§5. Pochodne wyższych rzędów.

♡ ♡ ♡

1. Pochodna rzędu k i wzór Leibniza Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale otwartym $\mathbb{P}$ i niech

$$g(x) = f'(x) \quad (x \in \mathbb{P}).$$

Jeżeli funkcja g jest również różniczkowalna w $\mathbb{P}$, to jej pochodną nazywamy *drugą pochodną* funkcji f i oznaczamy

$$g'(x) = f^{(2)}(x) \quad (x \in \mathbb{P})$$

lub

$$g'(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (x \in \mathbb{P}).$$

Ogólnie, przyjmujemy następującą rekurencyjną definicję *k-tej pochodnej* (inaczej: *pochodnej rzędu k*) funkcji f:

$$f^{(k)}(x) = [f^{(k-1)}(x)]' \quad (x \in \mathbb{P})$$

lub w zapisie Leibniza

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \frac{d}{dx}(\frac{d^{k-1} f(x)}{dx^{k-1}}) \quad (x \in \mathbb{P})$$

dla $k \in \mathbb{N}$. Przez pochodną rzędu zerowego rozumiemy samą funkcję f, zaś dla $k = 2, 3$ używane jest oznaczenie

$$f^{(2)}(x) = f''(x), \qquad f^{(3)}(x) = f'''(x).$$

Jeżeli $\mathbb{P}$ nie jest przedziałem otwartym, lecz zawiera swój lewy koniec a (względnie prawy koniec b), to przyjęta definicja k-tej pochodnej pozostaje w mocy z tym, że przez pochodną w punkcie a (względnie b) rozumiemy pochodną prawostronną (względnie lewostronną).

Jeżeli funkcja f ma w przedziale $\mathbb{P}$ (otwartym lub nie) skończone pochodne do rzędu n włącznie, to mówimy, że jest ona w tym przedziale *n-krotnie różniczkowalna*. Przeprowadzając rozumowanie podobne jak w dowodzie twierdzeń 2 i 3 §4 stwierdzamy łatwo, że jeżeli funkcja ma skończoną pochodną prawostronną (względnie lewostronną) w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła prawostronnie (względnie lewostronnie). Z uwagi tej oraz z twierdzenia 3 §4 wynika, że jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$, to ma w tym przedziale ciągłe pochodne do rzędu $n-1$ włącznie. Jeżeli również pochodna rzędu n jest ciągła w przedziale $\mathbb{P}$ to mówimy, że f jest klasy C^n w tym przedziale (zapisujemy $f \in C^n(\mathbb{P})$). Jeżeli funkcja f ma w przedziale $\mathbb{P}$ pochodne dowolnego rzędu (oczywiście zgodnie z twierdzeniem 3 §4 i uczynioną wyżej uwagą są one ciągłe) to mówimy, że f jest klasy C^∞ w tym przedziale (zapisujemy $f \in C^\infty(\mathbb{P})$).

Dla pochodnej n-tego rzędu iloczynu dwóch funkcji zachodzi *wzór Leibniza*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \tag{1}$$

przy założeniu, że obie funkcje f, g są n-krotnie różniczkowalne w rozważanym przedziale. Udowodnimy go metodą indukcji. Dla $n = 1$ wzór (1) został udowodniony w §4 (por. twierdzenie 4 oraz wzory (10), (10'), (10")). Załóżmy teraz, że obie funkcje f, g są $(n+1)$-krotnie różniczkowalne, wobec tego wyrażenie po prawej stronie (1) jest funkcją różniczkowalną. Zakładając, że równość (1) jest prawdziwa i różniczkując ją obustronnie otrzymujemy po zastosowaniu reguły (10') §4

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)},$$

co po podstawieniu $r = k + 1$ w pierwszej sumie daje

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{n+1} \binom{n}{r-1} f^{(r)} g^{(n-r+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}.$$

Grupując wyrazy z tymi samymi pochodnymi funkcji f, g otrzymujemy stąd

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{n} \left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \right] f^{(r)} g^{(n-r+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g^{(0)}. \tag{2}$$

Równość (2) po wykorzystaniu znanej własności współczynników newtonowskich (por. (18) rozdz.I §1) daje

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{(n+1)}{r} f^{(r)} g^{(n-r+1)},$$

czyli wzór (1) z zastąpieniem n przez $n + 1$. Dowód indukcyjny jest zakończony. □

2. Wzór Taylora i wzór Maclaurina.

Twierdzenie 1. *Niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w przedziale $[a, b]$. Wówczas istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n, \tag{3}$$

gdzie

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c). \tag{4}$$

DOWÓD. Dla dowodu wprowadzimy dwie pomocnicze funkcje

$$g(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

oraz

$$u(x) = (b-x)^n$$

(łatwo zauważyć, że funkcję g otrzymujemy z równości (3) rozwiązując ją względem R_n i zastępując a przez x). Funkcje g, u spełniają w przedziale $[a, b]$ założenia twierdzenia Cauchy'ego (twierdzenie 12 §4). Mamy

$$g(b) = u(b) = 0 \tag{5}$$

oraz

$$u'(x) = -n(b-x)^{n-1}. \tag{6}$$

Ponadto dla $x \in (a, b)$

$$g'(x) = -f'(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x),$$

co po redukcji daje

$$g'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x). \tag{7}$$

Stosując do funkcji g, u twierdzenie Cauchy'ego otrzymujemy wobec (5)

$$\frac{-g(a)}{-u(a)} = \frac{g'(c)}{u'(c)},$$

co po wykorzystaniu (6), (7) i skróceniu ułamka po prawej stronie przez $(b-c)^{n-1}$ daje

$$\frac{g(a)}{u(a)} = \frac{f^{(n)}(c)}{n(n-1)!}.$$

Ostatnia równość po obustronnym pomnożeniu przez $u(a)$ daje (3). □

Wzór (3) nosi nazwę *wzoru Taylora*[1] *(wzoru Maclaurina*[2] gdy $a = 0$) z resztą *w postaci Lagrange'a* określoną wzorem (4).

---

[1]Brook Taylor (1685 - 1731), studiował na uniwersytecie w Cambridge, w 1712 r. został członkiem Londyńskiego Towarzystwa Królewskiego. Kontynuując badania I. Newtona zajmował się rachunkiem różniczkowym i mechaniką (badał drgania poprzeczne struny jednorodnej zamocowanej na końcach).

[2]Colin Maclaurin (1698 - 1776), urodzony w Szkocji, od 1725 r. profesor matematyki na uniwersytecie w Edynburgu, członek Londyńskiego Towarzystwa Królewskiego. Zajmował się analizą matematyczną, kontynuując badania I. Newtona.

