



§4. Pochodna funkcji.

1. Pochodna i jej interpretacja geometryczna. Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu ustalonego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$. Funkcję

$$(1) \quad \varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(określoną dla dostatecznie małych $|h| \neq 0$) nazywamy *ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0* . Jeżeli istnieje granica (być może niewłaściwa - por. §2 punkt 1) funkcji $\varphi(h)$ przy $h \rightarrow 0$, to nazywamy ją *pochodną funkcji f w punkcie x_0* . Oznaczamy

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = f'(x_0).$$

Przykład 1. Niech

$$f(x) = x^2.$$

Funkcja f jest określona w całym przedziale $(-\infty, \infty)$. Dla dowolnie ustalonego x_0 mamy

$$\varphi(h) = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h},$$

czyli po redukcji w liczniku i wykonaniu dzielenia

$$\varphi(h) = 2x_0 + h.$$

Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0.$$

Przykład 2. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Dla dowolnie ustalonego $x_0 \neq 0$ funkcja $\varphi(h)$ jest określona dla $0 < |h| < |x_0|$. Mamy

$$\varphi(h) = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} \right),$$

czyli po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i redukcji w liczniku

$$\varphi(h) = \frac{-1}{(x_0 + h)x_0},$$

co po przejściu do granicy daje

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}.$$

Przykład 3. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

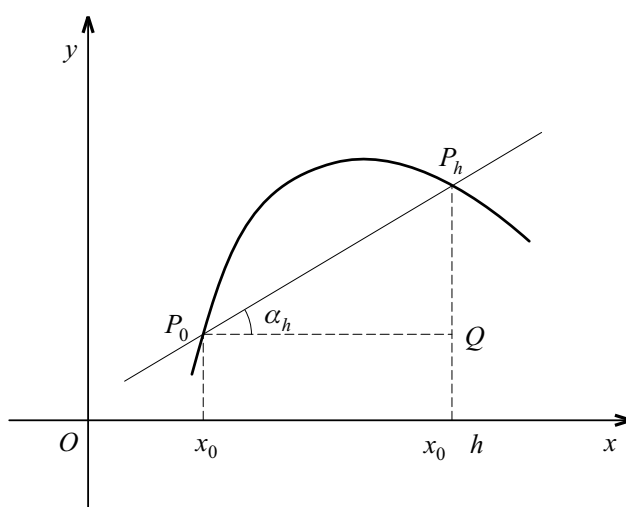
i niech $x_0 = 0$, wówczas

$$\varphi(h) = \sin \frac{1}{h}.$$

Wiemy (por. §2 Przykład 5 (i)), że nie istnieje granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}.$$

Wobec tego funkcja f nie ma pochodnej w punkcie x_0 .



[rys. 20]

Przejdziemy teraz do interpretacji geometrycznej pochodnej. Poprowadźmy przez punkty $P_0 = (x_0, f(x_0))$ oraz $P_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ prostą (zwaną *sieczną wykresu* - rys. 20) i oznaczmy przez α_h kąt między dodatnią półosią x -ów a sieczną P_0P_h tzn. kąt, o jaki należy obrócić dodatnią półoś x -ów, aby przyjęła położenie równoległe do siecznej (przypominamy, że kąt α_h ma miarę dodatnią, gdy obracamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara oraz miarę ujemną, gdy obrót jest zgodny z ruchem wskazówek zegara - por. §1 punkt 9). Z trójkąta P_0QP_h (o przyprostokątnych P_0Q , QP_h równoległych do osi układu) widać, że

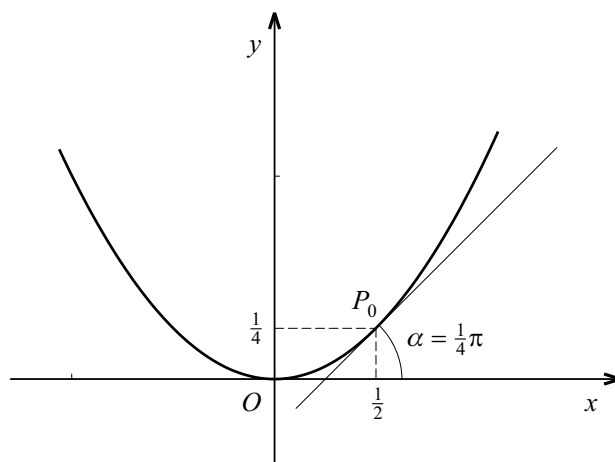
$$\varphi(h) = \operatorname{tg} \alpha_h.$$

Styczną do wykresu funkcji f w punkcie P_0 określimy jako graniczne położenie siecznej P_0P_h gdy $h \rightarrow 0$. Jeżeli przez α oznaczmy kąt między dodatnią półosią x -ów a styczną, to z (2) wynika, że

$$(3) \quad f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Przykład 4. W przykładzie 1 pokazaliśmy, że dla funkcji $f(x) = x^2$ i dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ mamy

$$f'(x_0) = 2x_0.$$



[rys. 21]

Poprowadźmy styczną do wykresu funkcji f (rys. 21) w punkcie $P_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Wówczas

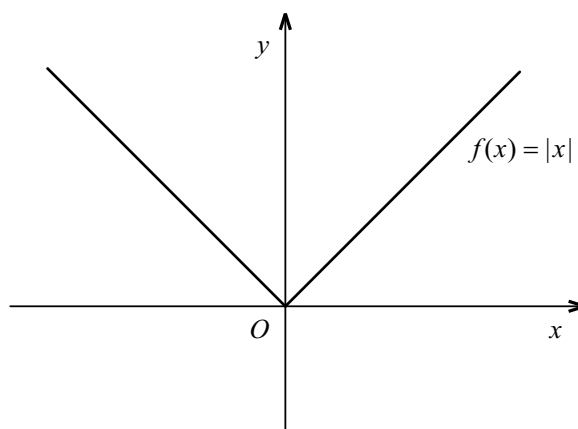
$$f'(\frac{1}{2}) = \operatorname{tg} \alpha = 1$$

zatem

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Przykład 5. Niech

$$f(x) = |x|,$$



[rys. 22]

wówczas

$$\varphi(h) = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{dla } h > 0, \\ -1 & \text{dla } h < 0. \end{cases}$$

Granica (2) nie istnieje, zatem funkcja f nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$. Z rysunku (rys. 22) widać, że w punkcie $(0, 0)$ nie istnieje styczna do wykresu funkcji. Łatwo natomiast okazać, że funkcja f ma pochodną w każdym punkcie $x_0 \neq 0$. Jeżeli $x_0 > 0$, to dla dostatecznie małych $|h|$ również $x_0 + h > 0$, zatem

$$\varphi(h) = \frac{(x_0 + h) - x_0}{h} = 1,$$

jeżeli zaś $x_0 < 0$, to dla dostatecznie małych $|h|$ również $x_0 + h < 0$, a więc

$$\varphi(h) = \frac{-(x_0 + h) + x_0}{h} = -1.$$

Przechodząc do granicy przy $h \rightarrow 0$ mamy wobec tego

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

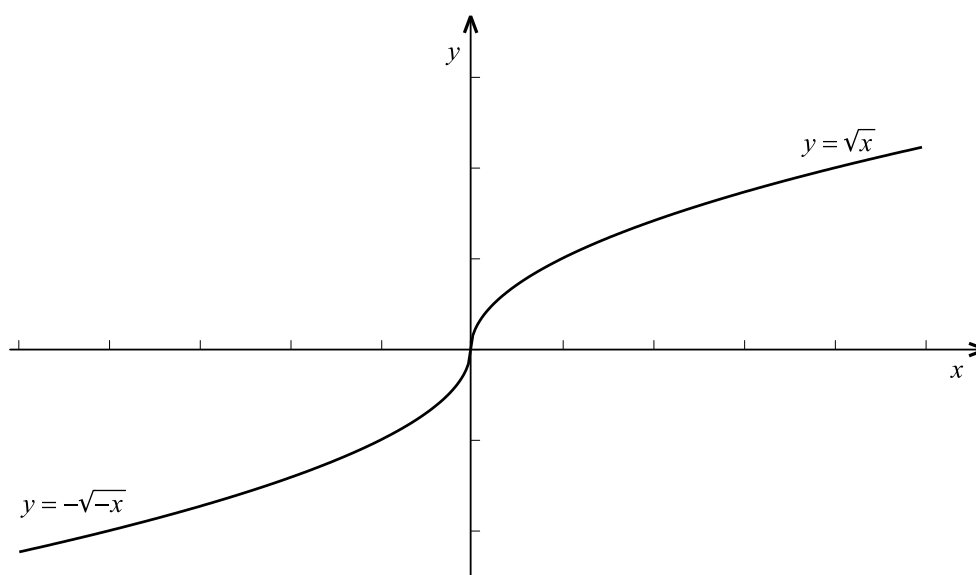
co można zapisać krócej

$$f'(x) = \frac{|x|}{x} \quad \text{dla } x \neq 0.$$

Zauważmy, że styczna do wykresu funkcji f w każdym punkcie $(x_0, |x_0|)$, gdzie $x_0 \neq 0$, pokrywa się z wykresem (rys. 22).

Przykład 6. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$



[rys. 23]

i niech $x_0 = 0$. Wówczas

$$\varphi(h) = \begin{cases} \frac{\sqrt{h}}{h} & \text{dla } h > 0, \\ \frac{\sqrt{-h}}{-h} & \text{dla } h < 0 \end{cases}$$

zatem

$$\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{|h|}}$$

a stąd

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = f'(0) = \infty.$$

Funkcja f ma w punkcie $x_0 = 0$ pochodną nieskończoną. Wobec (3) mamy

$$\alpha = \frac{\pi}{2},$$

a więc styczna do wykresu w punkcie $(0, 0)$ jest prostopadła do osi x -ów (rys. 23), czyli pokrywa się z osią y -ów.

Ze związku (3) wynika, że *równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0)* (gdzie $y_0 = f(x_0)$) ma postać

$$(4) \quad y = (x - x_0)f'(x_0) + y_0$$

przy założeniu, że istnieje skończona pochodna $f'(x_0)$.

Oprócz granicy (2) możemy rozważać granice jednostronne funkcji $\varphi(h)$ przy $h \rightarrow 0$. Granicę lewostronną

$$\lim_{h \rightarrow x_0^-} \varphi(h) = f'_-(x_0)$$

nazywamy *pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0* , zaś granicę prawostronną

$$\lim_{h \rightarrow x_0^+} \varphi(h) = f'_+(x_0)$$

- *pochodną prawostronną funkcji f w punkcie x_0* .

W przypadku funkcji

$$f(x) = |x|,$$

rozważanej w przykładzie 5, pochodna w punkcie $x_0 = 0$ nie istnieje, istnieją natomiast pochodne jednostronne

$$f'_-(0) = -1, \quad f'_+(0) = 1.$$

Funkcja rozważana w przykładzie 3 nie ma w punkcie $x_0 = 0$ żadnej z pochodnych jednostronnych.

Z twierdzenia 10 §2 otrzymujemy natychmiast

Twierdzenie 1. *Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ pochodną*

$$f'(x_0) = g \in \mathbb{R}_\infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = g.$$

2. Różniczkowalność funkcji. Podobnie jak w poprzednim punkcie założymy, że funkcja f jest określona w otoczeniu ustalonego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że *funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0* , jeżeli istnieją stała A i funkcja $r(h)$ takie, że dla dostatecznie małych $|h|$

$$(5) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + r(h)$$

przy czym

$$(6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Z równości (5) wynika, że w przypadku funkcji różniczkowalnej przyrost jej wartości

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

może być zastąpiony przez funkcję liniową przyrostu zmiennej niezależnej

$$Ah$$

z błędem $r(h)$, który zgodnie z (6) dąży do zera szybciej niż przyrost h .

Twierdzenie 2. *Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona pochodna $f'(x_0)$, przy tym*

$$A = f'(x_0).$$

DOWÓD. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to na mocy (5)

$$\varphi(h) = A + \frac{r(h)}{h}$$

skąd wobec (5)

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = A.$$

Na odwrót, założmy że istnieje skończona pochodna $f'(x_0)$ i niech

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah$$

gdzie

$$A = f'(x_0).$$

Wówczas

$$\frac{r(h)}{h} = \varphi(h) - A$$

a więc zgodnie z (2) funkcja $r(h)$ spełnia warunek (6). $\square$

Przykład 7. Niech

$$f(x) = x^2.$$

W przykładzie 1 pokazaliśmy, że

$$f'(x_0) = 2x_0$$

dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$. Na mocy twierdzenia 2 funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , przy czym $A = 2x_0$. Zgodnie z (5)

$$r(h) = (x_0 + h)^2 - x_0^2 - 2hx_0 = h^2,$$

a więc spełniony jest warunek (6). $\square$

Przykład 8. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Zgodnie z przykładem 2

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

dla dowolnego $x_0 \neq 0$, zatem wobec twierdzenia 2 funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 . Z równości (5) wynika, że dla $|h| < |x_0|$

$$\begin{aligned} r(h) &= \frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} + \frac{h}{x_0^2} = \\ &= \frac{h^2}{x_0^2(x_0 + h)}, \end{aligned}$$

a więc

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{h}{x_0^2(x_0 + h)} \rightarrow 0$$

przy $h \rightarrow 0$, co oznacza, że funkcja $r(h)$ spełnia (6). $\square$

Twierdzenie 3. *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest w tym punkcie ciągła.*

DOWÓD. Z warunku (6) wynika, że dla dostatecznie małych $|h|$

$$\left| \frac{r(h)}{h} \right| < 1,$$

czyli

$$|r(h)| < |h|.$$

Wobec tego

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$$

i z równości (5) dostajemy podstawiając $y = x_0 + h$

$$\lim_{y \rightarrow x_0} f(y) = f(x_0).$$

□

Założmy teraz, że funkcja f jest określona w przedziale otwartym $\mathbb{P}$ (ograniczonym lub nie). Mówimy, że f jest różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$, jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie tego przedziału. Zgodnie z twierdzeniem 2 oznacza to, że dla każdego $x_0 \in \mathbb{P}$ istnieje skończona pochodna $f'(x_0)$.

3. Działania na funkcjach różniczkowalnych. Będziemy zakładali, że funkcje f, g są określone w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4. Jeżeli funkcje f, g są różniczkowalne w punkcie x_0 oraz c jest stałą, to funkcje

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), cf(x), f(x)g(x)$$

są również różniczkowalne w punkcie x_0 , przy czym zachodzą wzory

$$(7) \quad (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$(8) \quad (f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0),$$

$$(9) \quad (cf)'(x_0) = cf'(x_0),$$

$$(10) \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

DOWÓD. Udowodnimy wzór (10). Mamy

$$\begin{aligned} (fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0) &= \\ &= f(x_0 + h)[g(x_0 + h) - g(x_0)] + g(x_0)[f(x_0 + h) - f(x_0)]. \end{aligned}$$

Wobec tego iloraz różnicowy dla funkcji fg ma postać

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0)}{h} &= \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0) + f(x_0 + h) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy przy $h \rightarrow 0$ i korzystając z ciągłości funkcji f w punkcie x_0 (twierdzenie 3) dostajemy (10).

Dowód wzorów (7) i (9) pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. Wzór (8) wynika z przedstawienia

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$$

po kolejnym zastosowaniu (7) i (9).

