłość funkcji w punkcie a możemy również udowodnić opierając się na twierdzeniu 2 i wykorzystując nierówność

$$|f(x) - f(a)| = \big||x| - |a|\big| \leq |x - a|,$$

z której widać, że do liczby $\varepsilon > 0$ wystarczy dobrać $\delta = \varepsilon$. Wówczas z nierówności deltowej

$$|x - a| < \delta$$

wynika nierówność epsilonowa dla funkcji

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

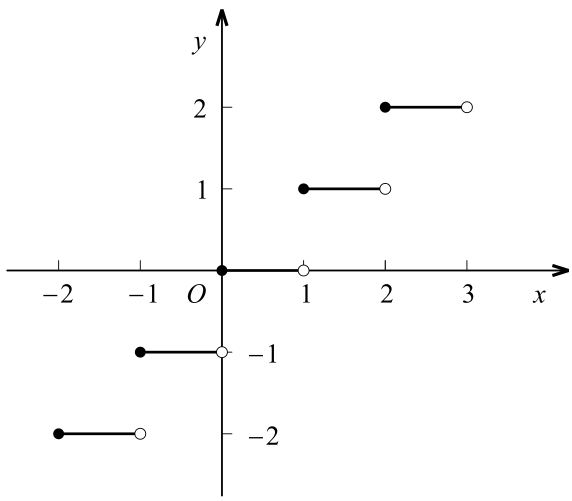
Ponieważ punkt a był dowolnie obrany, funkcja

$$f(x) = |x|$$

jest ciągła w całym przedziale $(-\infty, \infty)$. □

Przykład 8. Rozważmy funkcję

$$f(x) = [x]$$



[rys. 13]

której wykres podany jest na rys. 13. Z definicji funkcji *część całkowita* x wynika, że

$$f(x) = k \quad \text{dla} \quad k \le x < k+1$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Jeżeli x_0 nie jest liczbą całkowitą, to w pewnym jej otoczeniu f jest funkcją stałą, a więc jest ciągła w punkcie x_0. Załóżmy teraz, że $x_0 = k$. Jeżeli

$$x_n \to k, \quad x_n \ge k$$

to przynajmniej dla dostatecznie dużych n wyrazy ciągu $\{x_n\}$ leżą w przedziale $[k, k+1)$, zatem

$$f(x_n) = k \to f(k).$$

Na podstawie twierdzenia 4 funkcja f jest prawostronnie ciągła w punkcie k. Jeżeli natomiast obierzemy ciąg $\{x_n\}$ tak, by

$$x_n \to k, \quad x_n < k$$

to dla dostatecznie dużych n wyrazy ciągu leżą w przedziale $[k-1, k)$ i wówczas

$$f(x_n) = k - 1.$$

Wynika stąd, że

$$\lim_{x \to k-} f(x) = k - 1 \ne f(k).$$

A więc funkcja f nie jest lewostronnie ciągła w żadnym punkcie całkowitym. □

♡ ♡ ♡

5. Jednostajna ciągłość funkcji. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$ i niech $x_0 \in \mathbb{P}$. Zgodnie z twierdzeniem 2 oznacza to, że do dowolego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla $x \in \mathbb{P}$ spełniających warunek

$$|x - x_0| < \delta \tag{1}$$

zachodziła nierówność

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Zauważmy, że liczba δ jest dobierana do liczby ε przy ustalonym x_0. Jeżeli zmieniamy punkt x_0, to być może przy danym ε trzeba będzie dobrać inną, mniejszą liczbę δ na to, aby była spełniona nierówność epsilonowa (2). Ilustruje to następujący przykład:

Przykład 9. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad 0 < x \leq 1$$

i niech x_0 oraz $x_0 + h$ będą dwoma punktami przedziału $\mathbb{P} = (0,1]$. Wiemy (por. Przykład 4), że funkcja f jest ciągła w przedziale $\mathbb{P}$. Nierówność epsilonowa przybiera postać

$$\left| \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + h} \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Jeżeli $h > 0$, to (3) można zapisać w równoważnej postaci

$$\frac{h}{x_0(x_0 + h)} < \varepsilon,$$

co daje po prostych przekształceniach

$$h < h_1 = \frac{x_0^2 \varepsilon}{1 - x_0 \varepsilon} \tag{4}$$

(nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że $\varepsilon < 1$, wówczas prawa strona jest liczbą dodatnią). Jeżeli $h < 0$, to w podobny sposób przekształcając (3) otrzymujemy

$$|h| < h_2 = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + x_0 \varepsilon}. \tag{5}$$

Z warunków (4), (5) widać że nierówność (3) będzie spełniona dla x czyniących zadość warunkowi (1) tylko wtedy, gdy obierzemy

$$\delta = \min(h_1, h_2)$$

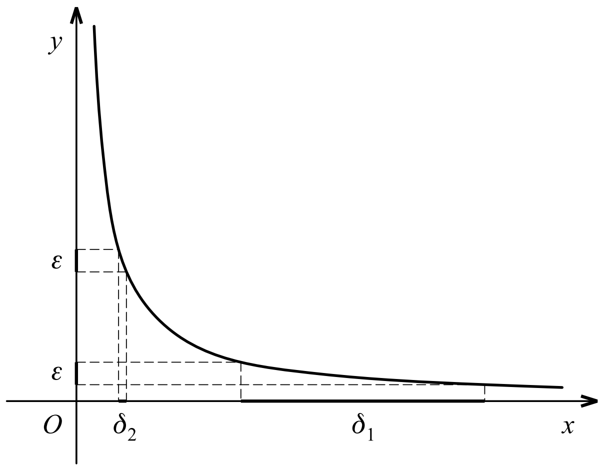
czyli

$$\delta = \delta(x_0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + x_0 \varepsilon}. \tag{6}$$

W przypadku obrania liczby δ większej, niż to określa wzór (6) nierówność epsilonowa dla funkcji nie będzie zachodzić.

Zauważmy, że przy ustalonym $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x_0 \to 0+} \delta(x_0, \varepsilon) = 0.$$



[rys. 14]

Jest to oczywiste, jeżeli spojrzymy na rys. 14. Im bliżej punktu $x = 0$, tym szybciej rośnie funkcja f, tym mniejszy musi więc być przedział, na którym funkcja osiąga przyrost nie przekraczający danej z góry liczby ε. $\square$

Powstaje pytanie, czy dla danej funkcji f ciągłej w przedziale $\mathbb{P}$ można dobrać do liczby ε liczbę δ w sposób "uniwersalny" tzn. tak, by z nierówności (1) wynikała nierówność (2) dla dowolnie obranego $x_0 \in \mathbb{P}$. W przypadku funkcji rozważanej w przykładzie 6 jest to niemożliwe z uwagi na (7). Przyczyna leży w tym, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest ciągła w przedziale $[0, 1]$, a jedynie w przedziale lewostronnie otwartym $(0, 1]$ - por. przykład 4. W dalszym ciągu podamy warunki dostateczne, przy których istnieje możliwość obrania liczby δ zależnej tylko od ε i odpowiedniej dla każdego punktu x_0 rozważanego przedziału.

Zaczniemy od wprowadzenia definicji. Mówimy, że funkcja f jest *jednostajnie ciągła w przedziale* $\mathbb{P}$, jeżeli do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla dowolnych $x', x'' \in \mathbb{P}$ spełniających nierówność

$$|x' - x''| < \delta \tag{8}$$

zachodziła nierówność epsilonowa

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{9}$$

Jednostajna ciągłość oznacza, że liczba δ jest dobrana tylko do liczby ε i nie zależy od punktów x', x''. Mówiąc inaczej, przyrost funkcji na odcinku o długości $< \delta$, dowolnie umieszczonym w przedziale $\mathbb{P}$, nigdy nie przekracza z góry danej liczby ε.

Łatwo sprawdzić, że funkcja jednostajnie ciągła w przedziale jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału (por. zadanie 20).