W przeprowadzonym dowodzie rozważaliśmy funkcję f w przedziale $[a, b]$, co oznacza, że zakładamy $a < b$. Zauważmy jednak, że w twierdzeniu Cauchy'ego, na którym oparty jest dowód, można zamienić role punktów a, b - powoduje to jedynie zmianę znaku w liczniku i w mianowniku ułamka po lewej stronie wzoru (57) §4. Nic więc nie stoi na przeszkodzie, by zakładając $b < a$ powtórzyć całe rozumowanie, rozważając funkcje f, g, u w przedziale $[b, a]$. Zatem we wzorze (3) może być $a < b$ lub $a > b$. Wzór (3) pozostaje również prawdziwy dla $a = b$, gdyż redukuje się on wtedy do równości $f(b) = f(a)$ (przyjmujemy w tym wypadku $c = a = b$).

Uwzględniając te uwagi i zmieniając oznaczenia możemy twierdzenie 1 sformułować w innej, nieco ogólniejszej, postaci.

Twierdzenie 2. *Niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w przedziale $\mathbb{P}$ i niech $a \in \mathbb{P}$. Wówczas dla dowolnego $x \in \mathbb{P}$ istnieje punkt $\bar{x}$ leżący między a, x taki, że*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n, \tag{8}$$

gdzie

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\bar{x}). \tag{9}$$

Równość (8) stanowi inną postać wzoru Taylora (względnie wzoru Maclaurina, gdy $a = 0$) z resztą R_n w postaci Lagrange'a określoną wzorem (9).

3. Szczególne przypadki wzoru Taylora. Dla $n = 1$ wzór (3) przyjmuje postać

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c),$$

twierdzenie 1 jest wówczas twierdzeniem Lagrange'a, które było omówione w §4 (twierdzenie 11). Zakładając, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$ i przyjmując $n = 2$ we wzorze (8) otrzymujemy z twierdzenia 2

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + R_2, \tag{10}$$

gdzie

$$R_2 = \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(\bar{x}). \tag{11}$$

Mówimy, że
f jest *wypukła* w przedziale $\mathbb{P}$, jeżeli[3]

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P};$$

[3] W dalszym ciągu (punkt 10) będzie podana inna definicja funkcji wypukłej bez żadnych założeń o jej regularności. Dla funkcji dwukrotnie różniczkowalnych obie definicje są równoważne (twierdzenie 8).

f jest *wklęsła* w przedziale $\mathbb{P}$, jeżeli

$$f''(x) \leq 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P}.$$

Oczywiście f jest wypukła (wklęsła) wtedy i tylko wtedy, gdy $-f$ jest wklęsła (wypukła) w przedziale $\mathbb{P}$.

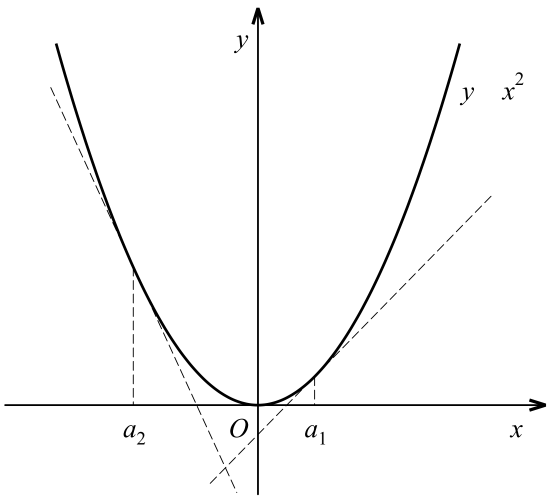
Przypomnijmy (por. §4 punkt 1), że równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$ ma postać

$$y = f(a) + (x - a)f'(a). \tag{12}$$

Ze wzorów (10) - (12) widać, że *jeżeli f jest funkcją wypukłą w $\mathbb{P}$, to jej wykres leży nad styczną poprowadzoną w dowolnym punkcie $(a, f(a))$, gdzie $a \in \mathbb{P}$. Jeżeli f jest funkcją wklęsłą w $\mathbb{P}$, to zachodzi sytuacja przeciwna - wykres leży pod styczną poprowadzoną w punkcie $(a, f(a))$ dla dowolnego $a \in \mathbb{P}$.*

Przykład 1. Niech (rys. 36)

$$f(x) = x^2,$$



[rys. 36]

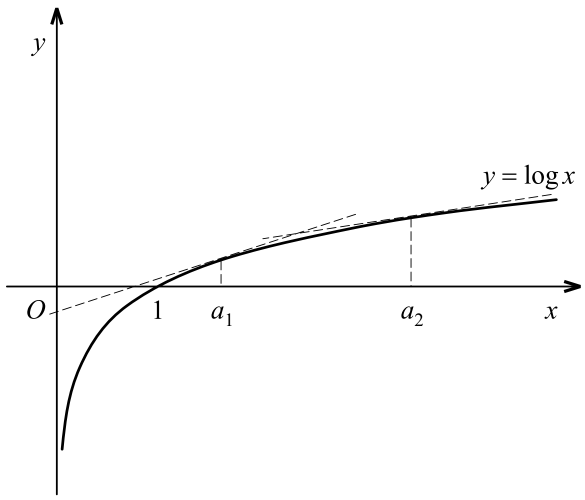
wówczas

$$f''(x) = 2$$

dla dowolnego x, zatem f jest wypukła w przedziale $\mathbb{P} = (-\infty, \infty)$. Z rys. 36 widać, że parabola o równaniu $y = x^2$ leży nad styczną poprowadzoną w dowolnie obranym punkcie (a, a^2).

Przykład 2. Niech (rys. 37)

$$f(x) = \log x \qquad (x > 0),$$



[rys. 37]

wówczas

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

zatem f jest wklęsła w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$. Z rys. 37 widać, że wykres funkcji f leży pod styczną poprowadzoną w dowolnie obranym punkcie $(a, \log a)$.

Przykład 3. Rozważmy funkcję potęgową

$$f(x) = x^\alpha$$

określoną w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$. Mamy dla $x \in \mathbb{P}$

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$$

a stąd

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{gdy} \quad 0 < \alpha < 1, \\ > 0 & \text{gdy} \quad \alpha < 0 \quad \text{lub} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Dla $\alpha \in (0, 1)$ funkcja f jest wklęsła w przedziale $\mathbb{P}$, dla $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ funkcja f jest wypukła w tym przedziale. Wykresy funkcji f dla różnych wartości α podane były na rys. 18 (§3).