□

Twierdzenie 5. *Jeżeli funkcje f, g są różniczkowalne w punkcie x_0 oraz $g(x_0) \neq 0$, to*

$$(11) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

DOWÓD. Mamy

$$\frac{1}{h} \left[\frac{1}{g(x_0 + h)} - \frac{1}{g(x_0)} \right] = \frac{1}{h} \frac{g(x_0) - g(x_0 + h)}{g(x_0 + h)g(x_0)},$$

co po przejściu do granicy przy $h \rightarrow 0$ i wykorzystaniu ciągłości funkcji g w punkcie x_0 (twierdzenie 2) daje

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Stosując wzór (10) do iloczynu

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$$

dostajemy (11). □

Przejdźmy teraz do twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej (superpozycji).

Twierdzenie 6. *Zakładamy, że*

- (i) *funkcja f jest określona w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$,*
- (ii) *funkcja g jest określona w otoczeniu punktu $y_0 = f(x_0)$,*
- (iii) *f jest różniczkowalna w punkcie x_0 ,*
- (iv) *g jest różniczkowalna w punkcie y_0 .*

Wówczas funkcja

$$F(x) = g(f(x))$$

jest różniczkowalna w punkcie x_0 , przy tym

$$(12) \quad F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

DOWÓD. Oznaczając

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = k(h)$$

mamy wobec różniczkowalności funkcji f

$$(13) \quad k(h) = hf'(x_0) + r_1(h),$$

gdzie

$$(14) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(h)}{h} = 0.$$

Ponieważ f jest ciągła w punkcie x_0 na mocy twierdzenia 3, więc

$$(15) \quad \lim_{h \rightarrow 0} k(h) = 0.$$

Z założenia różniczkowalności funkcji g wynika, że

$$(16) \quad \begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= \\ &= g(y_0 + k) - g(y_0) = kg'(y_0) + r_2(k), \end{aligned}$$

gdzie

$$(17) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{r_2(k)}{k} = 0.$$

Iloraz różnicowy dla funkcji F można, po uwzględnieniu (13), (16) przedstawić w postaci

$$(18) \quad \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = [f'(x_0) + \frac{r_1(h)}{h}]g'(y_0) + p(h),$$

gdzie

$$p(h) = \frac{r_2(k)}{h}.$$

Dla $k = 0$ mamy

$$p(h) = \frac{r_2(0)}{h} = 0$$

zaś w przypadku gdy $k \neq 0$

$$p(h) = \frac{r_2(k)}{k} \frac{k}{h} = \frac{r_2(k)}{k} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

co zgodnie z (15), (17) daje

$$\lim_{h \rightarrow 0} p(h) = 0 \cdot f'(x_0) = 0.$$

Uwzględniając (14) dostajemy stąd tezę po przejściu do granicy w (18). □

Na zakończenie udowodnimy twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej.

Twierdzenie 7. *Niech f będzie funkcją ciągłą ściśle monotoniczną w otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalną w punkcie x_0 , przy czym*

$$f'(x_0) \neq 0.$$

Wówczas funkcja odwrotna g jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i zachodzi równość

$$(19) \quad g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

DOWÓD. Zauważmy przede wszystkim, że funkcja g jest określona w otoczeniu punktu y_0 i jest w tym punkcie ciągła zgodnie z twierdzeniem 15 §3. Dla dostatecznie małego $|k| \neq 0$ przyjmijmy

$$(20) \quad h = g(y_0 + k) - g(y_0).$$

Ponieważ g jest funkcją różnowartościową, mamy $h \neq 0$ i przy tym z (20) wynika, że

$$x_0 + h = g(y_0 + k),$$

a więc

$$f(x_0 + h) = y_0 + k = f(x_0) + k.$$

Zatem iloraz różnicowy dla funkcji g można przedstawić w postaci

$$(21) \quad \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} = \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)}.$$

Prawa strona (21) dąży przy $h \rightarrow 0$ do granicy $\frac{1}{f'(x_0)}$. Wobec tego oznaczając przez $G(k)$ lewą stronę (21) stwierdzamy, że do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\eta > 0$ tak, by dla $|h| < \eta$ zachodziła nierówność

$$(22) \quad \left| G(k) - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon.$$

Wobec ciągłości funkcji g w punkcie y_0 można z kolei do liczby η dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $|k| < \delta$ była spełniona nierówność

$$|h| = |g(y_0 + k) - g(y_0)| < \eta.$$

Wobec tego nierówność (22) jest spełniona dla $|k| < \delta$ a to oznacza, że

$$g'(y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} G(k) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

4. Inne oznaczenia pochodnej. Oprócz oznaczenia pochodnej funkcji $y = f(x)$ wprowadzonego w punkcie 1 używane są oznaczenia

$$(23) \quad \begin{aligned} f'(x) &= [f(x)]' = \frac{df(x)}{dx} = \\ &= \frac{d}{dx} f(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y. \end{aligned}$$

Pochodną w punkcie x_0 zapisujemy przy użyciu oznaczeń (23)

$$f'(x_0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Dwa ostatnie oznaczenia (23) (pochodzące od G.W. Leibniza¹) czytamy: $df(x)$ po dx , dy po dx .

¹Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), jeden z twórców rachunku różniczkowego i całkowego, założyciel Akademii Nauk w Berlinie. Uczony o wszechstronnych zainteresowaniach i ogromnej erudycji.

W tak wprowadzonej symbolice wzory rachunkowe podane w twierdzeniach 4, 5 można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
 (7') \quad & (y + z)' = y' + z', \\
 (8') \quad & (y - z)' = y' - z', \\
 (9') \quad & (cy)' = cy', \\
 (10') \quad & (yz)' = y'z + yz', \\
 (11') \quad & \left(\frac{y}{z}\right)' = \frac{y'z - yz'}{z^2}
 \end{aligned}$$

jeżeli przyjmiemy

$$y = f(x), \quad z = g(x).$$

W oznaczeniach Leibniza wzory te mają postać

$$\begin{aligned}
 (7'') \quad & \frac{d(y + z)}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}, \\
 (8'') \quad & \frac{d(y - z)}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}, \\
 (9'') \quad & \frac{d(cy)}{dx} = c \frac{dy}{dx}, \\
 (10'') \quad & \frac{d(yz)}{dx} = \frac{dy}{dx}z + y \frac{dz}{dx}, \\
 (11'') \quad & \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{z}\right) = \frac{\frac{dy}{dx}z - y \frac{dz}{dx}}{z^2}.
 \end{aligned}$$

Zapiszemy jeszcze w oznaczeniach Leibniza wzór (12) na pochodną funkcji złożonej. Oznaczając

$$y = f(x), \quad z = g(x)$$

mamy

$$(12'') \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Wreszcie wzór (19) na pochodną funkcji odwrotnej przyjmuje w tych oznaczeniach postać

$$(19'') \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Zauważmy, że we wzorach (12''), (19'') symbol $\frac{dy}{dx}$ zachowuje się jak ułamek (co ułatwia ich zapamiętanie i sprawdzenie czy nie popełniliśmy błędu).

5. Pochodne funkcji elementarnych. Podamy teraz wzory rachunkowe pozwalające znaleźć pochodne funkcji omawianych poprzednio (zwanym umownie funkcjami elementarnymi). Czynność obliczania pochodnej danej funkcji nazywamy *różniczkowaniem*.

1⁰ Funkcja stała

$$f(x) = c, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Iloraz różnicowy

$$\varphi(h) = \frac{c - c}{h} = 0,$$

zatem w granicy przy $h \rightarrow 0$

$$(24) \quad \frac{dc}{dx} = 0.$$

□

2⁰ Funkcja potęgowa o wykładniku naturalnym

$$f(x) = x^n, \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).$$

Udowodnimy metodą indukcji, że

$$(25) \quad \frac{d x^n}{d x} = n x^{n-1}.$$

Dla $n = 1$ iloraz różnicowy ma postać

$$\varphi(h) = \frac{(x+h) - x}{h} = 1$$

zatem

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 1.$$

Zakładając słuszność wzoru (25) dla $n \in \mathbb{N}$ udowodnimy, że pozostaje on słuszny po zastąpieniu n przez $n + 1$. Stosując regułę różniczkowania iloczynu (12'') dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{d x^{n+1}}{d x} &= \frac{d (x \cdot x^n)}{d x} = \\ &= x^n + x(n x^{n-1}) = (n+1)x^n \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

□

3⁰ Funkcje trygonometryczne

$$(26) \quad \frac{d \sin x}{d x} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{d x} = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Dla dowodu rozważmy iloraz różnicowy funkcji $\sin x$

$$\varphi(h) = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2}).$$

Wykorzystując wzór (11) §2 oraz ciągłość funkcji $\cos x$ mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = \cos x,$$

co daje pierwszy ze wzorów (26). Dla dowodu drugiego wzoru zapiszemy iloraz różnicowy funkcji $\cos x$ w postaci

$$\varphi(h) = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} \sin(x + \frac{h}{2}).$$

Wykorzystując ponownie wzór (11) §2 oraz ciągłość funkcji $\sin x$ otrzymujemy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = -\sin x,$$

czyli drugi ze wzorów (26). □

Stosując regułę różniczkowania ilorazu (11'') dostajemy w oparciu o wzory (26)

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{d x} = \frac{d}{d x} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}, \quad \frac{d \operatorname{ctg} x}{d x} = \frac{d}{d x} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

czyli

$$(27) \quad \frac{d \operatorname{tg} x}{d x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d \operatorname{ctg} x}{d x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4⁰ Funkcja logarytmiczna.

Zacniemy od logarytmu naturalnego. Iloraz różnicowy ma postać

$$\varphi(h) = \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}.$$

Korzystając ze wzoru (30) §2 oraz z ciągłości logarytmu dostajemy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x},$$

co daje

$$(28) \quad \frac{d \log x}{d x} = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

W przypadku logarytmu o dowolnej podstawie $a > 1$ korzystamy ze wzoru (26) §3, skąd zgodnie z regułą (9'')

$$(29) \quad \frac{d \log_a x}{d x} = \frac{1}{x \log a} \quad (x > 0).$$

□

5⁰ Aby obliczyć pochodną funkcji wykładniczej zastosujemy regułę różniczkowania funkcji odwrotnej (19'') i wyniki punktu 4⁰. Przyjmując

$$y = e^x$$

mamy

$$x = \log y$$

i stąd

$$\frac{d y}{d x} = \frac{1}{\frac{d x}{d y}} = y,$$

czyli

$$(30) \quad \frac{d e^x}{d x} = e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Wzór (30) wyraża ważną własność funkcji wykładniczej o podstawie e : jest ona identyczna ze swoją pochodną.

W przypadku funkcji wykładniczej o dowolnej podstawie $a > 1$ przyjmijmy

$$y = a^x,$$

wówczas

$$x = \log_a y$$

i stosując wzór (29) dostajemy

$$\frac{d y}{d x} = \frac{1}{\frac{d x}{d y}} = y \log a,$$

czyli

$$(31) \quad \frac{d a^x}{d x} = a^x \log a \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Uwaga. Można rozważać funkcję

$$g(x) = \log_a x$$

o podstawie $0 < a < 1$ jako odwrotną do funkcji wykładniczej

$$f(x) = a^x$$

(por. zadania 6, 7 §3). Wzory (29), (31) pozostają słuszne i w tym przypadku, dowód przenosi się bez zmian. Wzór (31) jest prawdziwy również dla $a = 1$, bowiem funkcja wykładnicza jest w tym przypadku funkcją stałą, więc jej pochodna jest tożsamościowo równa zero (por. (24)), zaś $\log 1 = 0$.

6^o Aby znaleźć pochodną funkcji potęgowej o dowolnym wykładniku rzeczywistym skorzystamy z przedstawienia

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x} \quad (x > 0).$$

Przyjmując

$$z = x^\alpha, \quad y = \alpha \log x$$

mamy

$$z = e^y,$$

skąd zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej (12'')

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = e^y \cdot \frac{\alpha}{x}$$

czyli po wykonaniu dzielenia

$$(32) \quad \frac{d x^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0).$$

Zauważmy, że otrzymany wzór (32) jest uogólnieniem wzoru (25) na przypadek dowolnych wykładników rzeczywistych.

7^o Na zakończenie znajdziemy pochodne funkcji odwrotnych do funkcji trygonometrycznych. Przyjmując

$$y = \arcsin x \quad (-1 < x < 1)$$

mamy

$$x = \sin y,$$

a więc stosując regułę różniczkowania funkcji odwrotnej (19'') i pierwszy ze wzorów (26) otrzymujemy

$$(33) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \quad (\cos y \neq 0).$$

Ponieważ

$$(34) \quad \sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

oraz na mocy definicji funkcji $\arcsin x$ kąt y leży w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ze wzoru (34) dostajemy

$$(35) \quad \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ze wzorów (33), (35) wynika, że

$$(36) \quad \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

W podobny sposób, przyjmując

$$y = \arccos x \quad (-1 < x < 1)$$

mamy

$$x = \cos y,$$

a więc stosując regułę (19'') i drugi ze wzorów (26)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y}.$$

Ponieważ $y \in [0, \pi]$ na mocy definicji funkcji $\arccos x$, więc

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

co daje ostatecznie

$$(37) \quad \frac{d \arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Pozostaje do obliczenia pochodna funkcji

$$y = \operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mamy

$$x = \operatorname{tg} y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right),$$

zatem na mocy (19'') i (27)

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y},$$

czyli

$$(38) \quad \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Przykład 9. Obliczmy pochodną funkcji

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad (x > 0).$$

Wzór (32) dla $\alpha = 1/2$ daje

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Przykład 10. Pochodną funkcji

$$y = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}, x \neq 0)$$

możemy obliczyć dwoma sposobami:

a.) dla $x > 0$ można zastosować wzór (32) dla $\alpha = -n$, co daje

$$\frac{dy}{dx} = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}},$$

b.) dla $x \neq 0$ można zastosować wzór (11'') na pochodną ilorazu, przyjmując w nim $y = 1$, $z = x^n$. Dostajemy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{d}{dx}(x^n)}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}},$$

czyli to samo, co w punkcie a.).

Przykład 11. Obliczymy pochodną wielomianu stopnia n

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Zastosowanie reguł (7'') i (9'') oraz wzorów (24), (25) daje

$$\frac{dy}{dx} = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

Pochodna wielomianu stopnia n jest wielomianem stopnia $n-1$. W szczególności pochodna funkcji liniowej jest funkcją stałą (jaki to ma sens geometryczny?).