Przykład 10. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad 0 < x \leq 1.$$

Wiemy (por. Przykłady 4, 9), że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału $\mathbb{P} = (0,1]$. Udowodnimy, że nie jest ona jednostajnie ciągła w tym przedziale. Wystarczy w tym celu wykazać, że nie jest spełniony warunek podany w definicji jednostajnej ciągłości, co oznacza że funkcja f ma następującą własność:

istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$*, że przy dowolnym obiorze liczby* $\delta > 0$ *można znaleźć punkty* $x'_\delta, x''_\delta \in \mathbb{P}$ *takie, że*

$$|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$$

oraz

$$|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

DOWÓD jest prosty. Przyjmując

$$\varepsilon_0 = 1, \quad x' = \delta, \quad x'' = \frac{1}{2}\delta$$

mamy

$$\left|\frac{1}{x'_\delta} - \frac{1}{x''_\delta}\right| = \left|\frac{x''_\delta - x'_\delta}{x'_\delta \cdot x''_\delta}\right| = \frac{1}{\delta} \geq 1,$$

gdyż z założenia punkty x'_δ, x''_δ leżą w przedziale $(0,1]$, zatem musi być $\delta \leq 1$. □

Twierdzenie 9 (Heinego). *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale jednostajnie ciągła.*

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności. Przypuśćmy, że funkcja f ciągła w przedziale $\mathbb{P} = [a,b]$ nie jest w nim jednostajnie ciągła. Zaprzeczenie warunku jednostajnej ciągłości oznacza, że istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że przy dowolnym obiorze liczby $\delta > 0$ znajdziemy punkty $x'_\delta, x''_\delta \in \mathbb{P}$, dla których spełnione są nierówności

$$|x'_\delta - x''_\delta| < \delta \tag{10}$$

oraz

$$|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq 2\varepsilon_0. \tag{11}$$

W szczególności przyjmijmy

$$\delta = \frac{1}{n}, \quad x'_\delta = x'_n, \quad x''_\delta = x''_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ

$$a \leq x'_n \leq b, \tag{12}$$

ciąg $\{x'_n\}$ jest ograniczony i na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa (twierdzenie 3 rozdz.II §2) można z niego wyjąć podciąg zbieżny $x'_{n_k} \to c$, przy czym z (12) wynika, że $c \in [a, b]$. Na mocy (10) mamy

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$$

zatem

$$x'_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x''_{n_k} < x'_{n_k} + \frac{1}{n_k}$$

a stąd wynika, że również $x''_{n_k} \to c$. Ponieważ funkcja f jest ciągła w pukcie c, więc zgodnie z twierdzeniem 1

$$\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(c). \tag{13}$$

Natomiast z (11) wynika

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0$$

dla $k \in \mathbb{N}$, co przeczy równości (13). □

Zauważmy, że w dowodzie korzystaliśmy w sposób istotny z założenia, że funkcja jest ciągła w przedziale *domkniętym* $[a, b]$ (a więc w szczególności wpunkcie c). Jeżeli pominiemy to założenie, twierdzenie przestaje być prawdziwe, jak wskazuje Przykład 10.

♡ ♡ ♡

6. Funkcje ograniczone, kres górny i dolny funkcji. Mówimy, że funkcja f określona na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$ jest w tym zbiorze *ograniczona* jeżeli zbiór $f(D)$ jest ograniczony. Równoważne sformułowanie brzmi:

funkcja f jest *ograniczona w zbiorze* $D \subset \mathbb{R}$, jeżeli istnieje stała $A > 0$ taka, że

$$|f(x)| \leq A \tag{14}$$

dla $x \in D$.

Założmy, że f jest funkcją ograniczoną w zbiorze $D \subset \mathbb{R}$. Wobec tego (por. rozdz. I §2) zbiór $f(D)$ ma w zbiorze liczb rzeczywistych swój kres górny M i kres dolny m. Liczbę M nazywamy *kresem górnym funkcji f na zbiorze D*, zapisujemy

$$M = \sup_D f$$

lub

$$M = \sup_{x\in D} f(x).$$

Liczbę m nazywamy *kresem dolnym funkcji f na zbiorze D*, zapisujemy

$$m = \inf_D f$$

lub

$$m = \inf_{x\in D} f(x).$$

Z podanych w rozdz. I §2 warunków określających kres górny względnie dolny zbioru wynikają natychmiast

Twierdzenie 10.

$$\sup_D f = M$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki

(i) $f(x) \leq M$ *dla* $x \in D$,

(ii) *do dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $x_\varepsilon \in D$ *takie, że*

$$f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon.$$

□

oraz

Twierdzenie 11.

$$\inf_D f = m$$

wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są warunki

(i) $m \leq f(x)$ *dla* $x \in D$,

(ii) *do dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $x_\varepsilon \in D$ *takie, że*

$$m + \varepsilon > f(x_\varepsilon).$$

□

Niech w dalszym f będzie funkcją określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest *ograniczona z góry (ograniczona z dołu) w zbiorze D*, jeżeli zbiór $f(D)$ jest ograniczony z góry (z dołu). Można to sformułować inaczej w sposób równoważny:

f jest *ograniczona z góry w zbiorze D*, jeżeli istnieje liczba B taka, że

$$f(x) \leq B$$

dla $x \in D$;

f jest *ograniczona z dołu w zbiorze D*, jeżeli istnieje liczba b taka, że

$$b \leq f(x)$$

dla $x \in D$.

Z rozważań rozdz. I §2 wynika, że każda funkcja ograniczona z góry (z dołu) w zbiorze D posiada na zbiorze D skończony kres górny M (kres dolny m). Jeżeli funkcja F nie jest ograniczona z góry w zbiorze D, to przyjmujemy

$$\sup_D f = \infty.$$

Podobnie - jeżeli funkcja f nie jest ograniczona z dołu w zbiorze D, to przyjmujemy

$$\inf_D f = -\infty.$$

Opierając się na twierdzeniu 9 udowodnimy teraz ważną własność funkcji ciągłych.

Twierdzenie 12 (Weierstrassa). *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona i osiąga w nim swoje kresy (górny i dolny).*

DOWÓD. Udowodnimy najpierw

Lemat. *Jeżeli*

$$\sup_D f = M \leq \infty,$$

to istnieje w zbiorze D ciąg $\{x_n\}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M. \tag{15}$$

DOWÓD LEMATU. Jeżeli $M \in \mathbb{R}$, to zgodnie z twierdzeniem 10 do dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x_n \in D$ takie, że

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M,$$

a stąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach wynika (15). Jeżeli zaś $M = \infty$, to funkcja f nie jst ograniczona z góry w zbiorze D. Wobec tego do dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x_n \in D$ takie, że

$$f(x_n) > n$$

i stąd ponownie wynika (15). □

Przechodząc do dowodu twierdzenia 12 załóżmy, że funkcja f jest ciągła w przedziale $D = [a, b]$, niech

$$\sup_{[a,b]} f = M \leq \infty$$

i niech $\{x_n\}$ oznacza ciąg, októrym mowa w lemacie. Ciąg ten jest ograniczony, zatem na mocy twierdzenia Bolzano - Weierstrassa (twierdzenie 4 rozdz. II §2) można z niego wyjąć podciąg zbieżny $\{x_{n_k}\}$. Oznaczając

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = g$$

mamy

$$a \leq x_{n_k} \leq b$$

i stąd po przejściu do granicy (por twierdzenie 5 rozdz. II §1)

$$a \leq g \leq b.$$

Ponieważ z założenia funkcja f jest ciągła w punkcie g, mamy

$$\lim k \to \infty = f(g).$$

Z (15) wynika, zgodnie z twierdzeniem o podciągach (twierdzenie 3 rozdz. II §2), że

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$$

a więc musi być
$$M = f(g).$$
Oznacza to, że $M < \infty$, zatem funkcja f jest ograniczona z góry i osiąga szój kres górny dla $x = g$.