Zakładając w dalszym ciągu, że f jest dwukrotnie różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$ wprowadźmy pomocniczą funkcję

(13) $$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x, a \in \mathbb{P}, x \neq a).$$

Mamy

(14) $$\varphi'(x) = \frac{(x - a)f'(x) - f(x) + f(a)}{(x - a)^2}.$$

Z drugiej strony, zamieniając role punktów a, x we wzorze Taylora (8) przy $n = 2$ otrzymujemy dla a, $x \in \mathbb{P}$

$$f(a) = f(x) + (a - x)f'(x) + \frac{1}{2}(a - x)^2 f''(\bar{x}), \tag{15}$$

gdzie $\bar{x}$ jest punktem pośrednim między a, x. Jeżeli f jest wypukła w przedziale $\mathbb{P}$, to z (14), (15) wynika, że funkcja φ określona wzorem (13) jest rosnąca w każdym przedziale nie zawierającym punktu a. W szczególności dla

$$a < x < b \quad (b \in \mathbb{P})$$

mamy

$$\varphi(x) \leq \varphi(b),$$

co daje po prostych przekształceniach

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{16}$$

dla $a \leq x \leq b$. Zauważmy, że równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$ ma postać

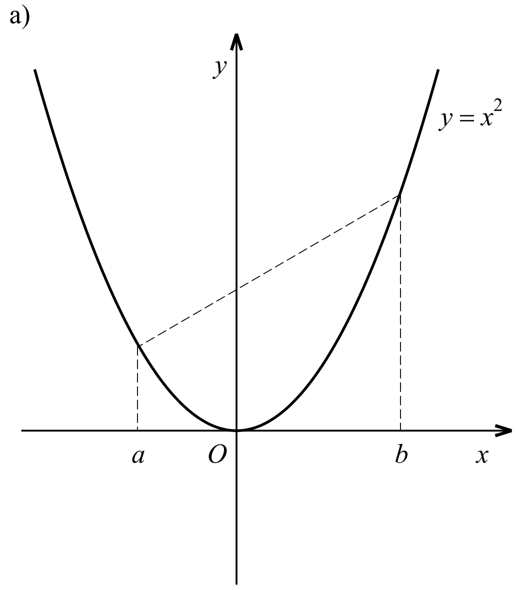
$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{17}$$

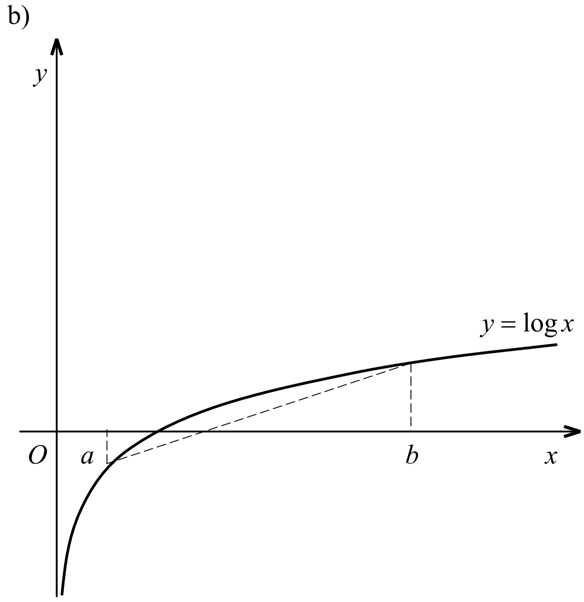
Prostą tę nazywamy *sieczną wykresu* funkcji f, zaś jej odcinek o końcach A, B - *cięciwą wykresu.* Z (16), (17) wynika więc, że

wykres funkcji wypukłej w przedziale $\mathbb{P}$ *leży zawsze pod cięciwą wyznaczoną przez punkty* $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, *gdzie* a, $b \in \mathbb{P}$.

Jeżeli funkcja f jest wklęsła w przedziale $\mathbb{P}$, to w podobny sposób zauważamy, że funkcja φ określona wzorem (13) jest malejąca w każdym przedziale nie zawierającym punktu a. Daje to w konsekwencji nierówność (16) z zamianą znaku $\leq$ na $\geq$. Wobec tego

wykres funkcji wklęsłej w przedziale $\mathbb{P}$ *leży zawsze nad cięciwą wyznaczoną przez punkty* $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ *gdzie* $a, b \in \mathbb{P}$. Przeprowadzone rozważania ilustruje rys. 38 a), gdzie $f(x) = x^2$ oraz rys. 38 b), gdzie $f(x) = \log x$.





[rys. 38 a)]   [rys. 38 b)]

Przykład 4. Niech
$$f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$
Funkcja f jest wypukła w przedziale $(-\infty, \infty)$ gdyż
$$f''(x) = e^x > 0,$$
zatem wykres jej leży nad styczną w punkcie $(0, 1)$ o równaniu
$$y = x + 1,$$
skąd wynika, że
$$e^x \geq 1 + x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Nierówność ta była udowodniona w §4 (Przykład 28).

Przykład 5. Niech
$$f(x) = \log(1 + x) \quad (x > -1).$$
Funkcja f jest wklęsła w przedziale $(-1, \infty)$, gdyż
$$f''(x) = \frac{-1}{(1 + x)^2} < 0,$$
zatem wykres jej leży pod styczną w punkcie $(0, 0)$ o równaniu
$$y = x,$$
skąd wynika, że
$$\log(1 + x) \leq x \quad (x > -1).$$

Jest to prawa część nierówności udowodnionej w §4 (Przykład 29).

4. Ekstrema i punkty przegięcia. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale otwartym $\mathbb{P}$ i niech dla ustalonego punktu $a \in \mathbb{P}$

$$d(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a). \tag{18}$$

Mówimy, że a jest *punktem przegięcia* funkcji f, jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$d(x)\begin{cases} < 0 & \text{dla} \quad a-\delta < x < a, \\ > 0 & \text{dla} \quad a < x < a+\delta \end{cases} \tag{19}$$

lub

$$d(x)\begin{cases} > 0 & \text{dla} \quad a-\delta < x < a, \\ < 0 & \text{dla} \quad a < x < a+\delta. \end{cases} \tag{19'}$$

Niech l_a oznacza styczną do wykresu w punkcie $(a, f(a))$ - jak wiemy (por. §4 punkt1), jest ona określona równaniem

$$y = f(a) + (x-a)f'(a).$$

Warunek (19) oznacza, że

wykres leży pod styczną l_a w przedziale $(a-\delta, a)$ i nad styczną l_a wprzedziale $(a, a+\delta)$, zaś warunek (19'), że naodwrót -

wykres leży nad styczną l_a w przedziale $(a-\delta, a)$ i pod styczną l_a w przedziale $(a, a+\delta)$. Zatem jeżeli a jest punktem przegięcia, to wykres funkcji w punkcie $(a, f(a))$ przechodzi z jednej strony stycznej na drugą stronę.