Przykład 12. Obliczmy pochodną funkcji

$$y = x^x \quad (x > 0).$$

Funkcja ta nie jest ani funkcją wykładniczą (bo ma zmienną podstawę potęgi), ani funkcją potęgową (bo wykładnik potęgi jest zmienny). Nie możemy więc stosować wzorów wyprowadzonych poprzednio dla pochodnych tych funkcji. Skorzystamy z przedstawienia

$$y = e^{x \log x}$$

i zastosujemy regułę różniczkowania funkcji złożonej, oznaczając

$$u = x \log x.$$

Zgodnie z regułą (12'') mamy

$$(39) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Ponieważ

$$y = e^u,$$

więc na podstawie (30)

$$\frac{dy}{du} = e^u.$$

Do obliczenia pochodnej $\frac{du}{dx}$ zastosujemy regułę różniczkowania iloczynu (10''), która daje

$$\frac{du}{dx} = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1.$$

Wobec tego zgodnie z (39)

$$\frac{dy}{dx} = e^u (\log x + 1) = x^x (\log x + 1).$$

Przykład 13. Postępując podobnie jak w przykładzie 12 znajdziemy pochodną funkcji

$$(40) \quad y = (\sin x)^{\cos x} \quad (0 < x < \pi).$$

Mamy

$$y = e^{\cos x \log \sin x}$$

czyli po wprowadzeniu oznaczeń

$$u = \cos x, \quad w = \log \sin x$$

funkcja (40) może być zapisana w postaci

$$(41) \quad y = e^v,$$

gdzie

$$v = u w.$$

Zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej (12'')

$$(42) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx}$$

przy czym

$$(43) \quad \frac{dy}{dv} = e^v,$$

zaś

$$(44) \quad \begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{du}{dx} w + u \frac{dw}{dx} = \\ &= (-\sin x) \log \sin x + (\cos x) \frac{dw}{dx}. \end{aligned}$$

Pochodną $\frac{dw}{dx}$ obliczymy ponownie stosując regułę różniczkowania funkcji złożonej. Oznaczając

$$t = \sin x$$

mamy

$$w = \log t,$$

zatem

$$(45) \quad \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cos x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ostatecznie z (44), (45)

$$(46) \quad \frac{dv}{dx} = -(\sin x) \log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

i na podstawie (42), (43) dostajemy

$$\frac{dy}{dx} = e^v \frac{dv}{dx}$$

czyli po uwzględnieniu (41), (46)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \frac{dv}{dx} = \\ &= (\sin x)^{(\cos x - 1)} (\cos^2 x) - (\sin x)^{(\cos x + 1)} (\log \sin x). \end{aligned}$$

Przykład 14. Obliczyć pochodną funkcji

$$y = \arctg \sqrt{x} \quad (x > 0).$$

Oznaczając

$$z = \sqrt{x}$$

mamy

$$y = \arctg z$$

i zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+z^2} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(por. (38) i przykład 9). Wracając do zmiennej x dostajemy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

Przykład 15. Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \arcsin e^x.$$

Zbadamy najpierw dziedzinę funkcji f . Funkcja $y = \arcsin z$ jest określona dla $-1 \leq z \leq 1$, wobec tego winna być spełniona nierówność

$$-1 \leq e^x \leq 1.$$

Lewa część tej nierówności jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ (bo $e^x > 0$), natomiast część prawa narzuca ograniczenie

$$x \leq 0.$$

Ponieważ pochodną $f'(x_0)$ określiliśmy przy założeniu, że funkcja f jest określona w otoczeniu punktu x_0 , będziemy różniczkować zakładając $x < 0$. Oznaczając

$$y = f(x), \quad z = e^x$$

mamy

$$y = \arcsin z,$$

zatem zgodnie z (12''), (30), (36)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot e^x,$$

czyli po powrocie do zmiennej x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \quad (x < 0).$$

Przykład 16. Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \log(\log(\log x)),$$

Najpierw znajdziemy dziedzinę funkcji f . Oznaczmy

$$u = \log x, \quad v = \log u, \quad y = \log v.$$

Funkcja $y = f(x)$ jest określona dla $v > 0$, co narzuca warunek

$$\log u > 0,$$

czyli

$$u > 1.$$

Ostatnia nierówność jest spełniona dla $x > e$. Stosując dwukrotnie regułę różniczkowania funkcji złożonej mamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{du} \frac{du}{dx},$$

zatem zgodnie z (28)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{x}$$

i po powrocie do zmiennej x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(\log x)(\log(\log x))} \quad (x > e).$$

6. Ekstrema funkcji. Niech f będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu U punktu $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że f ma *maksimum* w punkcie x_0 , jeżeli

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{dla} \quad x \in U,$$

minimum w punkcie x_0 , jeżeli

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{dla} \quad x \in U,$$

maksimum właściwe w punkcie x_0 , jeżeli

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{dla} \quad x \in U, \quad x \neq x_0,$$

minimum właściwe w punkcie x_0 , jeżeli

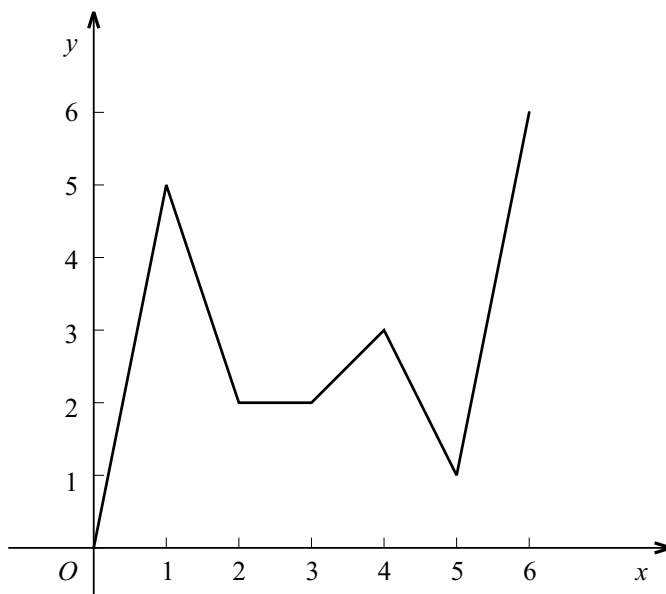
$$f(x) > f(x_0) \quad \text{dla} \quad x \in U, \quad x \neq x_0.$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *ekstremum (ekstremum właściwe)*, jeżeli ma w tym punkcie maksimum (maksimum właściwe) lub minimum (minimum właściwe). Punkt x_0 nazywamy *punktem ekstremalnym*, zaś wartość $f(x_0)$ *wartością ekstremalną* funkcji f .

Uwaga. Niektórzy autorzy używają terminu *maksimum (minimum, ekstremum) lokalne* dla podkreślenia, że chodzi tu o zachowanie się funkcji w pewnym otoczeniu punktu x_0 . Dla największej (najmniejszej) wartości funkcji w całym przedziale, czyli jej kresu górnego (dolnego) używa się nazwy *maksimum (minimum) absolutne* lub *maksimum (minimum) globalne* - por. Uwaga §3 punkt 6.

Przykład 17. Niech

$$(47) \quad f(x) = \begin{cases} 5x & \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 8 - 3x & \text{dla} \quad 1 < x \leq 2, \\ 2 & \text{dla} \quad 2 < x \leq 3, \\ x - 1 & \text{dla} \quad 3 < x \leq 4, \\ 11 - 2x & \text{dla} \quad 4 < x \leq 5, \\ 5x - 24 & \text{dla} \quad 5 < x \leq 6. \end{cases}$$



[rys. 24]

Wykres funkcji f podany jest na rys. 24.

Funkcja f ma maksimum właściwe w punktach $x = 1$, $x = 4$, minimum właściwe w punkcie $x = 5$, minimum w każdym punkcie $x \in [2, 3]$.

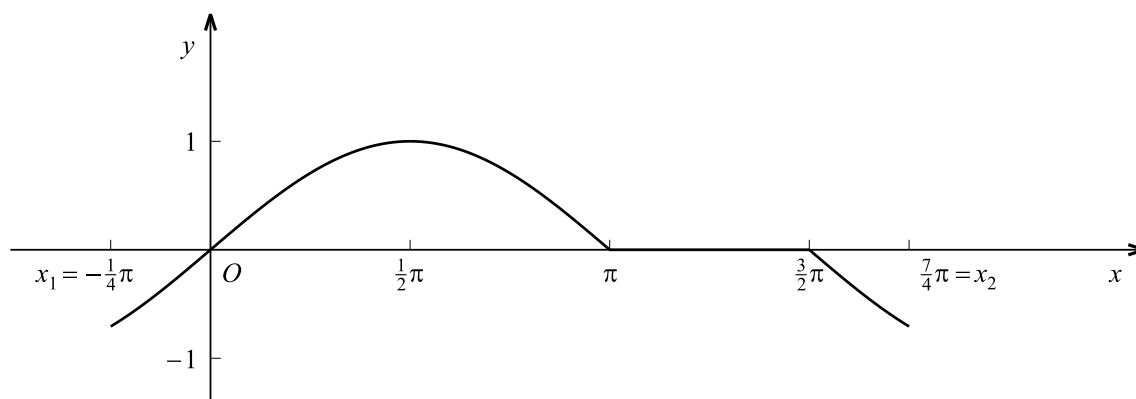
Zauważmy, że funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[0, 6]$ (proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie tego faktu w oparciu o wzory (47)), wobec tego zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa (twierdzenie 12 §3) osiąga w tym przedziale swoje kresy dolny m i górny M . Jak widać z rysunku

$$m = 0 = f(0), \quad M = 6 = f(6).$$

Punkty $x = 0$ i $x = 6$ nie są jednak punktami ekstremalnymi, gdyż funkcja f nie jest określona w otoczeniu żadnego z nich.

Przykład 18. Niech (rys. 25)

$$(48) \quad f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{dla } \pi < x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ \sin(x - \frac{\pi}{2}) & \text{dla } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{4}. \end{cases}$$



[rys. 25]

Funkcja f ma maksimum właściwe w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$, minimum w każdym punkcie $x_0 \in [\pi, \frac{3}{2}\pi)$, maksimum w punkcie $x_0 = \frac{3}{2}\pi$.

Funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ (proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie dowodu), zatem na mocy twierdzenia Weierstrassa (twierdzenie 12 §3) osiąga w tym przedziale swoje kresy dolny m i górny M . Mamy

$$m = -\frac{\sqrt{2}}{2} = f(-\frac{\pi}{4}) = f(\frac{7\pi}{4}), \quad M = 1 = f(\frac{\pi}{2}).$$

Kres górny jest osiągany wewnątrz przedziału w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$, który jest jednocześnie punktem ekstremalnym. Natomiast kres dolny jest osiągany na końcach przedziału

$$x_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{7\pi}{4}$$

a więc w punktach, które nie mogą być punktami ekstremalnymi, gdyż funkcja f nie jest określona w otoczeniu żadnego z nich. Zauważmy, że gdybyśmy nawet rozważali funkcję f w większym przedziale przyjmując na przykład pierwszy wzór (48) dla $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, zaś ostatni wzór (48) dla $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$, to również wtedy punkty x_1, x_2 nie byłyby punktami ekstremalnymi, gdyż w otoczeniu x_1 funkcja f byłaby rosnąca, zaś w otoczeniu x_2 malejąca.

Z podanych przykładów widać, że należy odróżniać pojęcie kresu funkcji w przedziale od pojęcia ekstremum. Mówiąc o kresie (górnym lub dolnym) rozważamy funkcję w całym przedziale, natomiast wartość ekstremalna jest pojęciem lokalnym - jest to największa względnie najmniejsza wartość funkcji w pewnym dostatecznie małym otoczeniu punktu ekstremalnego. Możemy jedynie sformułować twierdzenie wynikające natychmiast z podanych definicji.

Twierdzenie 8. *Jeżeli funkcja osiąga swój kres (dolny lub górny) w punkcie wewnętrznym przedziału, to punkt ten jest punktem ekstremalnym.*

7. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego.

Twierdzenie 9 (Fermata).² *Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu x_0 . Jeżeli f ma w punkcie x_0 ekstremum i jest w tym punkcie różniczkowalna, to*

$$(49) \quad f'(x_0) = 0.$$

DOWÓD. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że f ma maksimum w punkcie x_0 . Wówczas dla dostatecznie małych $|h|$

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0),$$

²Pierre de Fermat (1601 - 1665), matematyk francuski (z wykształcenia był prawnikiem). Zajmował się teorią liczb i rachunkiem prawdopodobieństwa, jego idee przyczyniły się do powstania rachunku różniczkowego (stworzonego pół wieku później przez I. Newtona i G.W. Leibniza). Z jego nazwiskiem związane jest twierdzenie z teorii liczb (tzw. Wielkie Twierdzenie Fermata), udowodnione dopiero w 1995 r. przez A. Wilesa.

zatem iloraz różnicowy $\varphi(h)$ spełnia nierówność

$$(50) \quad \varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{dla } h > 0, \\ \geq 0 & \text{dla } h < 0. \end{cases}$$

Z założenia istnieje pochodna

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h).$$

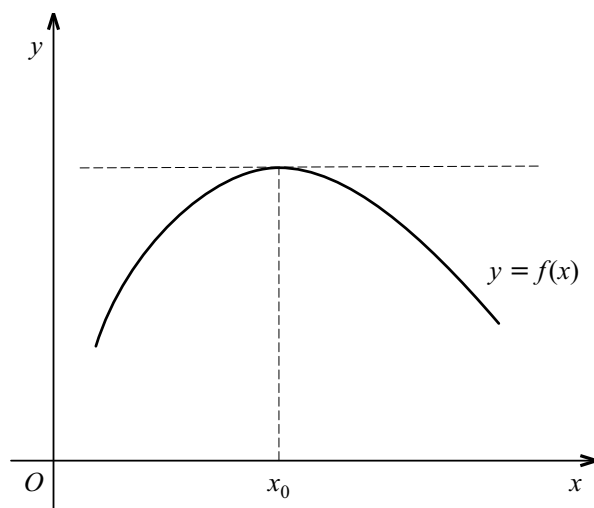
Z nierówności (50) wynika po przejściu do granicy

$$f'(x_0) \leq 0$$

i jednocześnie

$$f'(x_0) \geq 0$$

czyli (49). □



[rys. 26]

Twierdzenie 9 ma prosty sens geometryczny. Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum (na rys. 26 maksimum), to styczna do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi x -ów, a więc jej współczynnik kątowy jest równy zero - a to właśnie wyraża równość (49) (por. wzór (3)).

Punkt x_0 spełniający równanie (49) nazywamy *punktem stacjonarnym* funkcji f . Z twierdzenia 9 wynika, że każdy punkt ekstremalny jest punktem stacjonarnym, ale nie naodwrot, jak wskazuje następujący

Przykład 19. Niech

$$f(x) = x^3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mamy

$$f'(x) = 3x^2$$

a więc

$$f'(0) = 0.$$

Jednakże funkcja f nie ma ekstremum w punkcie $x = 0$, gdyż jest to funkcja ściśle rosnąca w całym przedziale $(-\infty, \infty)$. Widzimy więc, że warunek (49) jest warunkiem koniecznym ale nie dostatecznym dla istnienia ekstremum w punkcie x_0 .

Twierdzenie 10 (Rolle’a). ³ Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalną wewnątrz tego przedziału. Jeżeli

$$(51) \quad f(a) = f(b),$$

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = 0.$$

DOWÓD. Oznaczmy $f(a) = f(b) = A$. Jeżeli

$$f(x) = A$$

w całym przedziale $[a, b]$, to f jest funkcją stałą i jej pochodna znika w każdym punkcie przedziału (a, b) (por. 1^o punkt 5). Załóżmy wobec tego, że f nie jest funkcją stałą. Przynajmniej jeden z jej kresów, dolny m lub górny M , jest wobec tego różny od A . Niech dla ustalenia uwagi będzie $M \neq A$, wówczas $M > A$ z uwagi na (51). Na mocy twierdzenia Weierstrassa (twierdzenie 12 §3) funkcja f przyjmuje wartość M w pewnym punkcie $c \in [a, b]$, wobec (51) nie może być jednak $c = a$ ani $c = b$. Wobec tego funkcja f przyjmuje swój kres górny w pewnym punkcie $c \in (a, b)$, który wobec twierdzenia 8 jest punktem ekstremalnym, a stąd z uwagi na twierdzenie 9 wynika teza.