Dowód, że funkcja f jest ograniczona z dołu i osiąga swój kres dolny przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

Uwaga. Jeżeli funkcja f określona w przedziale $\mathbb{P}$ osiąga w nim swój kres górny M (kres dolny m), to liczba ta stanowi jej największą (najmniejszą) wartość w przedziale $\mathbb{P}$. W związku z tym niektórzy autorzy nazywają liczbę M *maksimum absolutnym* (lub *globalnym*) funkcji f, zaś liczbę m *minimum absolutnym* (lub *globalnym*) funkcji f w przedziale $\mathbb{P}$.

7. Własność Darboux. Mówimy, że funkcja f określona w przedziale $\mathbb{P}$ ma w tym przedziale *własność Darboux*,[1] jeżeli spełniony jest następujący warunek (zwany *warunkiem Darboux*):

(D) jeżeli $a, b \in \mathbb{P}$, $a < b$, $f(a) \neq f(b)$ oraz
$$f(a) < y < f(b) \quad \text{gdy} \quad f(a) < f(b)$$
lub
$$f(b) < y < f(a) \quad \text{gdy} \quad f(b) < f(a)$$
to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że
$$y = f(c).$$

Mówiąc mniej precyzyjnie, warunek Darboux oznacza, że funkcja f przyjmuje każdą wartość pośrednią między swoimi dwoma różnymi wartościami czyli, mówiąc inaczej, przechodzi od jednej wartości do drugiej przez wszystkie wartości pośrednie. Wydaje się rzeczą oczywistą, że własność Darboux ma każda funkcja ciągła, jeżeli zauważymy że wykres funkcji ciągłej kojarzy się nam z linią na płaszczyźnie nie mającą żadnych przerw. Istotnie, zachodzi

Twierdzenie 13 (Bolzano - Cauchy'ego). *Funkcja ciągła w przedziale* $\mathbb{P}$ *ma w tym przedziale własność Darboux.*

DOWÓD. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $f(a) < f(b)$ (w przeciwnym przypadku dwód przebiega podobnie) i niech y będzie ustaloną liczbą spełniającą nierówność
$$f(a) < y < f(b).$$
Należy okazać, że y jest wartością funkcji f w pewnym punkcie przedziału (a, b). Niech c_0 będzie środkiem przedziału $\mathbb{P}_0 = [a, b]$. Jeżeli $f(c_0) = y$, dowód twierdzenia jest zakończony. W przeciwnym wypadku zachodzi jedna z możliwości
$$\text{(i)} \quad f(a) < y < f(c_0) \qquad \text{lub} \qquad \text{(ii)} \quad f(c_0) < y < f(b).$$

---
[1] Jean Gaston Darboux (1842 - 1917), matematyk francuski. Zajmował się analizą matematyczną, geometrią różniczkową i mechniką, od 1884 r. był członkiem Paryskiej Akademii Nauk.

Przyjmijmy $\mathbb{P}_1 = [a, c_0]$ w przypadku (i) zaś $\mathbb{P}_1 = [c_0, b]$ w przypadku (ii) i przeprowadźmy opisaną konstrukcję zastępując przedział $\mathbb{P}_0$ przez $\mathbb{P}_1 = [a_1, b_1]$. Jeżeli c_1 jest środkiem przedziału $\mathbb{P}_1$ oraz $f(c_1) = y$, dowód jest zakończony. Jeżeli równość ta nie zachodzi, mamy znowu dwie możliwości

$$\text{(i)} \quad f(a_1) < y < f(c_1) \qquad \text{lub} \qquad \text{(ii)} \quad f(c_1) < y < f(b_1).$$

W przypadku (i) przyjmujemy $\mathbb{P}_2 = [a_1, c_1]$, w przypadku (ii) zaś $\mathbb{P}_2 = [c_1, b_1]$. Jeżeli powtarzając opisaną konstrukcję otrzymamy punkt c_m dla którego $f(c_m) = y$, dowód twierdzenia jest zakończony. Jeżeli zaś wartość y nie jest przujmowana przez funkcję f w żadnym punkcie c_n, otrzymujemy ciąg zstępujący przedziałów $\mathbb{P}_n = [a_n, b_n]$ taki, że

$$f(a_n) < y < f(b_n). \tag{16}$$

Na podstawie twierdzenia Ascoliego (twierdzenie 1 rozdz.II §2) istnieje punkt c należący do wszystkich przedziałów $\mathbb{P}_n$, mamy zatem

$$a_n \leq c \leq b_n \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{17}$$

Każdy z ciągów $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jest zbieżny jako ciąg monotoniczny i ograniczony (por. twierdzenie 4 rozdz.II §2). Ponieważ

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \quad \text{przy} \quad n \to \infty, \tag{18}$$

oba ciągi mają tą samą granicę, zaś z (17) wynika, że granicą tą jest liczba c. Korzystając z ciągłości funkcji f dostajemy po przejściu do granicy w (16)

$$f(c) \leq y \leq f(c)$$

czyli $f(c) = y$. □

Uwaga. Przeprowadzony dowód podaje jednocześnie metodę przybliżenia rozwiązania (być może nie jedynego) równania

$$f(x) = y \qquad\qquad (y \quad \text{dane}).$$

Oznaczając bowiem przez c_n środek przedziału $\mathbb{P}_n$ mamy

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

i stąd

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

Oszacowanie błędu nie przedstawia trudności, bowiem

$$|c_n - c| \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

czyli wobec (18)

$$|c_n - c| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Jak już wspomnieliśmy, własność Darboux kojarzy nam się z pojęciem funkcji, której wykres stanowi linię ciągłą na płaszczyźnie. Z udowodnionego twierdzenia wynika, że ciągłość funkcji stanowi tu warunek dostateczny. Nie jest to jednak bynajmniej warunek konieczny, jak wskazuje następujący przykład.

Przykład 11. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \ne 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Funkcja f jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \ne 0$ jako superpozycja funkcji ciągłych (twierdzenie 8), nie jest natomiast ciągła w punkcie $x = 0$, gdyż nie ma w tym punkcie granicy (por. Przykład 2 i Przykład 5 §2). Okażemy, że mimo to funkcja f ma własność Darboux w całym przedziale $(-\infty, \infty)$.

Obierzmy punkty $a, b \quad (a < b)$ tak, by $f(a) \ne f(b)$. Oczywiście, jeżeli przedział (a, b) nie zawiera zera, to warunek (D) wynika z ciągłości funkcji w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ na mocy twierdzenia 13. Wystarczy zatem rozważać przypadek

$$a < 0 < b.$$

Funkcja sinus jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych, zatem zgodnie z twierdzeniem 13 przyjmuje każdą wartość z przedziału $[-1, 1]$ w każdym przedziale

$$\mathbb{P}_k = [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$$

oraz

$$Q_k = [\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{2} + 2k\pi],$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wobec tego rozważana przez nas funkcja f przyjmuje każdą wartość z przedziału $[-1, 1]$, gdy $y = \frac{1}{x}$ przebiega którykolwiek z przedziałów $\mathbb{P}_k$, Q_k, co jest równoważne warunkowi

$$\frac{2}{(4k+3)\pi} \le x \le \frac{2}{(4k+1)\pi} \quad \text{lub} \quad \frac{2}{(4k+5)\pi} \le x \le \frac{2}{(4k+3)\pi}.$$

Jeżeli obierzemy k tak, by zachodziła nierówność

$$\frac{2}{(4k+1)\pi} < b$$

to funkcja f przyjmie w przedziale (a, b) każdą wartość z przedziału $[-1, 1]$ (nawet nieskończenie wiele razy). Ponieważ

$$f(a),\ f(b) \in [-1, 1]$$

funkcja przyjmie każdą wartość pośrednią między $f(a)$ i $f(b)$ (por. rys 7a). $\square$