Podobnie, jak w przypadku ekstremum, można łatwo sformułować warunek konieczny do tego, by punkt a był punktem przegięcia.

Twierdzenie 3. *Jeżeli f jest klasy C^2 w przedziale otwartym $\mathbb{P}$ oraz $a \in \mathbb{P}$ jest punktem przegięcia, to*

$$f''(a) = 0.$$

DOWÓD. Wzór Taylora (8) dla $n = 2$ możemy zapisać w postaci

$$d(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(\bar{x}), \tag{20}$$

gdzie $\bar{x}$ leży między punktami a, x. Przypuśćmy teraz, że $f''(a) \neq 0$. Wówczas z (20) widzimy, że w pewnym dostatecznie małym otoczeniu a wyrażenie $d(x)$ jest różne od zera dla $x \neq a$ i ma stały znak, taki jak $f''(a)$ (por. zadanie 38 §3). Oznacza to, że żaden z warunków (19), (19') nie jest spełniony - wbrew założeniu, że a jest punktem przegięcia. □

Załóżmy teraz, że f jest funkcją klasy C^n w przedziale otwartym $\mathbb{P}$. Wiemy (por. §4 punkty 6,7), że jeżeli $a \in \mathbb{P}$ jest punktem ekstremalnym funkcji f, to

$$f'(a) = 0 \tag{21}$$

przy czym (21) stanowi jedynie warunek konieczny ale nie dostateczny istnienia ekstremum w punkcie a. Aby rozstrzygnąć, czy rzeczywiście funkcja f osiąga ekstremum w punkcie a, badamy zachowanie jej pochodnej f' w otoczeniu a - tak postępowaliśmy w Przykładach 38, 39, 40 §4. Obecnie zobaczymy, że mając do dyspozycji pochodne wyższych rzędów, możemy sformułować kryterium sprowadzające się do badania tych pochodnych w punkcie a, w których zachodzi równość (21). Załóżmy, że spełnione są warunki

$$f''(a) = \cdots = f^{(p-1)}(a) = 0, \quad f^{(p)}(a) \neq 0,$$

gdzie $2 \leq p \leq n$. Ze wzoru Taylora (8) dla $n = p$ mamy, przyjmując $x = a + h$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(\bar{x}), \tag{22}$$

przy czym dla dostatecznie małych $|h|$ pochodna $f^{(p)}(\bar{x})$ jest różna od zera i ma ten sam znak, co $f^{(p)}(a)$. Z równości (22) widać, że jeżeli *p jest liczbą parzystą*, to różnica po lewej stronie ma taki sam znak jak $f^{(p)}(\bar{x})$ niezależnie od znaku przyrostu h. W tym przypadku f ma w punkcie a ekstremum, przy tym

minimum gdy $f^{(p)}(a) > 0$, *maksimum* gdy $f^{(p)}(a) < 0$.

Jeżeli *p jest liczbą nieparzystą*, to z (22) wynika, że znak różnicy po lewej stronie zależy od znaku przyrostu h, wobec tego w punkcie a nie ma ekstremum.

Przyjmijmy teraz, że $a \in \mathbb{P}$ jest punktem przegięcia funkcji$f$, zatem zgodnie z twierdzeniem 3

$$f''(a) = 0. \tag{23}$$

Załóżmy ponadto, że

$$f'''(a) = \cdots = f^{(p-1)}(a) = 0, \quad f^{(p)}(a) \neq 0$$

gdzie $3 \leq p \leq n$. Wzór Taylora (8) dla $n = p$ możemy zapisać w postaci

$$d(x) = \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(\bar{x}),$$

gdzie funkcja $d(x)$ jest określona wzorem (18). Jeżeli *p jest liczbą nieparzystą*, to w pewnym otoczeniu punktu a

$$d(x) \begin{cases} < 0 & \text{dla} \quad x < a, \\ > 0 & \text{dla} \quad x > a \end{cases}$$

lub

$$d(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla} \quad x < a, \\ < 0 & \text{dla} \quad x > a, \end{cases}$$

zależnie od znaku pochodnej $f^{(p)}(a)$. Jeżeli zaś p jest liczbą parzystą, to w pewnym otoczeniu punktu a wyrażenie $d(x)$ ma stały znak, taki sam jak $f^{(p)}(a)$ - zatem a nie może być punktem przegięcia.

Przeprowadzone rozumowanie doprowadziło nas do następującego kryterium pozwalającego rozstrzygnąć zachowanie się funkcji w otoczeniu punktu a.

Twierdzenie 4. *Niech f będzie funkcją klasy C^n w przedziale otwartym $\mathbb{P}$ i niech $a \in \mathbb{P}$.*

(i) *Jeżeli*

$$f'(a) = \cdots = f^{(p-1)}(a) = 0, \quad f^{(p)}(a) \neq 0,$$

gdzie $2 \leq p \leq n$, to a jest punktem ekstremalnym wtedy i tylko wtedy gdy p jest liczbą parzystą, przy tym

f ma w punkcie a minimum gdy $f^{(p)}(a) > 0$,

oraz

f ma w punkcie a maksimum gdy $f^{(p)}(a) < 0$.

(ii) *Jeżeli*

$$f''(a) = \cdots = f^{(p-1)}(a) = 0, \quad f^{(p)} \neq 0,$$

gdzie $3 \leq p \leq n$, to a jest punktem przegięcia wtedy i tylko wtedy gdy p jest liczbą nieparzystą, przy tym

wykres leży pod styczną l_a dla $x < a$ zaś nad styczną l_a dla $x > a$ gdy $f^{(p)}(a) > 0$

oraz

wykres leży nad styczną l_a dla $x < a$ zaś pod styczną l_a dla $x > a$ gdy $f^{(p)}(a) < 0$.

□

Przykład 6. Niech (rys. 39)

$$f(x) = (x-a)^k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Funkcja f jest klasy C^∞ w całym przedziale $(-\infty, \infty)$. Dla $k = 1$ jest to funkcja liniowa

$$f(x) = x - a.$$

Ponieważ

$$f'(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

w żadnym punkcie $a \in \mathbb{R}$ nie jest spełniony warunek konieczny istnienia ekstremum (por. twierdzenie 9 §4). Również

$$d(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

i wobec tego przy dowolnym obiorze punktu $a \in \mathbb{R}$ nie może być spełniony żaden z warunków (19), (19'). Wynika stąd, że dla $k = 1$ funkcja f nie ma ekstremów ani punktów przegięcia.