Dowód w przypadku gdy $m \neq A$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. $\square$

Twierdzenie 11 (Lagrange’a). ⁴ Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalną wewnątrz tego przedziału. Wówczas istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$(52) \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Zanim przejdziemy do dowodu podamy ilustrację geometryczną twierdzenia Lagrange’a.

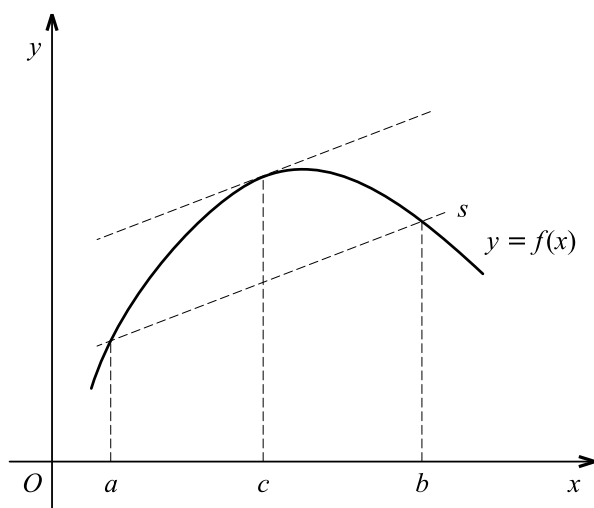
³Michel Rolle (1652 - 1719), urodzony w Amberg (Francja), od 1685 r. członek Paryskiej Akademii Nauk, zajmował się równaniami algebraicznymi. Brał udział w głośnym sporze między zwolennikami nowych metod (wprowadzonych przez G.W. Leibniza) a sympatykami matematyki dawnej (pochodzącej od Kartezjusza), do których zaliczał siebie.

⁴Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), urodzony w Turynie. Samodzielnie zdobył wykształcenie matematyczne i w 1755 r. został profesorem Królewskiej Szkoły Artylerii w Turynie a następnie w 1766 r. profesorem w Berlińskiej Akademii Nauk. Wykładał również w uczelniach paryskich École Normale i École Polytechnique. Zajmował się analizą matematyczną i mechaniką, jego główne dzieło "Mechanika analityczna" zostało opublikowane w 1788 r. Miał ważne wyniki w algebrze i teorii liczb, m.in. rozwinął teorię ułamków łańcuchowych.

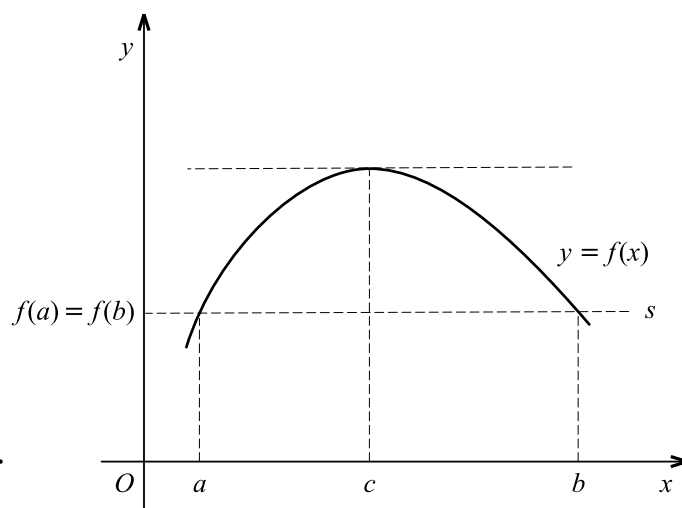
Równość (52) można przepisać inaczej w postaci

$$(53) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Lewa strona (53) jest współczynnikiem kątowym siecznej s wykresu funkcji przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$ oraz $(b, f(b))$, zaś prawa strona jest współczynnikiem kątowym stycznej do wykresu w punkcie $(c, f(c))$ (por. punkt 1, w szczególności wzór (4)). Ze wzoru (53) wynika, że proste te są równoległe. Twierdzeniu Lagrange'a można więc nadać następujące sformułowanie geometryczne (por. rys. 27).



[rys. 27]



[rys. 28]

Twierdzenie 11'. . *Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale domkniętym i różniczkowalna w jego wnętrzu, to istnieje wewnątrz przedziału punkt w którym styczna jest równoległa do siecznej wykresu.*

Zauważmy, że twierdzenie Rolle'a jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Lagrange'a. W sformułowaniu geometrycznym orzeka ono, że jeżeli sieczna s wykresu jest równoległa do osi x -ów, to istnieje wewnątrz przedziału punkt, w którym styczna jest również równoległa do osi x -ów (rys. 28).

Iloraz po lewej stronie wzoru (53) można uważać za średnią wartość przyrostu funkcji f w przedziale $[a, b]$. Twierdzenie Lagrange'a orzeka więc, że średnia wartość tego przyrostu jest równa wartości pochodnej funkcji w pewnym, odpowiednio dobranym, punkcie wewnętrznym przedziału. Z uwagi na tę interpretację twierdzenie Lagrange'a bywa również nazywane *twierdzeniem o wartości średniej rachunku różniczkowego*.

DOWÓD twierdzenia 11. Dla dowodu zauważmy, że równanie siecznej s (rys. 27) ma postać

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b)$$

zaś funkcja

$$g(x) = f(x) - f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - x)$$

wyraża odległość (mierzoną w kierunku osi y -ów) między prostą s a wykresem funkcji f . Funkcja g jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału jako suma funkcji f i funkcji liniowej, oprócz tego (por. rys 27)

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Funkcja g spełnia więc założenia twierdzenia Rolle'a, zatem istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$(54) \quad g'(c) = 0.$$

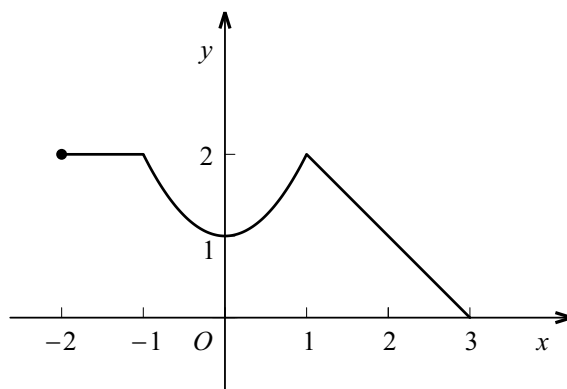
Mamy

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podstawiając $x = c$ i korzystając z (54) dostajemy (52). □

Przykład 20. Niech (rys. 29)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla} & -2 \leq x \leq -1, \\ 1 + x^2 & \text{dla} & -1 < x \leq 1, \\ 3 - x & \text{dla} & 1 < x \leq 3. \end{cases}$$



[rys. 29]

Funkcja f ma maksimum w każdym punkcie x_1 spełniającym nierówność $-2 < x_1 \leq -1$, minimum właściwe w punkcie $x_2 = 0$, maksimum właściwe w punkcie $x_3 = 1$.

Ponadto

$$M = \sup_{[-2,3]} f = 2, \quad m = \inf_{[-2,3]} f = 0$$

przy czym

$$\begin{aligned} M &= f(1) = f(x) \quad \text{dla} \quad -2 \leq x \leq -1, \\ m &= f(3). \end{aligned}$$

Oba kresy, dolny i górny, są przyjmowane przez funkcję f w przedziale $[-2, 3]$ zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa (twierdzenie 12 §3) - proponujemy, by Czytelnik udowodnił, że założenia twierdzenia są spełnione tzn. że funkcja f jest ciągła w tym przedziale. Kres dolny jest przyjmowany tylko w prawym końcu przedziału, który nie jest punktem ekstremalnym. W otoczeniu punktu x_2 funkcja f jest wielomianem, jest więc w tym punkcie różniczkowalna, przy tym

$$f'(x) = 2x$$

dla $-1 < x < 1$, a więc

$$f'(x_2) = 0$$

zgodnie z twierdzeniem 9. W punktach $x_1 = -1$ oraz $x_3 = 1$ funkcja f nie ma pochodnej - na rysunku mamy w tych punktach załamanie wykresu. Istotnie, iloraz różnicowy w punkcie $x_1 = -1$ ma postać

$$\varphi(h) = \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad -1 < h < 0, \\ h-2 & \text{dla} \quad 0 < h < 2. \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{aligned} f'_-(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0-} \varphi(h) = 0, \\ f'_+(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \varphi(h) = -2. \end{aligned}$$

W punkcie $x_1 = -1$ funkcja f ma skończone pochodne jednostronne, są one jednak różne, zatem zgodnie z twierdzeniem 1 nie istnieje pochodna $f'(-1)$. Proponujemy, by Czytelnik w podobny sposób wykazał, że nie istnieje pochodna $f'(x_3)$.

Przykład 21. Niech

$$f(x) = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

funkcja f jest więc ciągła w przedziale $[0, \pi]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału, przy tym $f(0) = f(\pi)$. Zgodnie z twierdzeniem Rolle'a istnieje punkt $c \in (0, \pi)$ taki, że $f'(c) = 0$. W naszym przykładzie

$$f'(x) = \cos x,$$

więc $c = \frac{\pi}{2}$.

Przykład 22. Niech

$$f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

wówczas

$$f'(x) = 2x$$

i dla dowolnie ustalonych a, b można równość (53) zapisać w postaci

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = 2c,$$

skąd po wykonaniu dzielenia

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Punkt c , o którym mowa w twierdzeniu Lagrange'a, jest w tym przypadku środkiem przedziału $[a, b]$, niezależnie od jego położenia na osi x -ów.

Przykład 23. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w każdym punkcie $x \neq 0$, spełnia więc założenia twierdzenia Lagrange'a w każdym przedziale $[a, b]$ nie zawierającym zera. Mamy

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

zatem równość (53) przyjmuje postać

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{c^2},$$

skąd

$$c = \sqrt{ab}.$$

Liczba c , o której mowa w twierdzeniu Lagrange'a, jest więc średnią geometryczną końców przedziału $[a, b]$.

Przykład 24. Niech

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0),$$

wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

zatem funkcja f spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a w każdym przedziale $[a, b]$ zawartym w dodatniej półosi x -ów. Równość (53) przyjmuje postać

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{1}{2\sqrt{c}},$$

skąd

$$c = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2.$$

Jak łatwo sprawdzić

$$a < c < b$$

zgodnie z twierdzeniem.

Wracając do twierdzenia Lagrange'a wprowadzimy we wzorze (52) oznaczenia

$$(55) \quad b - a = h, \quad c = a + \Theta h \quad (0 < \Theta < 1).$$

Wówczas twierdzenie Lagrange'a może być sformułowane następująco:

Twierdzenie 11”. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[a, a+h]$ i różniczkowalną wewnątrz tego przedziału. Wówczas istnieje liczba $\Theta \in (0,1)$ taka, że

$$(56) \quad f(a+h) - f(a) = hf'(a + \Theta h).$$

□

Przykład 25. W Przykładach 22 - 24 wyliczyliśmy liczbę c występującą we wzorze (52) jako funkcję końców przedziału $[a, b]$. Zestawimy te wyniki uzupełniając je wartością liczby Θ wprowadzonej we wzorze (56) (proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie rachunków):

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, & c &= \frac{a+b}{2}, & \Theta &= \frac{1}{2}; \\ f(x) &= \frac{1}{x}, & c &= \sqrt{ab}, & \Theta &= \frac{1}{h}(\sqrt{a(a+h)} - a); \\ f(x) &= \sqrt{x}, & c &= \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2, & \Theta &= \frac{2\sqrt{a(a+h)} + h - 2a}{4h}. \end{aligned}$$

Jak widać, liczba Θ , wyznaczająca położenie punktu c w przedziale $[a, b]$, zależy na ogół od położenia tego przedziału na osi liczbowej. W podanych przykładach jedynie w przypadku paraboli $y = x^2$ funkcja $\Theta(a, h)$ jest stała, równa $\frac{1}{2}$.

Twierdzenie Lagrange’a można uogólnić następująco:

Twierdzenie 12 (Cauchy’ego). Załóżmy, że funkcje f, f_1 są ciągłe w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalne wewnątrz tego przedziału, przy czym $f_1'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$. Wówczas istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$(57) \quad \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} = \frac{f'(c)}{f_1'(c)}.$$

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że musi być

$$f_1(a) \neq f_1(b).$$

Gdyby bowiem zachodziła równość, to wobec twierdzenia Rolle’a istniałby punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f_1'(c) = 0$ - co przeczy założeniom naszego twierdzenia. Wobec tego lewa strona (57) jest poprawnie określona. Jak łatwo zauważyć, z twierdzenia Cauchy’ego otrzymujemy twierdzenie Lagrange’a przyjmując $f_1(x) = x$. Nasuwa to myśl, by w dowodzie wprowadzić funkcję

$$g_1(x) = f(x) - f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} (f_1(b) - f_1(x)),$$

która dla $f_1(x) = x$ przechodzi w funkcję g rozważaną w dowodzie twierdzenia Lagrange’a. Z założeń uczynionych o funkcjach f, f_1 wynika, że funkcja g_1 jest również ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Ponadto

$$g_1(a) = g_1(b) = 0.$$

Wobec tego funkcja g_1 spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, zatem na mocy tego twierdzenia istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$(58) \quad g_1'(c) = 0.$$

Ponieważ

$$(59) \quad g_1'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} f_1'(x)$$

z równości (58), (59) dostajemy (57). $\square$

Uwaga. Każda z funkcji f, f_1 występujących w twierdzeniu Cauchy'ego spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a. Stosując to ostatnie dostajemy

$$(60) \quad \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} = \frac{f'(c)}{f_1'(c_1)}$$

przy czym punkty $c, c_1 \in (a, b)$ są na ogół różne (por. Przykład 25 - położenie punktu c w ustalonym przedziale (a, b) zależy od postaci funkcji f). Wzór (57) udowodniony w twierdzeniu Cauchy'ego jest wzmocnieniem wzoru (60) - okazuje się, że w liczniku i mianowniku można obrać ten sam "pośredni" punkt c .

Podobnie jak twierdzenie Lagrange'a, twierdzenie Cauchy'ego można zapisać w nieco inny sposób po wprowadzeniu oznaczeń (55).

Twierdzenie 12'' (Cauchy'ego). *Przy założeniach twierdzenia 12 istnieje liczba $\Theta \in (0, 1)$ taka, że*

$$(61) \quad \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} = \frac{f'(a + \Theta h)}{f_1'(a + \Theta h)}.$$

$\square$

8. Znak pochodnej a monotoniczność funkcji. Opierając się na twierdzeniu Lagrange'a (twierdzenie 11) możemy udowodnić

Twierdzenie 13. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nie). Wówczas*

- (i) $f'(x) = 0$ dla $x \in (a, b) \iff f$ jest funkcją stałą,
- (ii) $f'(x) \geq 0$ dla $x \in (a, b) \iff f$ jest funkcją rosnącą,
- (ii) $f'(x) \leq 0$ dla $x \in (a, b) \iff f$ jest funkcją malejącą.