Z twierdzeń 12 i 13 wynika jako prosty wniosek

Twierdzenie 14. *Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $\mathbb{P}$ i niech m, M oznaczają jej kresy, dolny i górny, na tym przedziale. Wówczas*

$$f(\mathbb{P}) = [m, M].$$

DOWÓD. Z twierdzenia Weierstrassa (twierdzenie 12) wynika istnienie punktów $x_1, x_2 \in \mathbb{P}$ takich, że

$$f(x_1) = m, \quad f(x_2) = M.$$

Jeżeli $m < y_0 < M$, to zgodnie z twierdzeniem 13 istnieje punkt x_0 taki, że

$$x_1 < x_0 < x_2$$

oraz

$$f(x_0) = y_0.$$

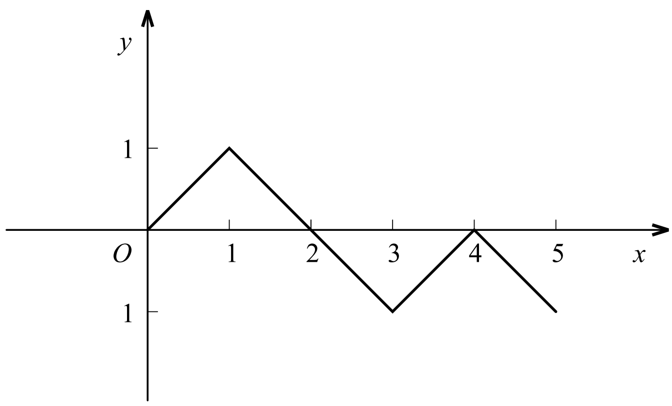
Zatem funkcja f przyjmuje w przedziale $\mathbb{P}$ każdą wartość z przedziału $[m, M]$. Oczywiście nie może przyjmować wartości nie należących do tego przedziału, gdyż

$$m \leq f(x) \leq M$$

dla $x \in \mathbb{P}$ z definicji kresów. □

Przykład 12. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{dla} \quad 1 < x < 3, \\ x - 4 & \text{dla} \quad 3 \leq x < 4, \\ 4 - x & \text{dla} \quad 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$



[rys. 15]

Jest to funkcja *przedziałami liniowa* (rys. 15). W każdym z przedziałów $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$ funkcja f jest ciągła jako funkcja liniowa. Aby wykazać jej ciągłość w całym przedziale $[0,5]$ wystarczy zbadać granice jednostronne na końcach wspomnianych przedziałów. Mamy

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0),$$
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = 1 = f(1),$$
$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3+} f(x) = -1 = f(3),$$
$$\lim_{x\to 4-} f(x) = \lim_{x\to 4+} f(x) = 0 = f(4),$$
$$\lim_{x\to 5-} f(x) = -1 = f(5)$$

skąd wynika ciągłość w punktach załamania wykresu. Zatem f jest ciągła w przedziale domkniętym $\mathbb{P} = [0,5]$. Z rys.15 widać, że

$$m = -1 = f(3) = f(5)$$

oraz

$$M = 1 = f(1),$$

funkcja f osiąga więc w przedziale $\mathbb{P}$ oba swoje kresy - zgodnie z twierdzeniem 12. Zbiór wartości funkcji $f(\mathbb{P})$ czyli rzut wykresu na oś y-ów jest przedziałem $[-1,1]$ - zgodnie z twierdzeniem 14.

8. Ciągłość funkcji odwrotnej. W §1 wprowadziliśmy pojęcie funkcji odwrotnej do funkcji różnowartościowej. Udowodnimy teraz

Twierdzenie 15 (o ciągłości funkcji odwrotnej). *Jeżeli f jest funkcją ciągłą i ściśle monotoniczną w przedziale domkniętym $\mathbb{P} = [a,b]$, to funkcja odwrotna jest ciągła w przedziale $f(\mathbb{P})$.*

DOWÓD. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że funkcja f jest ściśle rosnąca, wówczas

$$f(\mathbb{P}) = [f(a), f(b)].$$

Niech $y_0 \in (f(a), f(b))$, zatem

$$y_0 = f(x_0)$$

gdzie $a < x_0 < b$. Obierzmy dowolnie ciąg $\{y_n\}$ zbieżny do y_0, wówczas przynajmniej dla dostatecznie dużych n wyrazy ciągu leżą we wnętrzu przedziału $f(\mathbb{P})$. Zgodnie z twierdzeniem 13 oznacza to, że

$$y_n = f(x_n) \qquad (a < x_n < b).$$

Aby udowodnić ciągłość funkcji odwrotnej w punkcie y_0 należy wykazać, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do x_0. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wobec tego istnieje taka liczba $\varepsilon_0 > 0$, że przy dowolnym obiorze liczby k znajdziemy w ciągu wyraz x_{n_k} $(n_k > k)$, dla którego nie jest spełniona nierówność epsilonowa przy $\varepsilon = \varepsilon_0$. Przyjmując kolejno $k = 1, 2, ..$ otrzymujemy ciąg $\{x_{n_k}\}$ wybrany z ciągu $\{x_n\}$ (por. rozdz. II §2 punkt 3) o tej własności, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi jedna z nierówności

$$x_{n_k} \leq x_0 - \varepsilon_0 \quad \text{lub} \quad x_{n_k} \geq x_0 + \varepsilon_0.$$

Zgodnie z założeniem, że funkcja f jest ściśle rosnąca, wynika stąd dla $k \in \mathbb{N}$

$$y_{n_k} \leq Y_1 < y_0 \quad \text{lub} \quad y_{n_k} \geq Y_2 > y_0, \tag{19}$$

gdzie

$$Y_1 = f(x_0 - \varepsilon_0), \qquad Y_2 = f(x_0 + \varepsilon_0).$$

Ciąg $\{y_{n_k}\}$ jest ciągiem wybranym z ciągu $\{y_n\}$, zatem zgodnie z twierdzeniem 2 rozdz. II §2 jest zbieżny do y_0 - co przeczy nierównościom (19).

Udowodniliśmy zatem ciągłość funkcji odwrotnej w każdym punkcie wewnętrznym przedziału $f(\mathbb{P})$. Dowód prawostronnej ciągłości w punkcie $f(a)$ i lewostronnej ciągłości w punkcie $f(b)$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi. $\square$

Zastosujemy twierdzenie 15 do dowodu ciągłości funkcji odwrotnych do funkcji elementarnych, które były omawiane w §1.

1^0 Funkcja

$$f(x) = \sin x$$

jest ciągła i ściśle rosnąca w przedziale $\mathbb{P} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, przy czym $m = 1$, $M = 1$. Wobec tego *funkcja odwrotna*

$$g(x) = \arcsin x$$

jest określona i ciągła w przedziale $[-1, 1]$.

2^0 Funkcja

$$f(x) = \cos x$$

jest ciągła i ściśle monotoniczna w przedziale $\mathbb{P} = [0, \pi]$, przy czym $m = -1, M = 1$. Wobec tego *funkcja odwrotna*

$$g(x) = \arccos x$$

jest określona i ciągła w przedziale $[-1, 1]$.

3^0 Funkcja

$$f(x) = \mathrm{tg} x$$

jest ciągła i ściśle rosnąca w przedziale otwartym $\mathbb{P} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, przy czym

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \mathrm{tg} x = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \mathrm{tg} x = \infty. \tag{20}$$

Opierając się na twierdzeniu 13 łatwo udowodnić, że funkcja $\mathrm{tg} x$ przyjmuje w przedziale $\mathbb{P}$ każdą wartść $y_0 \in \mathbb{R}$. Istotnie, z (20) wynika (por. §2 p. 5) istnienie liczby $\delta > 0$ takiej, że

$$\mathrm{tg} x < y_0 \quad \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2} + \delta$$

oraz

$$\text{tg}x > y_0 \quad \text{dla} \quad \frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2}.$$

Wobec tego

$$\text{tg}(-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}) < y_0 < \text{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}),$$

a więc istnieje

$$x_0 \in (-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2})$$

takie, że

$$y_0 = \text{tg}x_0.$$

Ponadto, twierdzenie 15 zapewnia ciągłość funkcji odwrotnej w punkcie y_0, gdyż funkcja tg$x$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}]$. Zatem *funkcja odwrotna*

$$g(x) = \text{arctg}x$$

jest określona i ciągła w przedziale $(-\infty, \infty)$.