Gdy $k > 1$, mamy

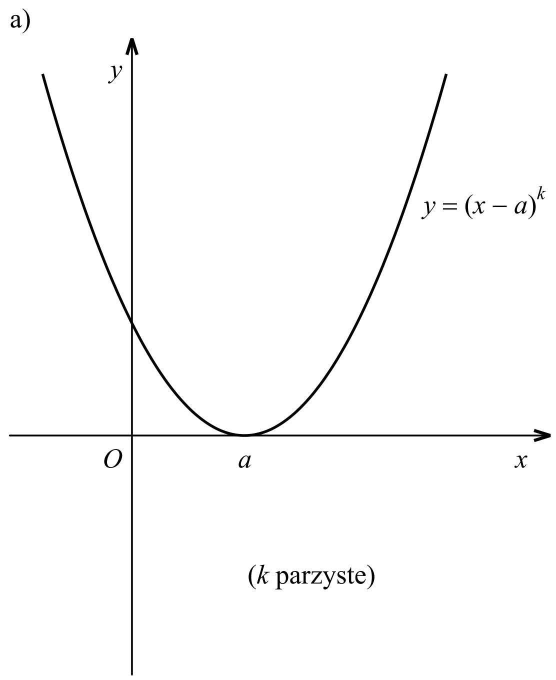
$$f^{(j)}(x) = k(k-1)\cdots(k-j+1)(x-a)^{k-j} \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, k-1, \quad f^{(k)}(x) = k!,$$

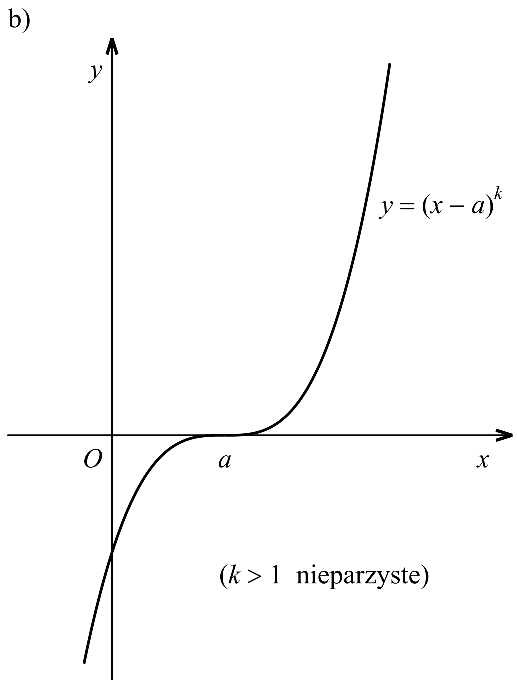
zatem zgodnie z twierdzeniem 4

f ma minimum w punkcie a gdy k jest liczbą parzystą

oraz

f ma punkt przegięcia dla $x = a$ gdy k jest liczbą nieparzystą.

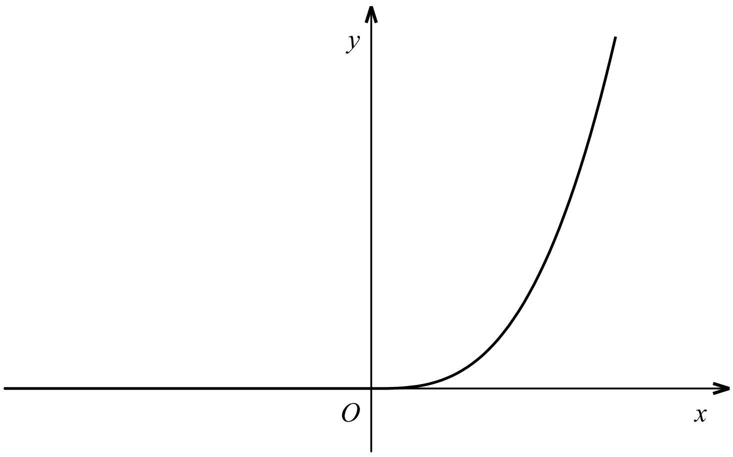




[rys. 39 a)] [rys. 39 b)]

Przykład 7. Niech (rys. 40)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x \leq 0 \end{cases}$$



[rys. 40]

wówczas

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

następnie

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

oraz

$$f'''(x) = \begin{cases} 6 & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

zaś $f'''(0)$ nie istnieje (druga pochodna f'' ma w punkcie $x = 0$ różne pochodne lewo- i prawostronną). Zatem f jest klasy C^2 w przedziale $(-\infty, \infty)$. Pomimo, że

$$f''(0) = 0$$

punkt $x = 0$ nie jest punktem przegięcia, gdyż

$$d(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x < 0, \end{cases}$$

nie jst więc spełniony żaden z warunków (19), (19') dla $a = 0$. Jak widać z rys. 40, dla $x > 0$ wykres leży nad styczną l_0 (jest nią oś x-ów), natomiast dla $x < 0$ wykres pokrywa się z tą styczną. W punkcie $x = 0$ mamy minimum (nie jest to minimum właściwe).

Przykład 8. Opierając się na twierdzeniu 4 zbadamy ekstrema i punkty przegięcia funkcji

$$f(x) = \sin x.$$

Mamy

$$f'(x) = \cos x, \ f''(x) = -\sin x, \ f'''(x) = -\cos x,$$

a więc warunek

$$f'(x) = 0$$

jest spełniony w punktach

$$x_k = (k + \frac{1}{2})\pi \quad (k \in Z),$$

natomiast

$$f''(x_k) = (-1)^{k-1} \neq 0.$$

Zatem funkcja sinus ma minimum w punktach

$$x_{2k+1} = (2k + \frac{3}{2})\pi$$

oraz maksimum w punktach

$$x_{2k} = (2k + \frac{1}{2})\pi.$$

Ponadto

$$f''(x) = 0$$

dla

$$x = \breve{x}_k = k\pi \quad (k \in Z)$$

przy czym
$$f'''(\breve{x}_k) \neq 0.$$
Wobec tego punkty $\breve{x}_k$ są punktami przegięcia funkcji sinus. Funkcja ta jest wypukła w każdym przedziale $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ i wklęsła w każdym przedziale $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ $\quad (k \in Z)$.

Przykład 9. Niech
$$f(x) = \mathrm{tg} x \qquad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}),$$
wówczas
$$f'(x) = (\cos x)^{-2},\ f''(x) = 2(\cos x)^{-3}\sin x,\ f'''(x) = 6(\cos x)^{-4}(\sin x)^2 + 2(\cos x)^{-2}.$$
Ponieważ $f'(x) \neq 0$ dla wszystkich x, funkcja tangens nie ma ekstremów. Warunek konieczny dla punktu przegięcia
$$f''(x) = 0$$
spełniony jest dla $x = 0$. Ponieważ
$$f'''(0) = 2 \neq 0$$
punkt $x = 0$ jest punktem przegięcia. W przedziale $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ funkcja tangens jest wklęsła zaś w przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$ jest funkcją wypukłą.