DOWÓD. Załóżmy, że

$$a < x_1 < x_2 < b,$$

wówczas na mocy twierdzenia Lagrange'a istnieje punkt $x_3 \in (x_1, x_2)$ taki, że

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x_3).$$

Wobec tego

$$f(x_2) - f(x_1) \begin{cases} = 0 & \text{gdy } f'(x) = 0 \text{ dla } x \in (a, b), \\ \geq 0 & \text{gdy } f'(x) \geq 0 \text{ dla } x \in (a, b), \\ \leq 0 & \text{gdy } f'(x) \leq 0 \text{ dla } x \in (a, b) \end{cases}$$

i stąd wynika dostateczność każdego z warunków dla pochodnej podanych w punktach (i) - (iii). Dla dowodu ich konieczności napiszmy iloraz różnicowy funkcji f w dowolnie ustalonym punkcie $x_0 \in (a, b)$:

$$\varphi(h) = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

Mamy dla dostatecznie małych $|h|$

$$\varphi(h) \begin{cases} = 0 & \text{gdy } f \text{ jest funkcją stałą,} \\ \geq 0 & \text{gdy } f \text{ jest funkcją rosnącą,} \\ \leq 0 & \text{gdy } f \text{ jest funkcją malejącą} \end{cases}$$

a stąd po przejściu do granicy przy $h \rightarrow 0$ dostajemy odpowiedni warunek dla pochodnej $f'(x_0)$. $\square$

W podobny sposób można udowodnić opierając się na twierdzeniu Lagrange'a

Twierdzenie 14. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nie). Wówczas*

- (i) *jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest ściśle rosnąca w (a, b) ,*
- (ii) *jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest ściśle malejąca w (a, b) .*

Twierdzenie 15. *Niech $\mathbb{P}$ będzie jednym z przedziałów $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ i niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $\mathbb{P}$ i różniczkowalną w jego wnętrzu $\mathbb{P}_0$. Wówczas*

- (i) *jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{P}_0$, to f jest ściśle rosnąca w $\mathbb{P}$,*
- (ii) *jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in \mathbb{P}_0$, to f jest ściśle malejąca w $\mathbb{P}$.*

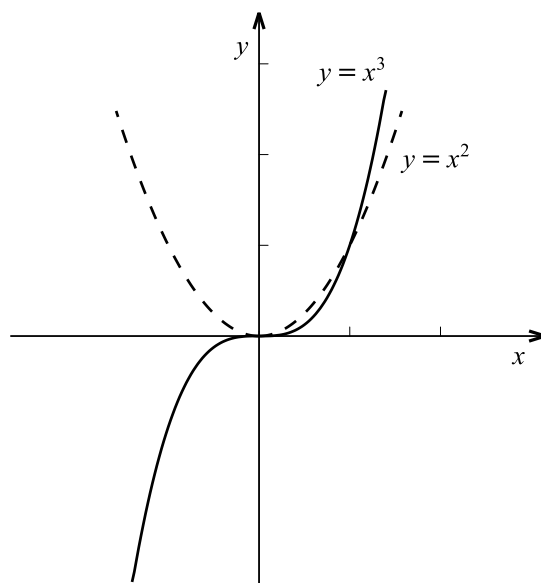
Dowody twierdzeń 14, 15 pozostawiamy Czytelnikowi. $\square$

Przykład 26. Niech

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

wówczas

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 3x^2.$$



[rys. 30]

Mamy

$$g'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \neq 0$$

a więc zgodnie z twierdzeniem 15 funkcja g jest ściśle rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$; natomiast

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla } x > 0, \\ < 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

skąd wynika, że f jest ściśle malejąca w przedziale $(-\infty, 0]$ i ściśle rosnąca w przedziale $[0, \infty)$ (por. rys. 30). Zauważmy, że funkcja g jest ściśle rosnąca również w całym przedziale $(-\infty, \infty)$ natomiast jej pochodna $g'(x) = 3x^2$ znika dla $x = 0$. Widać stąd, że twierdzenie odwrotne do twierdzenia 14 (i) nie jest prawdziwe. Proponujemy, by Czytelnik pokazał na przykładzie, że również nie jest prawdziwe twierdzenie odwrotne do twierdzenia 14 (ii).

Przykład 27. Niech

$$f(x) = a^x \quad (a > 0; x \in \mathbb{R}),$$

zatem zgodnie ze wzorem (31)

$$f'(x) = a^x \log a.$$

Z omawianych w §1 własności potęgi i logarytmu wynika, że

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \quad \text{gdy } a > 1, \\ < 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \quad \text{gdy } 0 < a < 1. \end{cases}$$

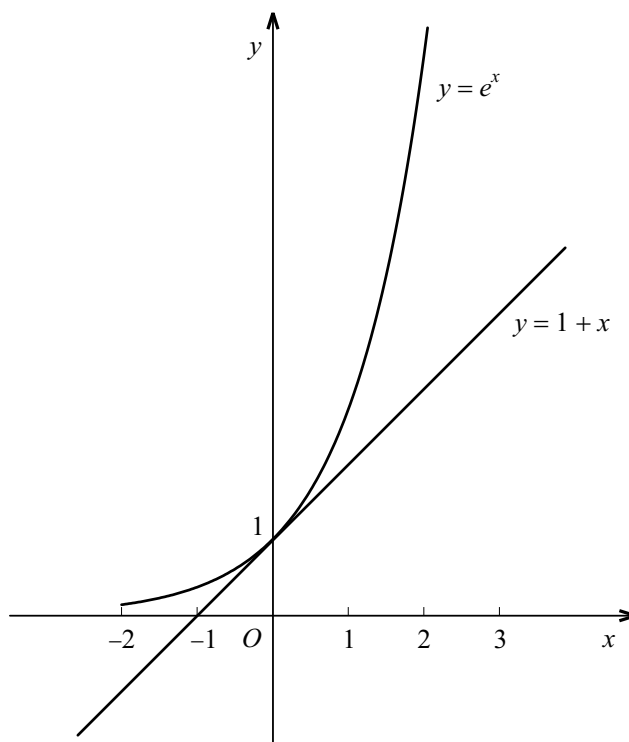
Zgodnie z twierdzeniem 14 funkcja f jest

- (1) ściśle rosnąca w przedziale $(-\infty, \infty)$ gdy $a > 1$,
- (2) ściśle malejąca w przedziale $(-\infty, \infty)$ gdy $0 < a < 1$,

- co było wykazane wcześniej przy omawianiu własności potęgi o wykładniku rzeczywistym (por. twierdzenie 3 §1).

Przykład 28. Okażemy, że zachodzi nierówność

$$e^x \geq 1 + x \quad (x \in \mathbb{R}),$$



[rys. 31]

przy czym znak równości zachodzi tylko dla $x = 0$ (por rys. 31). Dla dowodu rozważmy funkcję

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

Ponieważ

$$g'(x) = e^x - 1$$

oraz

$$g'(0) = e^0 - 1 = 0,$$

więc z własności funkcji wykładniczej e^x (por. Przykład 27) wynika, że

$$g'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x > 0,$$

$$g'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x < 0.$$

Zgodnie z twierdzeniem 15 funkcja g jest ściśle malejąca w przedziale $(-\infty, 0]$ oraz ściśle rosnąca w przedziale $[0, \infty)$ zatem dla wszystkich $x \neq 0$ zachodzi nierówność

$$g(x) > g(0) = 0,$$

co kończy dowód. □

Przykład 29. Udowodnimy nierówność

$$(63) \quad \frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x \quad (x > -1).$$

Dla dowodu zauważmy najpierw, że funkcja

$$y = \log z \quad (z > 0)$$

jest ściśle rosnąca w przedziale $(0, \infty)$ (por. §3 punkt 9), możemy zatem dla $x > -1$ zlogarytmować nierówność (62) otrzymując

$$(64) \quad x \geq \log(1+x)$$

czyli prawą część (63). Dla dowodu lewej części przyjmijmy

$$(65) \quad x = -\frac{t}{1+t}$$

wówczas

$$1+x = \frac{1}{1+t}$$

i nierówność

$$1+x > 0$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy

$$1+t > 0.$$

Podstawiając (65) do (64) dostajemy lewą część nierówności (63) z zastąpieniem x przez t . □

Nierówność (63) możemy również udowodnić w inny sposób, badając pochodną. Oznaczając

$$f(x) = x - \log(1+x), \quad g(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

mamy dla $x > -1$

$$f'(x) = \frac{x}{1+x}, \quad g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Obie pochodne są ujemne dla $-1 < x < 0$ i dodatnie dla $x > 0$, zatem zgodnie z twierdzeniem 15 obie funkcje f, g są

ściśle malejące w przedziale $(-1, 0]$

oraz

ściśle rosnące w przedziale $[0, \infty)$.

Wynikają stąd nierówności

$$f(x) > f(0) = 0, \quad g(x) > g(0) = 0$$

dla $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, które dają (63). □

9. Nieoznaczoności i reguły de l'Hospitala.

Twierdzenie 16. *Założmy, że*

- (i) *funkcje f, g są ciągłe w otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}$ i różniczkowalne w jego sąsiedztwie,*
- (ii) *$g'(x) \neq 0$ w sąsiedztwie punktu a ,*
- (iii) *$f(a) = g(a) = 0$.*

Wówczas

$$(66) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

o ile istnieje granica (skończona lub niewłaściwa) po prawej stronie wzoru (66).

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że stosując twierdzenie Lagrange'a dostajemy

$$g(x) - g(a) = (x - a)g'(\bar{x})$$

gdzie $\bar{x}$ jest punktem leżącym między punktami x, a . Wobec tego $g(x) \neq 0$ w rozważanym sąsiedztwie punktu a z uwagi na założenie (ii), zatem ułamek po lewej stronie (66) jest dobrze określony. Stosując wzór Cauchy'ego (57) mamy

$$(67) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})},$$

gdzie $\bar{x}$ jest punktem leżącym między a, x . Rozważymy najpierw przypadek, gdy granica

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

jest skończona. Wówczas do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, że dla

$$(68) \quad 0 < |x - a| < \delta$$

zachodzi nierówność ε -owa

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \varepsilon.$$

Nierówność ta zachodzi w szczególności dla $x = \bar{x}$, więc z uwagi na (67) mamy

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon$$

dla x spełniających (68) co kończy dowód dla $K \in \mathbb{R}$. Dla $K = \infty$ rozumujemy podobnie. Do dowolnie obranej liczby M można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla x spełniających (68) zachodziła nierówność

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > M.$$

Ostatnia nierówność zachodzi w szczególności po zastąpieniu x przez $\bar{x}$, skąd wobec (67) mamy

$$\frac{f(x)}{g(x)} > M$$

dla x spełniających (68). Zatem równość (66) zachodzi również dla $K = \infty$. Dowód dla $K = -\infty$ przebiega zupełnie podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. $\square$

Uwaga. Twierdzenie 16 pozostaje prawdziwe, jeżeli w założeniach (i), (ii) zastąpimy otoczenie i sąsiedztwo punktu a przez otoczenie względnie sąsiedztwo prawostronne (lewostronne). Granicę we wzorze (66) należy wówczas zastąpić przez granicę prawostronną (lewostronną). Dowód przebiega podobnie i proponujemy, by Czytelnik przeprowadził go samodzielnie.

Wzór (66) przenosi się łatwo na przypadek granicy w nieskończoności, zachodzi bowiem

Twierdzenie 17. *Założmy, że*

- (i) *funkcje f, g są różniczkowalne dla $x > A > 0$,*
- (ii) *$g'(x) \neq 0$ dla $x > A$,*
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Wówczas

$$(69) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

o ile istnieje granica po prawej stronie (właściwa lub niewłaściwa).

DOWÓD. Dla dowodu wprowadzimy nowe funkcje

$$(70) \quad F(t) = \begin{cases} f(\frac{1}{t}) & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

oraz

$$(71) \quad G(t) = \begin{cases} g(\frac{1}{t}) & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t = 0. \end{cases}$$

Funkcje F, G są na mocy twierdzenia 6 różniczkowalne (a więc i ciągłe) dla $0 < t < \frac{1}{A}$, przy czym

$$(72) \quad F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'(\frac{1}{t}), \quad G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t}) \neq 0.$$

Ponadto

$$\lim_{t \rightarrow 0+} F(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

i podobnie

$$\lim_{t \rightarrow 0+} G(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

a więc obie funkcje F , G są ciągłe prawostronnie dla $x = 0$. Do funkcji F , G możemy zatem zastosować wzór (66) (z zastąpieniem granicy przez granicę prawostronną), co daje

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F'(t)}{G'(t)},$$

czyli z uwagi na (70), (71), (72)

$$(73) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}.$$

Ponieważ dla dowolnej funkcji $P(x)$ określonej dla dostatecznie dużych x

$$\lim_{t \rightarrow 0+} P\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(x),$$

z równości (73) dostajemy tezę twierdzenia. $\square$

Proponujemy, by Czytelnik samodzielnie sformułował i udowodnił odpowiednik twierdzenia 17 przy założeniu, że $x \rightarrow -\infty$.

Przykład 30. Obliczmy granicę

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin c(x-a)}{x-a},$$

gdzie stałe a , c są dowolnie obrane. Funkcje

$$f(x) = \sin(c(x-a)), \quad g(x) = x-a$$

spełniają założenia twierdzenia 16, możemy więc zastosować wzór (66), który daje

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin c(x-a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} c \cos c(x-a) = c.$$

Uwaga. Do obliczenia granicy po lewej stronie wzoru (66) nie możemy zastosować twierdzenia o granicy ilorazu, gdyż granica mianownika jest zerem. Mówimy, że wyrażenie

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

występujące w twierdzeniu 16 i twierdzeniu 17 jest *nieoznaczonością typu $\frac{0}{0}$* przy $x \rightarrow a$ ($a \in \mathbb{R}_\infty$). Nazwę "nieoznaczoność" usprawiedliwia następujący fakt: Do dowolnie obranej liczby $c \in \mathbb{R}$ można dobrać funkcje f, g spełniające założenia twierdzenia 16 tak, by

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

- wystarczy określić je tak, jak w Przykładzie 30.

Przejdźmy teraz do *nieoznaczoności typu $\frac{\infty}{\infty}$* .

Twierdzenie 18. *Założmy, że*

- (i) *funkcje f, g są różniczkowalne oraz $g'(x) \neq 0$ w prawostronnym sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$,*
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$.

Wówczas

$$(74) \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

o ile granica po prawej stronie istnieje (właściwa lub niewłaściwa).