4^0 Funkcja

$$f(x) = \text{ctg}x$$

jest ciągła i ściśle malejąca w przedziale otwartym $\mathbb{P} = (0, \pi)$, przy czym

$$\lim_{x \to 0+} \text{ctg}x = \infty, \qquad \lim_{x \to \pi-} \text{ctg}x = -\infty.$$

Rozumując podobnie, jak w punkcie 3^0 dowodzimy, że funkcja ctg$x$ przyjmuje w przedziale $\mathbb{P}$ każdą wartość $y_0 \in \mathbb{R}$ i że funkcja odwrotna jest ciągła w punkcie y_0. Zatem *funkcja odwrotna*

$$g(x) = \text{arcctg}x$$

jest określona i ciągła w przedziale $(-\infty, \infty)$.

5^0 W §1 wprowadziliśmy funkcję logarytmiczną jako odwrotną do funkcji wykładniczej

$$f(x) = a^x.$$

o podstawie $a > 1$. Funkcja f jest ciągła i ściśle rosnąca w przedziale $(-\infty, \infty)$, przy czym (por. §2 Przykład 10)

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} a^x = \infty. \tag{21}$$

Przyjmuje ona każdą wartość dodatnią. Istotnie, z (21) wynika (por. §2 twierdzenia 5, 6), że do dowolnej liczby $y_0 > 0$ można dobrać liczby x_1, x_2 tak, by

$$a^x < y_0 \quad \text{dla} \quad x < x_1$$

oraz
$$a^x > y_0 \quad \text{dla} \quad x > x_2.$$
Wobec tego
$$a^{x_1-1} < y_0 < a^{x_2+1}$$
i zgodnie z twierdzeniem 13 istnieje
$$x_0 \in (x_1 - 1, x_2 + 1)$$
takie, że
$$y_0 = a^{x_0}.$$
Twierdzenie 15 zapewnia ciągłość funkcji odwrotnej w punkcie y_0, gdyż funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[x_1 - 1, x_2 + 1]$. Zatem *funkcja odwrotna*
$$g(x) = \log_a x$$
jest określona i ciągła w przedziale $(0, \infty)$. Wynika stąd, że dodatkowe założenie uczynione w dowodzie twierdzenia 4 §1 nie jest potrzebne.

6^0 W rozdziale I §2 udowodniliśmy istnienie pierwiastka stopnia n z dowolnej liczby dodatniej. Podamy teraz inny dowód tego faktu oparty na twierdzeniu 13.

Funkcja potęgowa o wykładniku naturalnym
$$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
jest ciągła i ściśle rosnąca w przedziale $[0, \infty)$. Przyjmując $t = x - 1$ i stosując nierówność Bernoulliego dostajemy dla $x > 1$
$$x^n = (1 + t)^n \geq 1 + n(x - 1)$$
skąd łatwo otrzymujemy
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \tag{22}$$
(szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi). Ponadto
$$f(0) = 0.$$
Z ciągłości funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ oraz z (22) wynika, że do dowolnie obranej liczby $y_0 > 0$ istnieją liczby dodatnie x_1, x_2 takie, że
$$0 < f(x) < y_0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < x_1$$
oraz
$$f(x) > y_0 \quad \text{dla} \quad x > x_2.$$

Wobec tego

$$f(\frac{x_1}{2}) < y_0 < f(2x_2)$$

i zgodnie z twierdzeniem 13 w przedziale $(\frac{x_1}{2}, 2x_2)$ istnieje punkt y_0 taki, że

$$x_0^n = y_0$$

a to oznacza, że

$$x_0 = \sqrt[n]{y_0}.$$

Ponieważ funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[0, 2x_2]$, funkcja odwrotna jest ciągła w punkcie y_0 i ciągła prawostronnie w punkcie $y = 0$. Zatem *funkcja odwrotna*

$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$

jest określona i ciągła w przedziale $[0, \infty)$.

7^0 Funkcja potęgowa

$$f(x) = x^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

określona w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$ może być przedstawiona w postaci

$$f(x) = e^{\alpha \log x}.$$

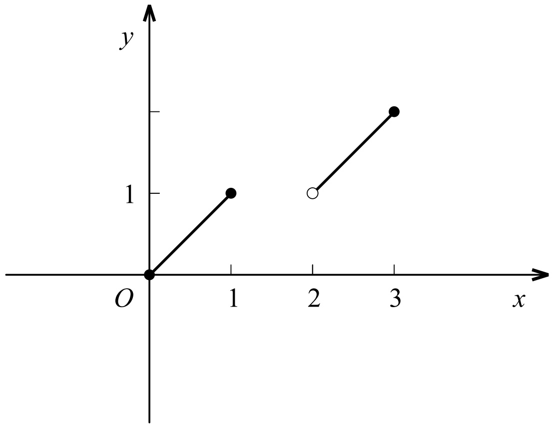
Wobec tego *funkcja potęgowa jest ciągła w przedziale* $(0, \infty)$ na mocy twierdzenia 8 jako superpozycja funkcji ciągłych (logarytmicznej, liniowej i wykładniczej).

Udowodniliśmy zatem, że funkcje elementarne wprowadzone w §1 są ciągłe w przedziałach, w których są określone.

Wróćmy jeszcze do twierdzenia 15 o ciągłości funkcji odwrotnej.

Przykład 13. Niech (rys. 16)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1, \\ x - 1 & \text{dla} \quad 2 < x \le 3. \end{cases}$$



[rys. 16]

Funkcja f jest ściśle rosnąca i ciągła w każdym z przedziałów $[0,1]$, $(2,3]$. Funkcja odwrotna ma postać

$$g(y) = \begin{cases} y & \text{dla} \quad 0 \le y \le 1, \\ y+1 & \text{dla} \quad 1 < y \le 2 \end{cases}$$

nie jest więc ciągła w punkcie $y = 1$, gdyż

$$\lim_{y \to 1+} g(y) = 2 \ne \lim_{y \to 1-} g(y) = 1,$$

zatem nie istnieje granica funkcji g przy $y \to 1$. Widzimy więc, że funkcja odwrotna do funkcji f ciągłej może nie być ciągła, jeżeli pominiemy założenie (uczynione w twierdzeniu 15), że f jest rozważana na przedziale. W naszym przykładzie nieciągłość funkcji odwrotnej wynika z faktu, że funkcja f jest rozważana na sumie przedziałów $[0,1] \cup (2,3]$.

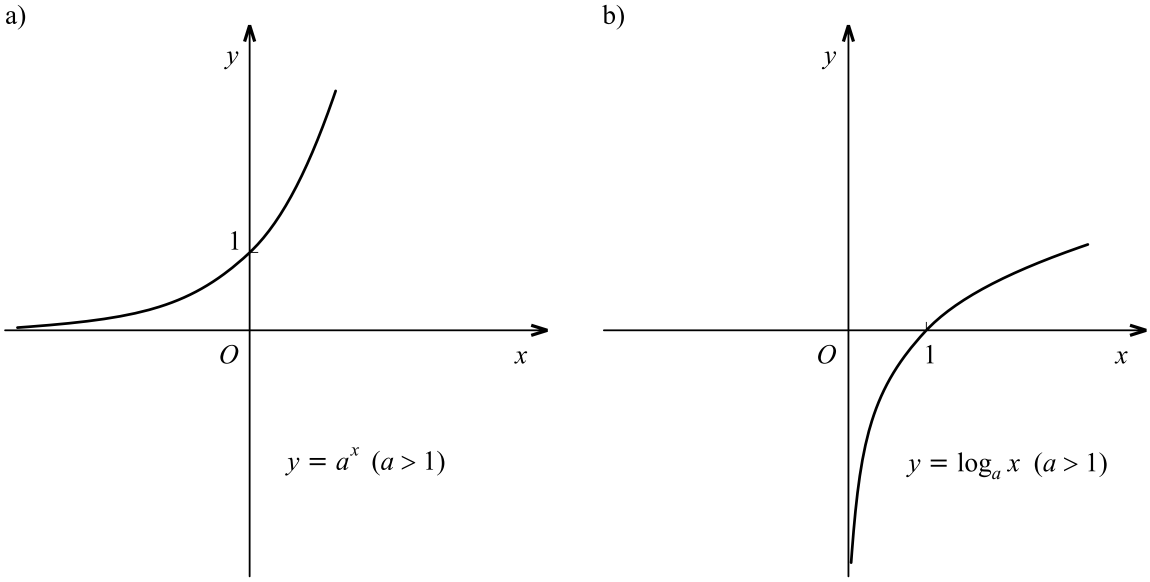
9. Wykresy funkcji: wykładniczej, logarytmicznej i potęgowej. Na zakończenie zestawimy jeszcze raz własności funkcji wykładniczej, logarytmicznej i potęgowej oraz naszkicujemy ich wykresy.