Aby zbadać w oparciu o twierdzenie 4 czy punkt a spełniający warunek (23) jest punktem przegięcia, musimy obliczyć pochodną rzędu co najmniej trzeciego, co może wymagać uciążliwych rachunków. Następujące twierdzenie pozwala sprowadzić zagadnienie do badania drugiej pochodnej w otoczeniu punktu a.

Twierdzenie 5. *Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale otwartym $\mathbb{P}$ i niech*
$$f''(a) = 0,$$
gdzie a jest punktem przedziału $\mathbb{P}$. Jeżeli istnieje takie $\delta > 0$, że
$$f''(x)\begin{cases} < 0 & \text{dla} \quad a-\delta < x < a, \\ > 0 & \text{dla} \quad a < x < a+\delta \end{cases}$$
lub
$$f''(x)\begin{cases} > 0 & \text{dla} \quad a-\delta < x < a, \\ < 0 & \text{dla} \quad a < x < a+\delta, \end{cases}$$
to a jest punktem przegięcia funkcji f.

DOWÓD. Korzystając z postaci (20) wzoru Taylora dla $n = 2$ stwierdzamy, że spełniony jest jeden z warunków (19), (19'), co kończy dowód. □

♡ ♡ ♡

5. Funkcje hiperboliczne. Przy pomocy funkcji wykładniczej e^x wprowadzimy dwie nowe funkcje: sinh (sinus hiperboliczny) i cosh (cosinus hiperboliczny), określone wzorami

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{24}$$

Ze wzorów tych wynika natychmiast ważna tożsamość

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{25}$$

Różniczkując wzory (24) stwierdzamy, że

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x \tag{26}$$

a stąd

$$(\sinh x)'' = \sinh x, \quad (\cosh x)'' = \cosh x. \tag{27}$$

Z pierwszego wzoru (26) wynika, że sinus hiperboliczny jest funkcją ściśle rosnącą, ponadto $\sinh 0 = 0$. Wobec tego

$$\sinh x \begin{cases} < 0 & \text{dla} \quad x < 0, \\ > 0 & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases} \tag{28}$$

a stąd i z pierwszego wzoru (26) wnioskujemy, że sinus hiperboliczny jest funkcją wklęsłą w przedziale $(-\infty, 0)$ i funkcją wypukłą w przedziale $(0, \infty)$. Dla $x = 0$ mamy

$$(\sinh)''(0) = \sinh 0 = 0, \quad (\sinh)'''(0) = \cosh 0 = 1,$$

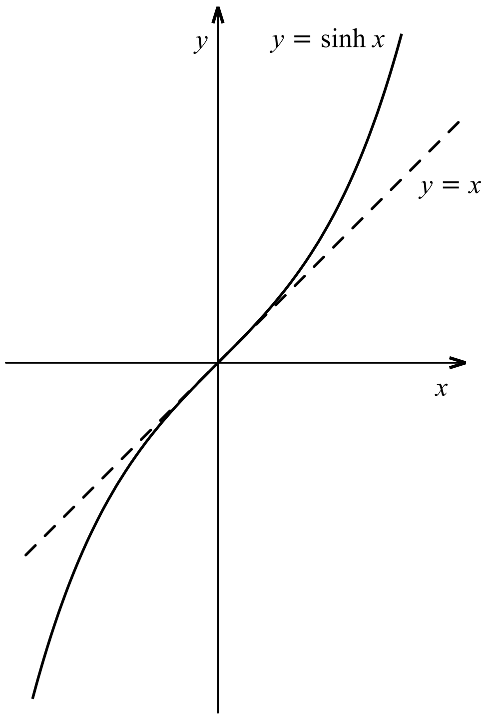
zaś równanie prostej l_0 stycznej do wykresu funkcji sinus hiperboliczny w punkcie $(0, 0)$ ma postać

$$y = x.$$

Zgodnie z twierdzeniem 4 punkt $x = 0$ jest punktem przegięcia funkcji sinus hiperboliczny, przy czym wykres leży pod styczną l_0 dla $x < 0$, zaś nad styczną l_0 dla $x > 0$. Z pierwszego wzoru (24) wynika ponadto, że

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \sinh x = \infty.$$

Wykres funkcji sinus hiperboliczny podany jest na rys. 41.



[rys. 41]

Funkcja cosinus hiperboliczny jest parzysta, wobec tego wykres jej jest symetryczny względem osi y-ów. Na mocy (26), (28) funkcja cosinus hiperboliczny jest ściśle malejąca w przedziale $(-\infty, 0]$ i ściśle rosnąca w przedziale $[0, \infty)$. W punkcie $x = 0$ ma minimum (właściwe), przy czym

$$\cosh 0 = 1.$$

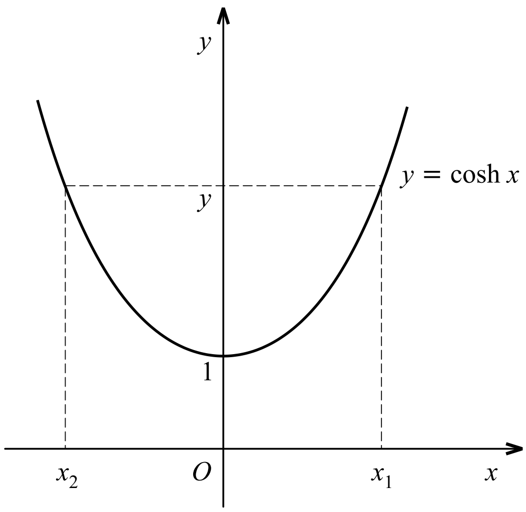
Ponieważ

$$\cosh x > 0$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, z drugiej rówmości (27) wynika, że cosinus hiperboliczny jest funkcją wypukłą w całym przedziale $(-\infty, \infty)$. Ponadto

$$\lim_{x \to -\infty} \cosh x = \lim_{x \to \infty} \cosh x = \infty.$$

Wykres funkcji cosinus hiperboliczny podajemy na rys. 42.