DOWÓD. Oznaczając przez K granicę po prawej stronie wzoru (74) założmy najpierw, że jest ona skończona. Z definicji prawostronnej granicy funkcji wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by nierówność ε -owa

$$(75) \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

zachodziła w prawostronnym sąsiedztwie deltowym S_δ^+ punktu a . Niech teraz $x_0 \in S_\delta^+$ będzie ustalonym punktem. Z założenia (ii) wynika, że nierówności

$$\begin{aligned} f(x) &> 0, & f(x) &> f(x_0), \\ g(x) &> 0, & g(x) &> g(x_0) \end{aligned}$$

zachodzą dla

$$(76) \quad 0 < x - a < \eta < \delta$$

Wobec tego w wyrażeniach

$$A(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

oraz

$$B(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

mianowniki są różne od zera dla x spełniających (76), przy czym wyrażenia te są dodatnie. Stosując wzór Cauchy'ego (57) mamy

$$(77) \quad A(x) = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})},$$

gdzie $\bar{x}$ jest punktem leżącym między x, x_0 a więc należącym do prawostronnego sąsiedztwa S_δ^+ . Z uwagi na (75), (77) mamy

$$(78) \quad K - \frac{\varepsilon}{2} < A(x) < K + \frac{\varepsilon}{2}$$

dla x spełniających (76). Z drugiej strony

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1 - \alpha(x)}{1 - \beta(x)},$$

gdzie

$$\alpha(x) = \frac{g(x_0)}{g(x)}, \quad \beta(x) = \frac{f(x_0)}{f(x)}.$$

Z założenia (ii) wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow a+} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a+} \beta(x) = 0,$$

zatem

$$(79) \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{B(x)}{A(x)} = 1.$$

Przyjmując

$$(80) \quad \frac{B(x)}{A(x)} = 1 + \gamma(x)$$

mamy wobec (79)

$$(81) \quad \lim_{x \rightarrow a+} \gamma(x) = 0.$$

Pomnóżmy teraz obie strony (78) przez dodatnie wyrażenie $\frac{B(x)}{A(x)}$. Wobec (80) dostajemy

$$(82) \quad K - \frac{\varepsilon}{2} + \gamma_1(x) < B(x) < K + \frac{\varepsilon}{2} + \gamma_2(x),$$

gdzie

$$\gamma_1(x) = \gamma(x)(K - \frac{\varepsilon}{2}), \quad \gamma_2(x) = \gamma(x)(K + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Z uwagi na (81) mamy

$$\lim_{x \rightarrow a+} \gamma_1(x) = \lim_{x \rightarrow a+} \gamma_2(x) = 0,$$

a więc można dobrać tak liczbę δ_1 , aby dla

$$0 < x - a < \delta_1$$

zachodziły nierówności

$$(83) \quad \gamma_1(x) > -\frac{\varepsilon}{2}, \quad \gamma_2(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ostatecznie dla

$$0 < x - a < \sigma = \min(\delta_1, \eta)$$

dostajemy wobec (82), (83)

$$K - \varepsilon < B(x) < K + \varepsilon,$$

przy czym liczba σ jest dobrana do liczby ε . Oznacza to, że

$$\lim_{x \rightarrow a+} B(x) = K.$$

W przypadku gdy $K = \infty$, w pewnym prawostronnym sąsiedztwie S^+ punktu a wyrażenie $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ jest dodatnie, a więc $f'(x) \neq 0$. Możemy wobec tego dla $x \in S^+$ i spełniających nierówność (76) rozważać odwrotności ułamków występujących we wzorze (74). Mamy

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0,$$

a więc na mocy udowodnionej już części twierdzenia również

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x)}{f(x)} = 0,$$

skąd

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty = K$$

czyli wzór (74). Dowód dla $K = -\infty$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi. $\square$

Twierdzenie 18 pozostaje prawdziwe po zastąpieniu granicy prawostronnej przez granicę lewostronną. Dowód przenosi się bez istotnych zmian, proponujemy, by Czytelnik przeprowadził go samodzielnie jako ćwiczenie.

Odpowiednikiem twierdzenia 17 jest

Twierdzenie 19. *Założmy, że*

- (i) *funkcje f, g są różniczkowalne dla $x > A$ (gdzie $A > 0$) jest odpowiednio dobraną liczbą),*
- (ii) *$g'(x) \neq 0$ dla $x > A$,*
- (iii) *$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.*

Wówczas

$$(84) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

o ile granica po prawej stronie istnieje (skończona lub niewłaściwa).

DOWÓD przebiega podobnie do dowodu twierdzenia 17. Przez podstawienie

$$x = \frac{1}{t}$$

sprowadzamy dowodzone twierdzenie do twierdzenia 18 przy $a = 0$. Szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi. Proponujemy również, by Czytelnik samodzielnie sformułował i udowodnił odpowiednik twierdzenia 19 przy $x \rightarrow -\infty$. $\square$

Przykład 31. Obliczmy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Funkcje $f(x) = \log x$ oraz $g(x) = x^\alpha$ spełniają założenia twierdzenia 19, zatem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0. \end{aligned}$$

(por. zad 9 §3).

Wzory (66), (69), (74), (84) podane w tezach twierdzeń 16 - 19 noszą nazwę *reguł de l'Hospitala*⁵ (dla nieoznaczoności typu $\frac{0}{0}$ względnie $\frac{\infty}{\infty}$).

Przykład 32. Obliczmy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^2} \quad (a > 1).$$

Funkcje $f(x) = a^x$ oraz $g(x) = x^2$ spełniają założenia twierdzenia 19, zatem stosując wzór (84) dostajemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \log a}{2x}.$$

Ponieważ wyrażenie po prawej stronie jest również nieoznaczonością typu $\frac{\infty}{\infty}$, zastosujemy ponownie wzór (84), skąd

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \log a}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x (\log a)^2}{2} = \infty.$$

Przykład 33. Obliczmy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^k} \quad (a > 1, k \in \mathbb{N}).$$

Postępujemy podobnie, jak w Przykładzie 32, stosując k razy wzór (84). Otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \log a}{k x^{k-1}} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x (\log a)^k}{k!} = \infty. \end{aligned}$$

⁵Guillaume Francois Antoine de L'Hospital (ok. 1661 - 1704), matematyk francuski, zajmował się rachunkiem różniczkowym przy współudziale braci Jakuba i Jana Bernoullich. Autor pierwszego podręcznika rachunku różniczkowego (wydanego w 1696 r.), przeznaczonego dla szerszego kręgu matematyków i "Traktatu o przekrojach stożkowych" (wydanego pośmiertnie w 1720 r.). W 1693 r. wybrany na członka Paryskiej Akademii Nauk.

(por. zadanie 15 §2).

Przykład 34. Obliczmy

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} \quad (a > 1, \alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}).$$

Podobnie, jak w przykładzie 33 zastosujemy p razy wzór (84), gdzie $p = [\alpha]$. Mamy

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \log a} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-p+1)x^{\alpha-p}}{a^x (\log a)^p}. \end{aligned}$$

Ponieważ z założenia

$$p < \alpha < p+1,$$

ostatnie wyrażenie jest jeszcze ciągle nieoznaczonością typu $\frac{\infty}{\infty}$. Ponowne zastosowanie wzoru (84) daje

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-p+1)(\alpha-p)x^{\alpha-p-1}}{a^x (\log a)^{p+1}} = 0.$$

Uwaga. Z przykładu 33 wynika, że $C = 0$ również dla $\alpha = k \in \mathbb{N}$.

Przykład 35. Obliczmy granice

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Oba wyrażenia są nieoznaczonościami typu $\frac{0}{0}$. Stosując twierdzenie 16 otrzymujemy

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1, \\ B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Przykład 36. Obliczmy

$$\lim_{x \rightarrow 0+} w(x)$$

gdzie

$$w(x) = x^\alpha \log(x^\beta) \quad (\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0).$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \log(x^\beta) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \beta \log x = \begin{cases} -\infty & \text{dla } \beta > 0, \\ \infty & \text{dla } \beta < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

nie możemy stosować twierdzenia o granicy iloczynu. Mówimy, że wyrażenie $w(x)$ jest nieoznaczonością typu $0 \cdot \infty$ (w zapisie tym nie uwzględniamy znaku!). Przedstawiając funkcję $w(x)$ w postaci

$$w(x) = \frac{\log(x^\beta)}{x^{-\alpha}} = \frac{\beta \log x}{x^{-\alpha}}$$

otrzymujemy wyrażenie typu $\frac{\infty}{\infty}$ przy $x \rightarrow 0+$. Ze wzoru (74) dostajemy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} w(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\beta x^{-1}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}} = \\ &= -\frac{\beta}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha, \end{aligned}$$

czyli

$$(85) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} w(x) = 0.$$

Przyjmując w szczególności $\alpha = \beta = 1$ mamy

$$(86) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x \log x = 0.$$

Zauważmy, że równość (85) jest prawdziwa również dla $\beta = 0$, gdyż wówczas

$$\log(x^0) = \log 1 = 0.$$

Przykład 37. Obliczyć

$$\lim_{x \rightarrow 1} v(x),$$

gdzie

$$v(x) = \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty,$$

a więc do żadnej z granic jednostronnych nie możemy stosować twierdzenia o różnicy granic. Mówimy, że wyrażenie $v(x)$ jest nieoznaczonością typu $\infty - \infty$ przy $x \rightarrow 1$. Przekształcając $v(x)$ dostajemy

$$(87) \quad v(x) = \frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x},$$

czyli nieoznaczoność typu $\frac{0}{0}$. Zbadamy, czy są spełnione założenia twierdzenia 16. Funkcje

$$f(x) = x - 1 - \log x, \quad g(x) = (x - 1) \log x$$

są ciągle i różniczkowalne dla $x > 0$, założenie (i) jest więc spełnione. Aby sprawdzić, czy zachodzi (ii) oznaczmy

$$h(x) = g'(x) = \log x + 1 - \frac{1}{x}.$$

Mamy

$$(88) \quad h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \text{dla} \quad x > 0,$$

zatem (por. twierdzenie 14) funkcja h jest ściśle rosnąca w przedziale $(0, \infty)$. Ponieważ $h(1) = 0$, więc funkcja $h = g'$ jest różna od zera w sąsiedztwie punktu $x = 1$, a więc spełniony jest warunek (ii). Warunek (iii)

$$f(1) = g(1) = 0$$

też jest spełniony, możemy więc zastosować do wyrażenia (87) wzór (66), co daje

$$\lim_{x \rightarrow 1} v(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\log x + 1 - \frac{1}{x}}.$$

Po prawej stronie mamy w dalszym ciągu nieoznaczoność typu $\frac{0}{0}$. Założenia twierdzenia 16 są spełnione (w szczególności warunek (ii) dla mianownika, który oznaczyliśmy przez $h(x)$, wynika z (88)). Stosując ponownie wzór (66) dostajemy

$$\lim_{x \rightarrow 1} v(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

10. Symbole Landaua. Niech f, g będą funkcjami określonymi w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$. Zapisujemy

(i) $f(x) = o(g(x))$ przy $x \rightarrow a$, jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

(ii) $f(x) = O(g(x))$ przy $x \rightarrow a$, jeżeli iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest funkcją ograniczoną w sąsiedztwie a .

Z Przykładów 31, 33, 34 wynika, że

- (1) $\log x = o(x^\alpha)$ dla $\alpha > 0$ przy $x \rightarrow \infty$,
- (2) $x^\alpha = o(a^x)$ dla $a > 1$, $\alpha > 0$ przy $x \rightarrow \infty$,

zaś z przykładu 35 otrzymujemy jako wniosek

$$\begin{aligned}e^x - 1 &= O(x) \quad \text{przy } x \rightarrow 0, \\ 1 - \cos x &= O(x^2) \quad \text{przy } x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Przy założeniu ciągłości funkcji f , g w sąsiedztwie a warunek (i) pociąga za sobą (ii), ale nie na odwrot. Symbole o , O noszą nazwę *symboli Landau'a*.⁶

Wróćmy teraz do definicji funkcji różniczkowalnej (punkt 2). Niech $y = f(x)$ będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalną w tym punkcie. Zgodnie z twierdzeniem 2 oznacza to, że istnieje skończona pochodna $f'(x_0)$ i przy tym dla dostatecznie małych $|h|$

$$(5') \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + r(h)$$

gdzie

$$(6') \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Przy ustalonym x_0 funkcję liniową zmiennej h określoną wzorem

$$(df)(x_0; h) = hf'(x_0)$$

nazywamy *różniczką funkcji f w punkcie x_0* . Oznaczając przyrost funkcji f

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (\Delta f)(x_0; h)$$

mamy wobec (5'), (6')

$$(\Delta f)(x_0; h) = (df)(x_0; h) + o(h)$$

lub w krótszym zapisie

$$\Delta y = dy + o(h)$$

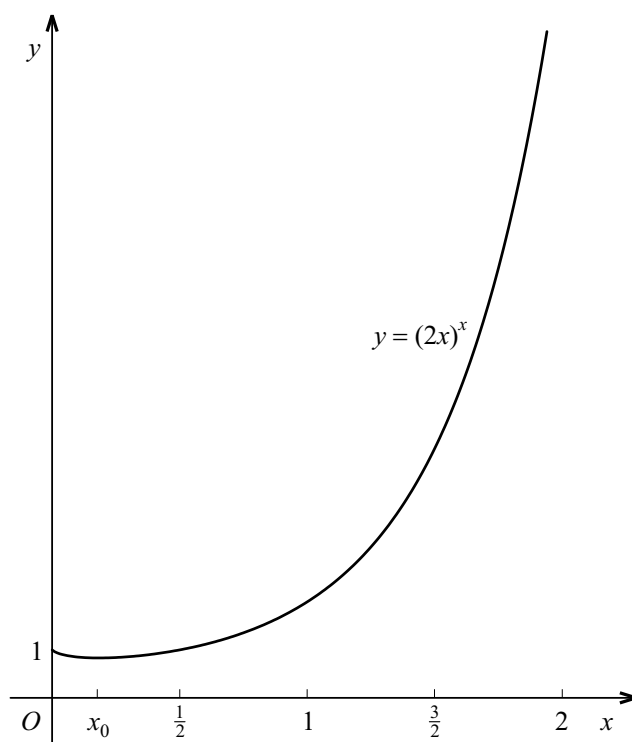
jeżeli przez Δy oznaczymy przyrost funkcji zaś przez dy jej różniczkę.

11. Zastosowanie pochodnej do badania ekstremów funkcji.

Przykład 38. Niech

$$f(x) = (2x)^x \quad (x > 0).$$

⁶Edmund George Hermann Landau (1877 - 1938), matematyk niemiecki, profesor uniwersytetu w Getyndze. Autor prac i książek z zakresu analitycznej teorii liczb i funkcji zmiennej zespolonej. Napisał podręcznik analizy matematycznej wyróżniający się niezwykłą dokładnością.