I. Wiemy, że funkcja wykładnicza

$$f(x) = a^x \qquad (a > 1)$$

jest określona na całej osi rzeczywistej, ściśle rosnąca oraz

$$a^0 = 1.$$



[rys. 17]

Wykres jej podajemy na rys. 17a) (por. wzory (21)).

II. Funkcja logarytmiczna

$$f(x) = \log_a x \qquad (a > 1)$$

jest określona w przedziale $(0, \infty)$ i ściśle rosnąca jako odwrotna do funkcji ściśle rosnącej (por. §1 twierdzenie 1). Ponadto

$$\lim_{x \to 0+} \log_a x = -\infty \tag{24}$$

oraz

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty. \tag{25}$$

Aby wykazać (24) wystarczy, zgodnie z twierdzeniem 9 §2, przy dowolnie obranej liczbie $q \in \mathbb{R}$ przyjąć

$$\delta = a^q,$$

wówczas

$$\log_a x < \log_a \delta = q$$

dla $0 < x < \delta$. Dla dowodu (25) należy oprzeć się na twierdzeniu 5 §2 i przyjąć dla dowolnie obranego $Q \in \mathbb{R}$

$$P = a^Q,$$

wówczas

$$\log_a x > \log_a P = Q$$

dla $x > P$. Z definicji funkcji logarytmicznej wynika, że

$$\log_a 1 = 0.$$

Wobec tego

$$\log_a x < 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < 1,$$

$$\log_a x > 0 \quad \text{dla} \quad x > 1.$$

Wykres funkcji logarytmicznej podany jest na rys. 17b.

Na zakończenie przypomnimy regułę rachunkową

$$\log_a x = (\log_a b)(\log_b x) \quad (a, b > 1;\ x > 0) \tag{26}$$

z której wynika, że funkcje logarytmiczne o różnych podstawach różnią się od siebie jedynie stałym (dodatnim) czynnikiem. Sprawdzenie wzoru (26) pozostawiamy Czytelnikowi.

III. Funkcja potęgowa

$$f(x) = x^\alpha$$

jest określona w przedziale $(0, \infty)$ i ściśle rosnąca gdy $\alpha > 0$ oraz ściśle malejąca gdy $\alpha < 0$. Ze wzorów (21), (23), (24), (25) wynika, że

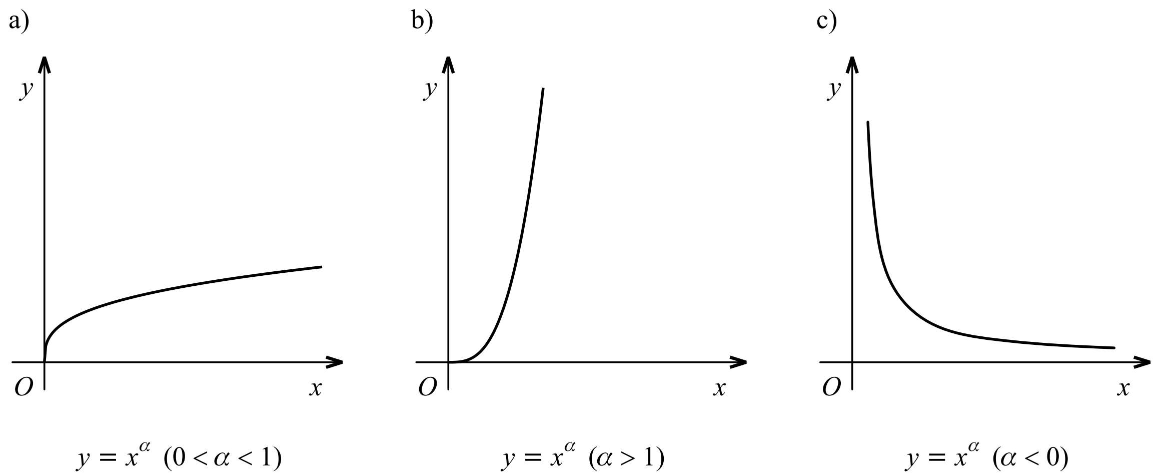
(i) dla $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} x^\alpha = \infty,$$

(ii) dla $\alpha < 0$

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} x^\alpha = 0.$$

Wykres funkcji potęgowej podany jest na rysunkach 18 a), 18 b), 18 c).



[rys. 18]

♡ ♡ ♡

10. Własności kresu górnego i dolnego funkcji. W punkcie 6 wprowadziliśmy pojęcie kresu górnego i kresu dolnego funkcji, teraz omówimy dokładniej ich własności. Będziemy zakładali, że funkcje f, g, F mają wspólną dziedzinę $D \subset \mathbb{R}$ oraz że są ograniczone w D.

Twierdzenie 16. *Jeżeli*

$$f(x) \le g(x) \tag{27}$$

dla $x \in D$ *to*

$$\inf_D f \le \inf_D g, \qquad \sup_D f \le \sup_D g. \tag{28}$$

DOWÓD opiera się na lemacie, który wynika natychmiast z definicji kresu górnego i kresu dolnego.

Lemat. *Jeżeli*

$$A \le F(x) \le B$$

dla $x \in D$, *to*

$$A \le \inf_D F \le \sup_D F \le B.$$

Przejdźmy do dowodu twierdzenia. Z nierówności (27) wynika, że każde ograniczenie dolne funkcji f jest również ograniczeniem dolnym funkcji g, zatem

$$\inf_D f \le g(x) \quad \text{dla} \quad x \in D,$$

i stąd na mocy lematu wynika pierwsza z nierówności (28). Podobnie każde ograniczenie górne funkcji g jest ograniczeniem górnym funkcji f, stąd

$$f(x) \le \sup_D g \quad \text{dla} \quad x \in D$$

i na mocy lematu dostajemy drugą z nierówności (28). □

Twierdzenie 17. *Zachodzą nierówności*

$$\text{(i)} \quad \sup_D (f+g) \le \sup_D f + \sup_D g,$$

$$\text{(ii)} \quad \inf_D (f+g) \ge \inf_D f + \inf_D g.$$

Ponadto, jeżeli $f(x) \ge 0, \quad g(x) \ge 0$ *dla* $x \in D$, *to*

$$\text{(iii)} \quad \sup_D (fg) \le (\sup_D f)(\sup_D g),$$

$$\text{(iv)} \quad \inf_D (fg) \ge (\inf_D f)(\inf_D g).$$

DOWÓD. Z definicji kresu górnego mamy dla $x \in D$

$$f(x) \le \sup_D f \tag{29}$$

oraz

$$g(x) \le \sup_D g, \tag{30}$$

co po dodaniu daje

$$f(x) + g(x) \le \sup_D f + \sup_D g.$$

Stosując lemat otrzymujemy punkt (i). W przypadku f, g nieujemnych możemy nierówności (29), (30) pomnożyć stronami, co daje

$$f(x)g(x) \le (\sup_D f)(\sup_D g)$$

dla $x \in D$, a stąd w oparciu o lemat dostajemy (iii). Dowód punktów (ii), (iv) przebiega podobnie, pozostawiamy go Czytelnikowi. □

Twierdzenie 18. *Zachodzą równości*

$$\text{(i)} \quad \sup_D(\alpha f) = \alpha \sup_D f, \quad \inf_D(\alpha f) = \alpha \inf_D f$$

gdy $\alpha \ge 0$,

$$\text{(ii)} \quad \sup_D(\alpha f) = \alpha \inf_D f, \quad \inf_D(\alpha f) = \alpha \sup_D f$$

gdy $\alpha \le 0$,

$$\text{(iii)} \quad \sup_D(\beta + f) = \beta + \sup_D f, \quad \inf_D(\beta + f) = \beta + \inf_D f$$

dla dowolnego $\beta \in \mathbb{R}$.