[rys. 42]

Funkcja sinus hiperboliczny jest ściśle rosnąca w przedziale $(-\infty, \infty)$, posiada zatem funkcję odwrotną którą oznaczamy arsinh. Aby ją wyznaczyć rozwiążemy względem x równanie

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Podstawienie

$$z = e^x \tag{29}$$

doprowadza do równania kwadratowego

$$z^2 - 2yz - 1 = 0,$$

które ma dwa rozwiązania

$$z_1 = y + \sqrt{1+y^2}, \quad z_2 = y - \sqrt{1+y^2}.$$

Ponieważ

$$\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = |y|,$$

więc

$$z_1 > y + |y| \geq 0, \quad z_2 < y - |y| \leq 0 \quad (y \in \mathbb{R}),$$

zatem rozwiązanie zagadnienia dostajemy przyjmując

$$e^x = z_1$$

co daje

$$x = \log(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Funkcja arsinh ma zatem postać

$$\operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{30}$$

Funkcja cosinus hiperboliczny jest ściśle monotoniczna w każdym z przedziałów $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$, w każdym z tych przedziałów posiada więc funkcję odwrotną określoną dla $y \geq 1$. Znajdziemy ją rozwiązując względem x równanie

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \tag{31}$$

które po podstawieniu (29) przechodzi w równanie kwadratowe

$$z^2 - 2yz + 1 = 0.$$

Ostatnie równanie ma dwa rozwiązania

$$z_1 = y + \sqrt{y^2 - 1}, \quad z_2 = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad (y \geq 1),$$

przy czym zachodzi związek

$$z_1 z_2 = 1. \tag{32}$$

Ponieważ

$$z_1 \geq y \geq 1$$

więc na mocy (32) mamy

$$0 < z_2 = \frac{1}{z_1} \leq 1$$

i przyjmując

$$e^{x_1} = z_1, \quad e^{x_2} = z_2$$

dostajemy dla $y \geq 1$ dwa rozwiązania równania (31)

$$x_1 = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) \geq 0 \tag{33}$$

oraz

$$x_2 = \log(y - \sqrt{y^2 - 1}) \leq 0, \tag{34}$$

przy czym

$$x_2 = -x_1$$

(por. rys. 42). Wzory (33) i (34) określają funkcję odwrotną do funkcji cosinus hiperboliczny odpowiednio w przedziale $[0, \infty)$ i $(-\infty, 0]$. Przez arcosh rozumiemy funkcję odwrotną w przedziale $[0, \infty)$. Mamy zatem

$$\operatorname{arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1). \tag{35}$$

Znajdziemy jeszcze pochodne funkcji odwrotnych do funkcji hiperbolicznych. Podstawiając

$$u = \sqrt{x^2+1}$$

mamy

(36)
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{arsinh} x) = \frac{1+\frac{du}{dx}}{x+\sqrt{x^2+1}}.$$

Ponieważ

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

mnożąc po prawej stronie (36) licznik i mianownik przez $\sqrt{x^2+1}$ dostajemy po uproszczeniu

(37)
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{arsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Podobny rachunek daje

(38)
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{arcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x>1).$$

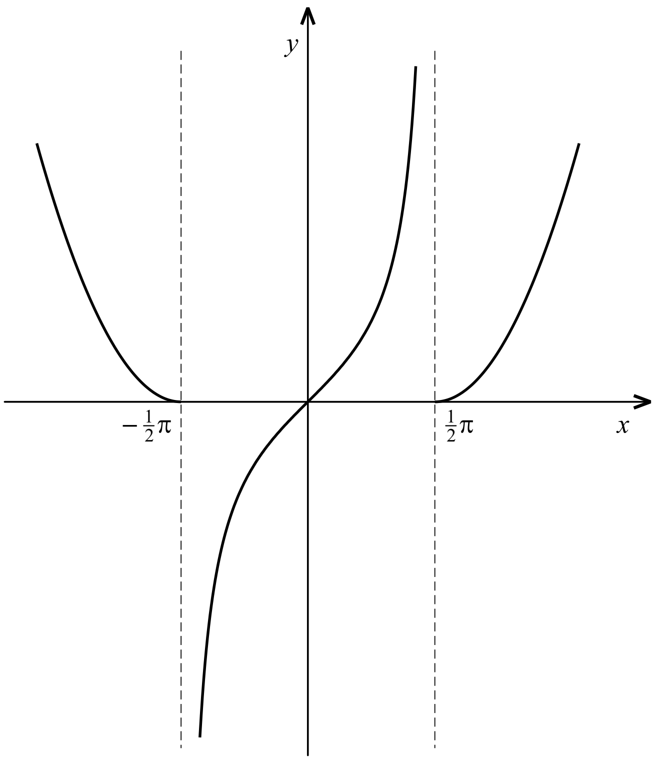
Wzory (37), (38) są przydatne w rachunku całkowym.

♡ ♡ ♡

6. Asymptoty wykresu funkcji. Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$. Mówimy, że prosta $x = a$ jest *asymptotą pionową wykresu funkcji* f, jeżeli przynajmniej jedna z granic jednostronnych funkcji f w punkcie a jest granicą niewłaściwą (tzn. ∞ lub $-\infty$).

Przykład 10. Niech

$$f(x) = \begin{cases} (x+\frac{\pi}{2})^2 & \text{dla} \quad x \le -\frac{\pi}{2}, \\ \mathrm{tg} x & \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ (x-\frac{\pi}{2})^2 & \text{dla} \quad x \ge \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$



[rys. 43]

wówczas

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \infty,$$

zatem proste $x = -\frac{\pi}{2}$ oraz $x = \frac{\pi}{2}$ są asymptotami pionowymi wykresu funkcji f (rys. 43).

Oprócz asymptot pionowych rozważamy również asymptoty skośne. Niech l będzie prostą o równaniu

$$y(x) = Ax + B$$

i niech

$$s(x) = f(x) - y(x)$$

(zauważmy, że $|s(x)|$ oznacza odległość między prostą l a wykresem funkcji f mierzoną w kierunku osi y-ów). Mówimy, że l jest *asymptotą skośną wykresu funkcji f przy $x \to \infty$*, jeżeli

(39) $$\lim_{x \to \infty} s(x) = 0$$

(oczywiście zakładamy, że funkcja f jest określona przynajmniej dla dostatecznie dużych x). Z podanej definicji łatwo wyprowadzić wzory pozwalające wyznaczyć współczynniki A, B w równaniu asymptoty. Z warunku (39) wynika, że również

$$\lim_{x \to \infty} \frac{s(x)}{x} = 0$$

a to oznacza, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = A. \tag{40}$$

Z (39) otrzymujemy teraz

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax) = B. \tag{41}$$

Na odwrót, jeżeli współczynniki A, B są określone wzorami (40), (41), to z (41) wynika, że prosta l jest asymptotą skośną przy $x \to \infty$.

Uwaga 1. Współczynnik A można również obliczać ze wzoru

$$A = \lim_{x\to\infty} f'(x), \tag{42}$$

o ile funkcja f jest różniczkowalna dla dostatecznie dużych x i istnieje granica po prawej stronie (por. zadanie 41 §4).