[rys. 32]

W celu obliczenia pochodnej możemy zastosować pochodną logarytmiczną (por. zadanie 11 i wzór (95)) lub przedstawić funkcję w postaci

$$f(x) = e^{x \log 2x}.$$

Różniczkując otrzymujemy

$$f'(x) = f(x)(1 + \log 2x).$$

Badanie ekstremów zaczniemy od znalezienia punktów, w których spełniony jest warunek konieczny ekstremum

$$f'(x) = 0$$

(por. twierdzenie 9), czyli

$$(89) \quad (2x)^x(1 + \log 2x) = 0.$$

Ponieważ pierwszy czynnik po lewej stronie jest dodatni, równanie (89) jest równoważne równaniu

$$\log 2x = -1,$$

którego jedynym rozwiązaniem jest

$$x_0 = \frac{1}{2e}.$$

Aby sprawdzić, czy funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0 , musimy zbadać jej przebieg w otoczeniu tego punktu. Mamy

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{dla } 0 < x < x_0, \\ > 0 & \text{dla } x > x_0, \end{cases}$$

zatem zgodnie z twierdzeniem 15 funkcja f jest ściśle malejąca w przedziale $(0, x_0]$ oraz ściśle rosnąca w przedziale $[x_0, \infty)$. Wobec tego w punkcie $x = x_0$ funkcja f ma minimum właściwe. Zauważmy ponadto, że z (86) wynika

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \log 2x = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0+} (2x) \log 2x = 0,$$

zatem z uwagi na ciągłość funkcji wykładniczej

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = e^0 = 1$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = -\infty.$$

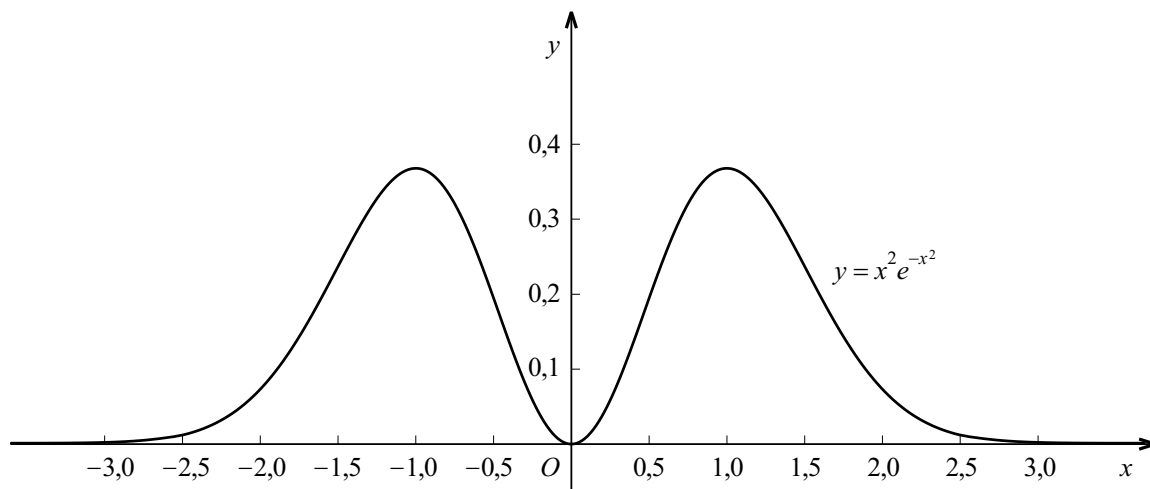
Oznacza to, że przy $x \rightarrow 0+$ wykres dochodzi do osi y -ów stycznie do niej. Ponadto, jak łatwo sprawdzić

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Wykres funkcji f podany jest na rys. 32.

Przykład 39. Niech

$$f(x) = x^2 e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$



[rys. 33]

Zbadamy ekstrema funkcji f i narysujemy jej wykres. Zaczynamy od zróżniczkowania funkcji f i znalezienia punktów, w których pochodna jest równa zero. Mamy zgodnie z regułą różniczkowania iloczynu

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 \frac{d}{dx} e^{-x^2},$$

przy czym pochodną po prawej stronie znajdujemy stosując regułę różniczkowania funkcji złożonej. Zatem

$$\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$$

a stąd

$$(90) \quad f'(x) = 2x(1 - x^2)e^{-x^2}.$$

Ponieważ

$$(91) \quad e^{-x^2} > 0,$$

równanie

$$f'(x) = 0$$

jest równoważne równaniu

$$2x(1 - x^2) = 0,$$

którego pierwiastkami są

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Wobec (90), (91)

$$f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x < -1 \quad \text{oraz} \quad 0 < x < 1$$

zaś

$$f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad -1 < x < 0 \quad \text{oraz} \quad x > 1,$$

zatem zgodnie z twierdzeniem 15 f jest ściśle rosnąca w przedziałach $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$ oraz f jest ściśle malejąca w przedziałach $[-1, 0]$, $[1, \infty)$.

Widzimy więc, że funkcja f ma maksimum właściwe w punktach $x = -1$, $x = 1$ oraz minimum właściwe w punkcie $x = 0$, przy czym

$$f(0) = 0, \quad f(-1) = f(1) = \frac{1}{e}.$$

Oprócz tego podstawiając $x^2 = t$ mamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$$

(por. Przykład 33). Wykres funkcji f podany jest na rys. 33. Zauważmy, że funkcja f jest parzysta a więc jej wykres jest symetryczny względem osi y -ów.

Przykład 40. Wśród trójkątów równoramiennych o danym obwodzie $2p$ znaleźć trójkąt o największym polu.

Rozważany trójkąt ma boki $a = b = x$, $c = 2p - 2x$, zaś jego pole S wyraża się wzorem Herona

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

czyli

$$S(x) = \sqrt{p(p-x)^2(2x-p)}.$$

Należy znaleźć maksimum funkcji $S(x)$.

Funkcja S jest określona dla $x \geq \frac{p}{2}$. Zauważmy, że z nierówności trójkąta $c < a + b$ wynika $p < 2x$, ponadto $c = 2p - 2x > 0$ i wobec tego

$$(92) \quad \frac{p}{2} < x < p,$$

możemy jednak rozważać funkcję S w całym przedziale domkniętym $[\frac{p}{2}, p]$ (dla $x = \frac{p}{2}$ oraz $x = p$ mamy trójkąt zdegenerowany). Oznaczając

$$y = p(p-x)^2(2x-p)$$

mamy

$$S(x) = \sqrt{y}$$

zatem zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej

$$\frac{dS}{dx} = \frac{d\sqrt{y}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

czyli

$$(93) \quad \frac{dS}{dx} = \frac{p}{\sqrt{y}}(x-p)(3x-2p)$$

dla x spełniających (92). Funkcja S jest więc ciągła w przedziale $\mathbb{P} = [\frac{p}{2}, p]$ i różniczkowalna w jego wnętrzu $\mathbb{P}_0(\frac{p}{2}, p)$. Równanie

$$\frac{dS}{dx} = 0$$

ma w przedziale $\mathbb{P}_0$ jedyne rozwiązanie

$$x_0 = \frac{2}{3}p$$

przy czym

$$\frac{dS}{dx} \begin{cases} > 0 & \text{dla } \frac{p}{2} < x < x_0, \\ < 0 & \text{dla } x_0 < x < p. \end{cases}$$

Zgodnie z twierdzeniem 15 funkcja S jest ściśle rosnąca w przedziale $[\frac{p}{2}, x_0]$, oraz ściśle malejąca w przedziale $[x_0, p]$, zatem ma maksimum właściwe w punkcie x_0 . Dla $x = x_0$ mamy

$$a = b = c = \frac{2}{3}p.$$

Rozwiązaniem zagadnienia jest więc trójkąt równoboczny, przy czym

$$S_{\max} = S\left(\frac{2}{3}p\right) = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$



Zadania.

1. Opierając się na definicji pochodnej znaleźć $f'(0)$, jeżeli

$$\begin{aligned} \text{a.) } f(x) &= \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \\ \text{b.) } f(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0, \end{cases} \\ \text{c.) } f(x) &= x|x|, \\ \text{d.) } f(x) &= \begin{cases} x^{-n} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Wskazówka. W punkcie b.) znaleźć najpierw pochodne jednostronne $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ i zastosować twierdzenie 1. W punkcie d.) po odpowiednim podstawieniu zastosować przykład 34.

2. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$. Zbadać dla jakich wartości k funkcja f jest

- a.) ciągła,
- b.) różniczkowalna

w punkcie $x_0 = 0$. W przypadku różniczkowalności obliczyć $f'(0)$. Narysować wykres funkcji f dla $k = 0, 1, 2$. Dla jakich wartości k pochodna $f'(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$?

3. Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ i niech

$$S(x_0, h) = \frac{1}{2h}(f(x_0 + h) - f(x_0 - h))$$

Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to

$$(94) \quad \lim_{h \rightarrow 0} S(x_0, h) = f'(x_0).$$

Podać przykład funkcji nieróżniczkowalnej w punkcie x_0 , dla której istnieje granica po lewej stronie (94).

Wskazówka. Wykorzystać Przykład 5.

4. Udowodnić, że funkcja wymierna

- a.) jest różniczkowalna w każdym punkcie nie będącym miejscem zerowym mianownika,

b.) jej pochodna jest również funkcją wymierną.
Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie o pochodnej ilorazu (twierdzenie 5) i Przykład 11.

5. Niech

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & \text{dla } x \geq a \\ 0 & \text{dla } x < a. \end{cases}$$

Obliczyć $f'(a)$ i naszkicować wykres funkcji f .

6. Podać interpretację geometryczną wzoru

$$\frac{d(y+c)}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

gdzie c jest stałą, zaś $y = f(x)$ funkcją różniczkowalną w rozważanym przedziale.

7. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = |x| + |x+1|$$

oraz narysować jej wykres.

8. Zróżniczkować funkcje

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad y &= 3x^2 - 2x + 5, & \text{(ii)} \quad y &= x^k e^{-x} \quad (k \in \mathbb{N}), \\ \text{(iii)} \quad y &= (\sin x)e^{2x}, & \text{(iv)} \quad y &= e^{\cos x}, \\ \text{(v)} \quad y &= \sin(e^x), & \text{(vi)} \quad y &= x^2 \arctg x. \end{aligned}$$

9. Zróżniczkować funkcje, podając dziedzinę każdej z nich:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad y &= \frac{x}{x+1}, & \text{(ii)} \quad y &= \frac{3x}{x^2+x-2}, \\ \text{(iii)} \quad y &= \sqrt{x^2-x-2}, & \text{(iv)} \quad y &= \log |\cos x|. \end{aligned}$$

10. Podać dziedzinę każdej z następujących funkcji i znaleźć jej pochodną:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad y &= \log |x|, & \text{(ii)} \quad y &= \log |\log |x||, \\ \text{(iii)} \quad y &= \log |\log |\log x||, & \text{(iv)} \quad y &= \sin(\cos(x^2)), \\ \text{(v)} \quad y &= \log \frac{x-a}{x+a}, & \text{(vi)} \quad y &= \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

11. Niech $y = f(x)$ będzie funkcją o wartościach dodatnich w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nie). Wyrażenie

$$(95) \quad (\log y)' = \frac{y'}{y}$$

(gdzie ' oznacza różniczkowanie $\frac{d}{dx}$) nazywamy *pochoďną logarytmiczną* funkcji f . Zastosować wzór (95) do zróżniczkowania następujących funkcji:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad y &= (1 + \sin x)^{\sqrt{x}}, & \text{(ii)} \quad y &= (1 + x^2)^{\log(1+x^2)}, \\ \text{(iii)} \quad y &= (\sin x)^{\cos x}, & \text{(iv)} \quad y &= x^{(e^x)}, \\ \text{(v)} \quad y &= (1 + x^2)^{1-x^2}. \end{aligned}$$

Podać dziedzinę każdej z tych funkcji.

12. Obliczyć pochodne następujących funkcji a.) wychodząc bezpośrednio z definicji pochodnej, b.) posługując się znanymi regułami różniczkowania:

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Podać dziedzinę każdej z tych funkcji.

13. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 , jeżeli

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x) &= \sin x, \quad x_0 = \frac{1}{4}\pi, \\ \text{(ii)} \quad f(x) &= x^2 + 1, \quad x_0 = 1, \\ \text{(iii)} \quad f(x) &= \log(1+x), \quad x_0 = 0. \end{aligned}$$

14. Pod jakim kątem prosta $y = c$ przecina sinusoidę $y = \sin x$, jeżeli

$$c = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad c = \pm 1, \quad c = 0.$$

Uwaga. Przez kąt między prostą i krzywą rozumiemy kąt między tą prostą i styczną do krzywej w punkcie przecięcia.

15. Pod jakim kątem przecinają się krzywe $y = x^2$ oraz $y^2 = x$?

Uwaga. Przez kąt między krzywymi rozumiemy kąt utworzony przez styczne w punkcie przecięcia.

16. Uzasadnić równości (przy $x \rightarrow 0$):

$$(i) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x),$$

$$(ii) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x),$$

$$(iii) \quad \log(1+x) = x + o(x),$$

$$(iv) \quad \sin x = x + o(x),$$

$$(v) \quad e^x = 1 + x + o(x).$$

Wskazówka. Wykorzystać wiadomości podane w punktach 2 i 10.

17. Udowodnić następujące

Twierdzenie (Darboux). *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (A, B) (ograniczonym lub nie), to jej pochodna ma w tym przedziale własność Darboux.*

(por. §3 punkt 7)

Wskazówka. Dla ustalonego przedziału $[a, b] \subset (A, B)$ rozważyć najpierw przypadek, gdy f' przyjmuje w punktach a, b wartości o różnych znakach i wykazać, że w przedziale (a, b) istnieje punkt ekstremalny. Przypadek ogólny

$$f'(a) < \alpha < f'(b) \quad \text{względnie} \quad f'(a) > \alpha > f'(b)$$

sprowadzić do poprzedniego rozważając funkcję $g(x) = f(x) - \alpha x$.

18. Pokazać, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, ale jej pochodna f' nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$. Porównać z zadaniem 17 oraz z twierdzeniem 13 §3.

19. Dana jest funkcja f ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna w jego wnętrzu, przy czym

$$f(a) = f(b) = 0, f(x) \neq 0 \quad \text{dla } x \in (a, b).$$

Udowodnić, że dla dowolnie obranej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \alpha.$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji

$$g(x) = f(x)e^{-\alpha x}.$$

20. Zilustrować twierdzenie udowodnione w zadaniu 19 następującymi przykładami:

- (i) $f(x) = \cos x$ w przedziale $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$,
 (ii) $f(x) = 1 - x^2$ w przedziale $[-1, 1]$.

Znaleźć punkt $c = c(\alpha)$.

21. Udowodnić następujące uogólnienie twierdzenia Rolle'a:

Niech f będzie funkcją różniczkowalną w ograniczonym przedziale (a, b) spełniającą warunek

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \infty.$$

Wówczas istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = 0$.

Sformułować i udowodnić analogiczne twierdzenie zastępując ∞ przez $-\infty$.

Wskazówka. Dobrać najpierw liczby α, β tak, by zachodziły nierówności

$$a < a + \alpha < b - \beta < b \quad \text{oraz} \quad f(a + \alpha) < f(b - \beta),$$

następnie udowodnić istnienie $x_0 \in (a, a + \alpha)$ takiego, że $f(x_0) = f(b - \beta)$ i zastosować twierdzenie Rolle'a do przedziału $[x_0, b - \beta]$.

22. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w całym przedziale $(-\infty, \infty)$ i spełniającą warunek

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g \in \mathbb{R}_\infty.$$

Udowodnić, że istnieje punkt c taki, że $f'(c) = 0$.

Wskazówka. Do funkcji

$$g(x) = f(\operatorname{tg} x) \quad \left(-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi\right)$$

zastosować twierdzenie Rolle'a w przypadku, gdy $g \in \mathbb{R}$ oraz zadanie 21, gdy $g = \pm\infty$.

23. Niech f będzie funkcją ciągłą w otoczeniu punktu a i różniczkowalną w jego sąsiedztwie. Udowodnić, że jeżeli istnieje

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = g,$$

to funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a oraz $f'(a) = g$. Sformułować i udowodnić analogiczne twierdzenie dla pochodnych jednostronnych.

Wskazówka. Przekształcić iloraz różnicowy

$$\varphi(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

opierając się na twierdzeniu Lagrange'a.