DOWÓD. Dla $\alpha = 0$ równości w punktach (i) i (ii) są oczywiste. Załóżmy wobec tego, że $\alpha > 0$ i niech

$$M = \sup_D f.$$

Oznacza to, że

$$f(x) \le M \tag{31}$$

dla $x \in D$ oraz że do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje punkt $x_\varepsilon \in D$, w którym spełniona jest nierówność

$$f(x_\varepsilon) > M - \frac{\varepsilon}{\alpha}. \tag{32}$$

Po pomnożeniu (31), (32) przez α stwierdzamy, że (por. twierdzenie 10)

$$\sup_D(\alpha f) = \alpha M$$

co daje pierwszą z równości (i). Dowody pozostałych równości są podobne i pozostawiamy je Czytelnikowi. □

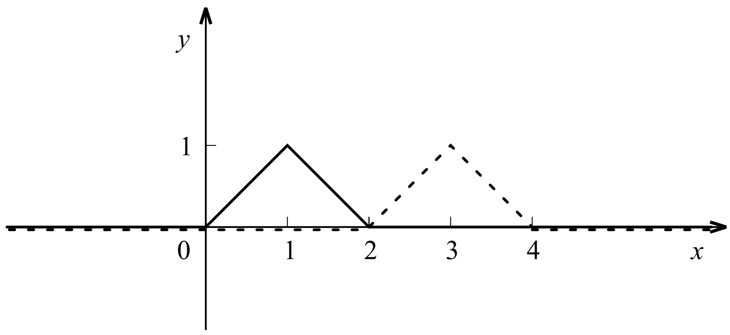
Zauważmy, że nierówności w twierdzeniu 17 nie można zastąpić przez znak =, jak wskazuje następujący

Przykład 14. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1, \\ 2 - x & \text{dla} \quad 1 < x \le 2, \\ 0 & \text{dla pozostałych} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

oraz

$$g(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dla} \quad 2 \le x \le 3, \\ 4 - x & \text{dla} \quad 3 < x \le 4, \\ 0 & \text{dla pozostałych} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



[rys. 19]

Na rys. 19 podane są wykresy funkcji f (linia ciągła) oraz funkcji g (linia przerywana). Mamy

$$\sup_{\mathbb{R}} f = \sup_{\mathbb{R}} g = \sup_{\mathbb{R}}(f + g) = 1$$

oraz

$$f(x)g(x) = 0$$

dla $x \in \mathbb{R}$, zatem w punktach (i), (iii) twierdzenia 17 zachodzi ostra nierówność. □

Zadania.

1. Znaleźć granice ciągów

$$a_n = \sin(\sqrt[2n]{2n}\frac{\pi}{2}),$$
$$b_n = \cos(\pi e^{-1}(1+\frac{1}{n})^n),$$
$$c_n = \text{tg}\,(\frac{\pi}{4}u_n) \quad \text{gdzie} \quad u_n = \frac{-1}{n}(1+\sqrt{5}+\dots+\sqrt[n]{5}),$$
$$d_n = \text{ctg}\,(\frac{\pi}{4}n^{1/n}),$$
$$x_n = \log_2 \frac{4n+1}{n+2},$$
$$y_n = \log(1+\frac{1}{n})^{2n},$$
$$z_n = 3^{\sqrt[n]{n2^{-n}}}, \qquad w_n = (\frac{n+1}{n+2})^{3/2}.$$

Wskazówka. Wykorzystać ciągłość funkcji trygonometrycznych, funkcji logarytmicznej, wykładniczej i potęgowej oraz oprzeć się na twierdzeniu 1.

2. Wyrażenie

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (a_j \geq 0 \quad \text{dla} \quad j = 1, \dots, n)$$

nazywamy *średnią geometryczną* liczb $a_1, \dots, a_n$. Udowodnić

Twierdzenie o średniej geometrycznej. *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny do granicy $a > 0$ (być może niewłaściwej), to*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = a.$$

Wskazówka. Logarytmując wyrażenie G_n sprowadzić zagadnienie do twierdzenia o średniej arytmetycznej (rozdz. II §2 twierdzenie 12). Następnie wykorzystać własności funkcji logarytmicznej i wykładniczej (punkt 8, 9) oraz twierdzenie 1.

3. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}.$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenie o średniej geometrycznej (zadanie 2) do ciągu

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n.$$

4. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\alpha}{n})^n = e^\alpha$$

dla dowolnie ustalonego $\alpha \in \mathbb{R}$.
Wskazówka. Wykorzystać Przykład 13 §2 oraz ciągłość funkcji potęgowej

$$f(x) = x^{\alpha}.$$

5. Obliczyć granicę ciągu określonego następująco

$$v_1 = a > 0, \quad v_2 = b > 0,$$
$$v_{n+1} = \sqrt{v_{n-1} \cdot v_n} \quad \text{dla} \quad n > 1.$$

Wskazówka. Najpierw znaleźć granicę ciągu

$$u_n = \log v_n$$

opierając się na zadaniu 16 rozdz. II §2. Następnie skorzystać z ciągłości funkcji wykładniczej i oprzeć się na twierdzeniu 1.

6. Funkcję

$$g(x) = \log_a x \quad (0 < a < 1)$$

definiujemy jako funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej

$$f(x) = a^x$$

(podobnie, jak w przypadku $a > 1$). Udowodnić, że funkcja g jest określona dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Narysować jej wykres.
Wskazówka. Przeprowadzić rozumowanie podobne jak w przypadku $a > 1$ (por. punkt 8).

7. Dla funkcji g określonej w zadaniu 6 udowodnić twierdzenie 4 §1 oraz zależności

$$\log_a x = -\log_{1/a} x,$$
$$(\log_a b) \cdot (\log_b a) = 1,$$
$$\log_a x = (\log_a b)(\log_b x)$$

dla $a, b, x > 0, \quad a \neq 1,\ b \neq 1$.

8. Które z podanych liczb są wymierne

$$\log_{\sqrt{2}} 2, \quad \log_3 \sqrt{3}, \quad \log_{10} 2, \quad \log_5 3\ ?$$

9. Udowodnić, że

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\log x} = \infty,$$
$$\text{(ii)} \quad \lim_{x \to 0+} x \log x = 0.$$

Wskazówka. W punkcie (i) zastosować podstawienie

$$y = \log x,$$

następnie wykorzystać zadanie 15 §2. W punkcie (ii) podstawić

$$t = \frac{1}{x}$$

i wykorzystać punkt (i).

10. Naszkicować wykres i zbadać ciągłość następujących funkcji

$$\text{a.)}\quad f(x) = x[x], \quad \text{b.)}\quad f(x) = x - [x],$$
$$\text{c.)}\quad f(x) = |x| + |x+1|, \quad \text{d.)}\quad f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

11. Podać przykład funkcji ciągłej g takiej, by funkcja

$$f(x) = [g(x)] \tag{33}$$

była a.) ciągła, b.) nieciągła. Przy jakich założeniach o funkcji g funkcja f określona wzorem (33) jest ciągła?

12. Podać dziedzinę i naszkicować wykres funkcji

$$f(x) = (x-1)^{\sqrt{2}}, \qquad g(x) = (x^2+1)^{-\sqrt{5}}.$$

Czy funkcje te są ciągłe?