24. Niech

$$f(x) = x^3 \quad (x \geq 0).$$

Dla $0 < a < b$ znaleźć punkt $c \in (a, b)$ taki, że styczna do wykresu w punkcie $(c, f(c))$ jest równoległa do siecznej przechodzącej przez punkty $(a, f(a)), (b, f(b))$. Porównać z twierdzeniem Lagrange'a.

25. Udowodnić, że

- (i) pochodna funkcji parzystej jest nieparzysta,
- (ii) pochodna funkcji nieparzystej jest parzysta.

Podać przykłady.

26. Udowodnić regułę różniczkowania n czynników będących funkcjami zmiennej $x \in \mathbb{R}$:

$$(y_1 y_2 \dots y_n)' = \sum_{j=1}^n y_1 \dots y_{j-1} y_j' y_{j+1} \dots y_n.$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 4 i zastosować metodę indukcji.

27. Podać regułę różniczkowania wyznacznika stopnia n , którego elementy są funkcjami zmiennej $x \in \mathbb{R}$.

Wskazówka. Skorzystać z przedstawienia wyznacznika w postaci

$$\det[y_{ij}(x)] = \sum (-1)^{N(\sigma)} y_{1j_1} y_{2j_2} \dots y_{nj_n},$$

gdzie $N(\sigma)$ oznacza ilość inversji w permutacji $\sigma = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ liczb $(1, 2, \dots, n)$ a suma jest rozciągnięta na wszystkie permutacje. Następnie zastosować regułę podaną w zadaniu 26.

28. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale $(-\infty, \infty)$ spełniającą warunki

$$f'(x) = f(x) \quad \text{dla} \quad x \in (-\infty, \infty), \quad f(0) = 1.$$

Udowodnić, że

$$f(x) = e^x.$$

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 13 (i) stwierdzić, że funkcja

$$g(x) = e^{-x} f(x)$$

jest funkcją stałą, następnie obliczyć $g(0)$.

29. Niech f, g będą funkcjami różniczkowalnymi w przedziale $(-\infty, \infty)$ spełniającymi warunki

$$\begin{aligned} f'(x) &= -g(x), & g'(x) &= f(x) & \text{dla} & x \in (-\infty, \infty), \\ f(0) &= 1, & g(0) &= 0. \end{aligned}$$

Udowodnić, że

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sin x.$$

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 13 (i) udowodnić, że funkcja

$$p(x) = (f(x) - \cos x)^2 + (g(x) - \sin x)^2$$

jest stała, następnie obliczyć $p(0)$.

30. Udowodnić nierówność

$$2 \log x \begin{cases} < x - \frac{1}{x} & \text{dla } x > 1, \\ > x - \frac{1}{x} & \text{dla } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 15 zbadać przebieg funkcji

$$g(x) = 2 \log x - x + \frac{1}{x}$$

w przedziale $(0, \infty)$.

31. Udowodnić nierówność

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad \text{dla } x > 0.$$

Wskazówka. W celu zbadania przebiegu funkcji

$$g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

wykazać najpierw, że pochodna $g'(x)$ jest funkcją ściśle rosnącą w przedziale $(0, \infty)$.

32. Udowodnić nierówności

$$e^x \begin{cases} > 1 + x + \frac{x^2}{2} & \text{dla } x > 0, \\ < 1 + x + \frac{x^2}{2} & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Wskazówka. Opierając się na nierówności (62) i twierdzeniu 15 zbadać przebieg funkcji

$$g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

w przedziale $(-\infty, \infty)$.

33. Udowodnić, że równanie

$$x = \cos x$$

ma w przedziale $(0, \frac{1}{2}\pi)$ dokładnie jedno rozwiązanie. Podać ilustrację geometryczną. Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 15 zbadać przebieg funkcji

$$g(x) = x - \cos x,$$

następnie skorzystać z twierdzenia 13 §3.

34. Zbadać ilość rozwiązań równania

$$e^x = ax \quad (x \in \mathbb{R})$$

w zależności od parametru a . Podać ilustrację geometryczną.

Wskazówka. Korzystając z zadania 32 i zadania 17 §2 oraz twierdzeń 14, 15 zbadać przebieg funkcji

$$g(x) = e^x - ax,$$

następnie oprzeć się na twierdzeniu 13 §3.

35. Niech f, g będą funkcjami różniczkowalnymi i niech $f(x_0) = g(x_0)$. Udowodnić, że funkcja

$$F(x) = \max(f(x), g(x))$$

jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Wskazówka. Dla dowolnego $h_n \rightarrow 0$ rozważyć przypadki

1^o istnieje wskaźnik n_0 taki, że dla $n \geq n_0$

$$F(x_0 + h_n) = f(x_0 + h_n)$$

lub

$$F(x_0 + h_n) = g(x_0 + h_n),$$

2^o ciąg $\{h_n\}$ rozkłada się na dwa podciągi $\{\bar{h}_n\}$ i $\{\bar{\bar{h}}_n\}$ takie, że

$$F(x_0 + \bar{h}_n) = f(x_0 + \bar{h}_n), \quad F(x_0 + \bar{\bar{h}}_n) = g(x_0 + \bar{\bar{h}}_n).$$

W każdym z przypadków zbadać granicę odpowiedniego ciągu ilorazów różnicowych funkcji F .

36. Zbadać ciągłość i różniczkowalność podanych funkcji oraz naszkicować ich wykresy:

$$(i) \quad y = \begin{cases} x^2 & \text{dla } |x| > \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 1 - x^2 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$(ii) \quad y = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x \leq 0, \\ e^x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

$$(iii) \quad y = \begin{cases} -x^3 & \text{dla } x < 0, \\ x^3 & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

Wynik porównać z twierdzeniem sformułowanym w zadaniu 35.

37. Niech f będzie funkcją różniczkowalną i niech $f(x_0) = 0$. Udowodnić, że funkcja

$$F(x) = |f(x)|$$

jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy $f'(x_0) = 0$.

Wskazówka. Oprzeć się na równości

$$|a| = \max(a, -a) \quad (a \in \mathbb{R})$$

i na twierdzeniu sformułowanym w zadaniu 35.

38. Naszkicować wykresy funkcji

$$f(x) = |\sin x|, \quad g(x) = |\cos x|$$

oraz zbadać ich ciągłość i różniczkowalność. Wynik porównać z twierdzeniem sformulowanym w zadaniu 37.

39. Niech f będzie funkcją określoną i różniczkowalną w pewnym przedziale (a, ∞) spełniającą warunki:

(i) istnieje skończona granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

(ii) istnieje (być może niewłaściwa) granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = g.$$

Udowodnić, że $g = 0$.

Wskazówka. Na mocy twierdzenia 14 §2 do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać Q tak, by dla $x > Q$ zachodziła nierówność

$$(96) \quad -\varepsilon < f(x+1) - f(x) < \varepsilon.$$

Różnicę występującą we wzorze (96) przekształcić w oparciu o twierdzenie Lagrange'a. Następnie przypuszczając, że $g \neq 0$, dojść do sprzeczności.

40. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2 \quad (x \neq 0).$$

Udowodnić, że istnieje skończona granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

natomiast nie istnieje (nawet w sensie niewłaściwym) granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x).$$

Porównać z twierdzeniem sformułowanym w zadaniu 39.

41. Zakładamy, że funkcja f , określona i różniczkowalna dla dostatecznie dużych x , spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = g,$$

gdzie $g \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że wówczas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = g.$$

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu Lagrange'a przekształcić różnicę

$$f(x+1) - f(x),$$

następnie skorzystać z zadania 8 §2.

42. Znaleźć ekstrema oraz kresy górny i dolny funkcji

- (i) $f(x) = x^2 e^{-x}$ w przedziale $[-2, 4]$,
- (ii) $g(x) = \cos x - 2 \cos \frac{x}{2}$ w przedziale $[0, 2\pi]$,
- (iii) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } -2 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{dla } 1 < x \leq 3 \end{cases}$ w przedziale $[-2, 3]$.

43. Okazać, że następujące funkcje mają stały znak dla $x > 0$:

$$(i) \quad f(x) = \sin x - x, \quad (ii) \quad f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Otrzymaną nierówność zilustrować rysunkiem.

44. Znaleźć największą wartość funkcji

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$$

w przedziale $[0, \infty)$.

45. Dane są liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$. Znaleźć taką wartość x , dla której suma

$$S(x) = \sum_{j=1}^n (x - a_j)^2$$

jest najmniejsza, posługując się dwiema metodami

- a.) sprowadzając trójmian $S(x)$ do postaci kanonicznej
oraz
b.) badając pochodną funkcji $S(x)$.

46. Który z punktów paraboli $y^2 = 6x$ leży najbliżej prostej $x - y + 5 = 0$?

47. Walec obrotowy zmienia swą powierzchnię nie zmieniając objętości V . Jaki musi być promień podstawy R aby pole powierzchni było najmniejsze?

48. Znaleźć największą objętość walca wpisanego w stożek o danych rozmiarach.

49. Udowodnić, że wśród prostokątów o danym obwodzie kwadrat ma największe pole.

50. Udowodnić, że wśród trójkątów o danym obwodzie i danym boku największe pole ma trójkąt równoramienny, w którym bok dany jest podstawą.

51. Stosując reguły de l'Hospitala obliczyć granice

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi -} \left(\frac{1}{2}\pi - x \right) \operatorname{tg} x, & \text{(ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} ax} \quad (a \neq 0), \\ \text{(iii)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}, & \text{(iv)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{|x|}}, \\ \text{(v)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0). \end{aligned}$$

52. Czy funkcja

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$$

jest ograniczona w przedziale $(0, \frac{1}{2}\pi]$?

53. Niech

$$f(x) = x + \sin x, \quad g(x) = x.$$

Okazać, że

$$\begin{aligned} \text{a.)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty, \\ \text{b.)} \quad & \text{istnieje} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \\ \text{c.)} \quad & \text{nie istnieje} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

Porównać z twierdzeniem 19.

54. Zbadać zbieżność ciągów

$$a_n = n(\sqrt[n]{2} - 1), \quad b_n = n(\sqrt[n]{n} - 1).$$

Wskazówka. Wykorzystać granice obliczone w przykładach 31 i 35.

55. Udowodnić zbieżność ciągu

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

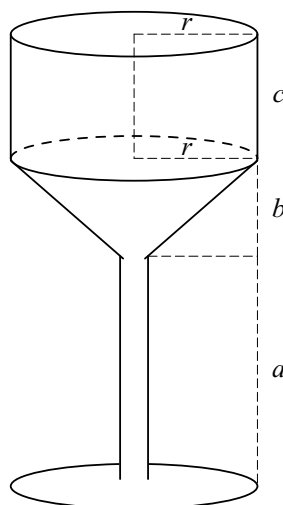
Wskazówka. Korzystając z nierówności (63) wykazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący i ograniczony z dołu, następnie oprzeć się na twierdzeniu 5 rozdz.II §2.

Uwaga. Granica

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

nosi nazwę *stałej Eulera*.⁷

56. Do kieliszka (rys. 34) wlewamy wino w tempie α ml/min (a, b, c, r, α dane). Niech $v(t)$ oznacza objętość wina wlanego po t minutach, zaś $h(t)$ jego wysokość liczoną od podstawy kieliszka. Wyrazić funkcje $v(t)$, $h(t)$ przy pomocy danych i zbadać ich różniczkowalność.

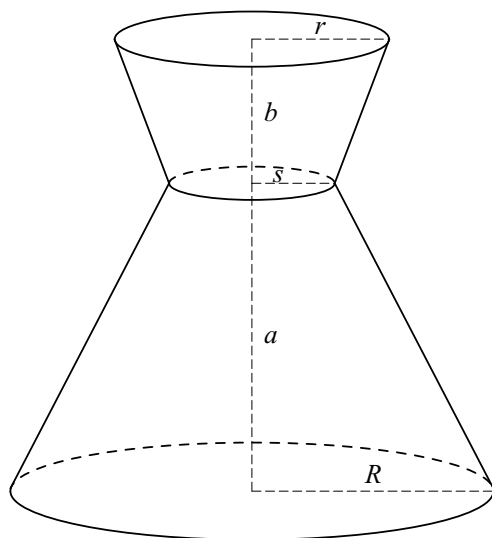


[rys. 34]

57. Do ozdobnej szklanki (rys. 35) wlewamy sok owocowy w tempie α ml/min (a, b, r, s, R ,

⁷Leonard Euler (1707 - 1783), urodzony w Bazylei, w latach 1727 - 1741 był profesorem matematyki w Petersburgu, następnie przeniósł się do Berlina, gdzie w 1744 r. objął katedrę matematyki w Akademii Nauk. W 1766 powrócił do Petersburga i do końca życia zajmował się działalnością naukową. Rozwinął i ugruntował rachunek różniczkowy i całkowy, uprawiał również optykę, mechanikę i astronomię, algebrę i teorię liczb. Wniósł istotny wkład w rozwój wszystkich dziedzin matematyki. Opublikował 756 prac. Część jego dorobku pozostaje nadal nie opublikowana.

α dane). Niech $v(t)$ oznacza objętość soku wlanego po t minutach, zaś $h(t)$ jego wysokość liczoną od podstawy szklanki. Wyrazić funkcje $v(t)$, $h(t)$ przy pomocy danych i zbadać ich różniczkowalność.



[rys. 35]

58. Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$ przyjmujemy, że

$$b = \sqrt[q]{a},$$

jeżeli $b^q = a$ (liczbę b nazywamy *pierwiastkiem stopnia q z liczby a*). Zakładając, że q jest liczbą nieparzystą okazać, że funkcja

$$f(x) = \sqrt[q]{x}$$

jest określona i ciągła na całej osi rzeczywistej.

59. Niech $\alpha = \frac{p}{q}$, gdzie p jest liczbą całkowitą, zaś q liczbą naturalną nieparzystą. Przyjmując

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

rozważmy funkcję potęgową

$$f(x) = x^\alpha$$

określoną

(i) dla $x \in \mathbb{R}$, gdy $p \geq q$,

(ii) dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gdy $p < q$.

Okazać, że równość (32)

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

jest prawdziwa w każdym punkcie x , w którym funkcja f jest określona.

60. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Stosując (przy ustalonym x) wzór Lagrange'a (52) w przedziale $[0, x]$ ($0 < x \leq x_0$) i dzieląc obie strony równości przez x dostajemy

$$(97) \quad x \sin \frac{1}{x} = 2c \sin c - \cos \frac{1}{c},$$

gdzie $c \in (0, x)$. Jak wiemy (por. Przykład 25), liczba c występująca we wzorze (52) zależy od końców przedziału, w naszym przykładzie jest więc funkcją zmiennej $x \in (0, x_0]$.

Okazać, że funkcja $c(x)$ nie jest ciągła w żadnym przedziale $(0, a)$, gdzie $0 < a \leq x_0$.

Wskazówka. Okazać najpierw, że funkcja

$$d(x) = \frac{1}{c(x)}$$

nie spełnia warunku Darboux (§3 punkt 7), następnie powołać się na twierdzenia 7 i 13 §3.

61. Porównać reguły de l'Hospitala podane w twierdzeniach 16 -19 z twierdzeniem Stolza (rozdział II §2 twierdzenie 11). Czy zachodzi analogia między tymi twierdzeniami?