13. Podać dziedzinę i zbadać ciągłość funkcji

$$\text{a.)}\quad f(x) = \log(1 + \cos^2 x + \sin^2 x),$$
$$\text{b.)}\quad f(x) = \log(1 - 2x),$$
$$\text{c.)}\quad f(x) = (1 - x^2)^{\log 3}.$$

14. Naszkicować wykres i zbadać ciągłość funkcji

$$\text{a.)}\quad f(x) = \begin{cases} |\sin\frac{1}{x}| & \text{dla} \quad x \neq 0,\ -\frac{2}{\pi} \le x \le \frac{2}{\pi}, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$
$$\text{b.)}\quad f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0,\ -\frac{2}{\pi} \le x \le 2\pi, \\ 2 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$
$$\text{c.)}\quad f(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{x^2-1} & \text{dla} x \neq \pm 1,\ -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 1,\ x = -1. \end{cases}$$

Czy funkcje te mają własność Darboux?

15. Niech f, g będą funkcjami ograniczonymi w pewnym otoczeniu punktu a, przy czym f jest ciągła w punkcie a, zaś g jest w tym punkcie nieciągła. Udowodnić, że iloczyn fg jest funkcją ciągłą w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) = 0$.

16. Niech f będzie funkcją parzystą, g funkcją nieparzystą. Udowodnić, że
a.) f jet ciągła w zerze wtedy i tylko wtedu gdy jest prawostronnie ciągła w zerze,
b.) g jest ciągła w zerze wtedy i tylko wtedy gdy jest prawostronnie ciągła w zerze.

17. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \quad \text{niewymiernych,} \\ \frac{1}{q} & \text{dla} \quad x = \frac{p}{q} \ (p \in \mathbb{N},\ q \in Z) \end{cases}$$

(zakładamy, że ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny).
Wskazówka. Wykorzystać zadanie 6 rozdz. I §2 oraz zadanie 21 rozdz. II §1.

18. Niech

$$f(x) = -n(n+1)x + 2n + 1 \quad \text{dla} \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Udowodnić, że funkcja f jest ciągła w przedziale $(0, 1]$, ale nie jest w tym przedziale jednostajnie ciągła.

19. Niech

$$f(x) = -n^2 x + b_n \quad \text{dla} \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

a.) dobrać stałe b_n tak, by fukcja f była ciągła w przedziale $(0, 1]$,
b.) udowodnić, że przy żadnym obiorze stałych b_n funkcja f nie jest jednostajnie ciągła w tym przedziale.

20. Udowodnić, że funkcja jednostajnie ciągła w przedziale $\mathbb{P}$ jest ciągła w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału i ma granicę jednostronną na jego końcach. Czy słuszne jest twierdzenie odwrotne?
Wskazówka. W dowodzie istnienia granicy oprzeć się na twierdzeniu 13 §2.

21. Zbadać jednostajną ciągłość następujących funkcji w przedziale $(0, 10)$:

$$\text{a.)} \quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \text{b.)} \quad f(x) = \frac{1}{1-x},$$
$$\text{c.)} \quad f(x) = \sin(\pi x^2).$$

22. Udowodnić, że funkcja jednostajnie ciągła w przedziale ograniczonym jest w tym przedziale ograniczona.

23. Udowodnić, że iloczyn dwóch funkcji jednostajnie ciągłych i ograniczonych w przedziale $\mathbb{P}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą.

24. Niech

$$f(x) = x, \quad g(x) = \sin x.$$

Udowodnić, że a.) każda z funkcji f, g jest jednostajnie ciągła w przedziale $(-\infty, \infty)$; b.) iloczyn fg nie jest jednostajnie ciągły w tym przedziale.
Porównać z twierdzeniem sformułowanym w zadaniu 23.

25. Funkcja f jednostajnie ciągła w przedziale $(0, \infty)$ spełnia warunek

$$\lim_{n\to\infty} f(na) = 0 \quad \text{dla dowolnego} \quad a > 0.$$

Udowodnić, że

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Wskazówka. Skorzystać z równości

$$f(x) = [f(x) - f(na)] + f(na)$$

i oszacować oba składniki po prawej stronie dla dostatecznie dużych x.

26. Udowodnić, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma w zbiorze liczb rzeczywistych co najmniej jeden pierwiastek.
Wskazówka. Skorzystać z zadania 17 §2 i oprzeć się na twierdzeniu 13.

27. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek

$$x^2 + y^2 = 1$$

istnieje dokładnie jedna liczba $\alpha \in (-\pi, \pi]$ taka, że

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha.$$

Wskazówka. Rozważyć oddzielnie przypadki $x = 0$, $y^2 = 1$ oraz $x^2 = 1$, $y = 0$, następnie założyć kolejno $0 < x < 1$ oraz $-1 < x < 0$ i oprzeć się na twierdzeniu 13.

28. Dla podanej niżej funkcji f i przedziału $\mathbb{P}$ znaleźć zbiór $f(\mathbb{P})$. Wynik porównać z twierdzeniem 14.

a.) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad \mathbb{P} = (0, 1];$

b.) $f(x) = \sin x \quad \text{dla} \quad 0 < x \le \pi,$
$f(0) = 1, \quad \mathbb{P} = [0, 1];$

c.) $f(x) = 2x \quad \text{dla} \quad 0 \le x < 1,$
$f(1) = 3, \quad \mathbb{P} = [0, 1];$

d.) $f(x) = x^2, \quad \mathbb{P} = [-1, 1].$

Naszkicować wykresy podanych funkcji. Które z nich są ciągłe w przedziale $\mathbb{P}$?

29. Podać przykład funkcji f, g dla których zachodzi ostra nierówność w punktach (ii), (iv) twierdzenia 17.

30. Niech

$$f(x) = \cos x, \qquad g(x) = \cos x, \qquad D = [0, \frac{\pi}{2}].$$

Sprawdzić, że w punktach (i), (iii) twierdzenia 17 zachodzi nierówność ostra.

31. Udowodnić, że funkcja f ciągła i różnowartościowa w przedziale $[a, b]$ jest albo ściśle rosnąca albo ściśle malejąca w tym przedziale.
Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 13 udowodnić najpierw, że dla $x \in (a, b)$
(i) z warunku $f(a) < f(b)$ wynika $f(a) < f(x) < f(b)$,
(ii) z warunku $f(a) > f(b)$ wynika $f(a) > f(x) > f(b)$.
Następnie rozważyć punkty

$$a < x' < x'' < b$$

i powtórzyć przeprowadzone poprzednio rozumowanie.

32. Uogólnić stwierdzenie sformułowane w zadaniu 31 na przypadek dowolnego przedziału $\mathbb{P}$ (ograniczonego lub nie).

33. Pokazać na przykładach, że założenie ciągłości funkcji jest istotne w zadaniach 31 i 32.

34. Udowodnić, że każda funkcja różnowartościowa i mająca własność Darboux w przedziale $\mathbb{P}$ jest w tym przedziale ciągła.
Wskazówka. Wykazać, że dla dowolnego $a \in \mathbb{P}$ spełniony jest warunek podany w twierdzeniu 2.

35. Narysować wykres i zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \text{arc}\sin(\sin x)$$

oraz

$$g(x) = \text{arc}\sin(\cos x).$$

Wskazówka. Zauważyć najpierw, że funkcja f jest nieparzysta, funkcja g jest parzysta oraz że obie są okresowe o okresie 2π.

36. Która z funkcji

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = e^{2x}, \quad h(x) = 2\cos x$$

przyjmuje wartość

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

37. W jakim otoczeniu punktu x_0 prawdziwa jest nierówność $f(x) < M$, jeżeli

$$\begin{aligned}
&\text{a.)}\quad f(x) = x^2 + 1, \quad x_0 = 1, \quad M = 10;\\
&\text{b.)}\quad f(x) = e^x, \quad x_0 + 0, \quad M = 2;\\
&\text{c.)}\quad f(x) = 2\sin x, \quad x_0 = \frac{3}{2}\pi, \quad M = -1.
\end{aligned}$$

38. Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu a, ciągłą w punkcie a. Udowodnić, że jeżeli $f(a) \neq 0$, to w pewnym otoczeniu punktu a funkcja f przyjmuje wartości różne od zera i tego samego znaku, co $f(a)$.