Uwaga 2. Jeżeli

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = B,$$

to zgodnie z (40)

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

zatem prosta

$$y = B$$

jest asymptotą skośną wykresu funkcji f przy $x \to \infty$.

W zupełnie podobny sposób możemy wprowadzić asymptoty przy $x \to -\infty$. Zakładając, że f jest określona dla $x < -M$ (gdzie M jest odpowiednio dobraną liczbą dodatnią), mówimy, że l jest *asymptotą skośną wykresu funkcji f przy $x \to -\infty$*, jeżeli

$$\lim_{x\to-\infty} s(x) = 0. \tag{39'}$$

Rozumując podobnie jak poprzednio otrzymujemy wzory na współczynniki A, B w postaci

$$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{40'}$$

oraz

$$B = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - Ax). \tag{41'}$$

Uwagi 1, 2 pozostają słuszne dla asymptot skośnych przy $x \to -\infty$ (oczywiście w podanych wzorach należy rozważać granicę przy $x \to -\infty$). W dalszym ciągu asymptoty skośne przy

$x \to \infty$ względnie przy $x \to -\infty$ oraz asymptoty pionowe będziemy nazywali po prostu *asymptotami.*

Przykład 11. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x}\sin x^2 \quad (x > 0).$$

Zbadamy asymptoty wykresów obu funkcji przy $x \to \infty$. Mamy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,$$

zatem prosta $y = 0$ jest asymptotą obu wykresów. Zauważmy, że w przypadku funkcji f współczynnik A można obliczyć również ze wzoru (42), gdyż

$$f'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

zatem

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$

Natomiast

$$g'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2},$$

wobec tego

$$\lim_{x\to\infty} g'(x)$$

nie istnieje (por. Przykład 4 §2) i wzór (42) nie może być stosowany.

Przykład 12. Znajdziemy asymptoty wykresu funkcji

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

Mamy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1$$

oraz (po przekształceniu)

$$f(x) - x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x},$$

skąd

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0.$$

Zatem prosta

$$y = x$$

jest asymptotą wykresu przy $x \to \infty$. Podobnie

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = -1$$

oraz

$$f(x) + x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x},$$

skąd

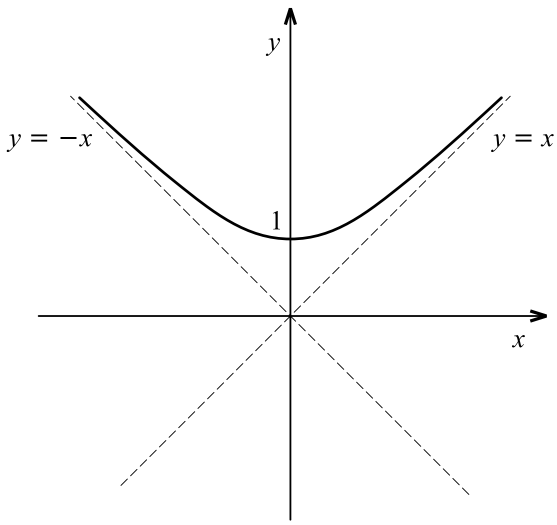
$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x) = 0.$$

Zatem prosta

$$y = -x$$

jest asymptotą wykresu przy $x \to -\infty$. Zauważmy, że ten ostatni wynik można było przewidzieć bez rachunku. Funkcja f jest bowiem parzysta, zatem wykres jej jest symetryczny względem osi y-ów. Znając wykres dla $x > 0$ i asymptotę przy $x \to \infty$ znajdujemy pozostałą część wykresu (a więc i jego asymptotę przy $x \to -\infty$) przez odbicie w osi y-ów. Wykres funkcji f (rys. 44) stanowi górną gałąź hiperboli o równaniu

$$y^2 - x^2 = 1.$$



[rys. 44]

7. Badanie wykresu funkcji. Badanie funkcji celem sporządzenia jej wykresu przeprowadzamy według następującego planu:

1^0 określenie dziedziny funkcji;

2^0 monotoniczność funkcji, ekstrema;

3^0 wypukłość funkcji i punkty przegięcia;

4^0 granica funkcji w punktach końcowych przedziałów, w których jest określona;

5^0 asymptoty wykresu;

W niektórych przypadkach badamy jeszcze

6^0 punkty przecięcia wykresu z osiami

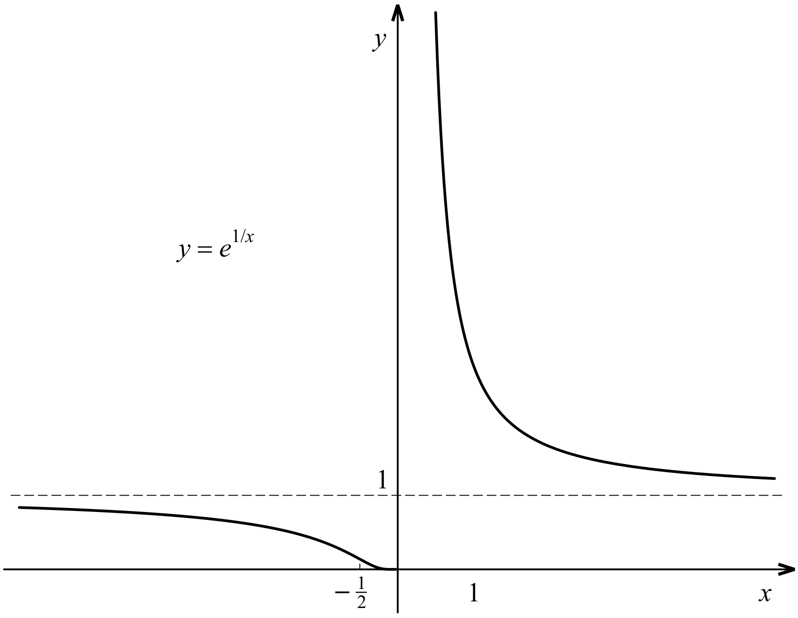
oraz

7^0 kierunek stycznej do wykresu w pewnych szczególnych punktach np. punktach przecięcia wykresu z osiami, punktach przegięcia, punktach końcowych przedziałów w których funkcja jest określona.

Wyjaśnimy ten schemat na kilku przykładach.

Przykład 13. Niech

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$



[rys. 45]

Funkcja f jest określona dla $x \neq 0$, zatem dziedzina jej jest sumą dwóch przedziałów $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Ponieważ

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0,$$

funkcja jest ściśle malejąca w każdym z tych przedziałów. Różniczkując ponownie otrzymujemy

$$f''(x) = (\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}) e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1),$$

skąd

$$f''(x) = \begin{cases} < 0 \quad \text{dla} \quad x < -\frac{1}{2}, \\ 0 \quad \text{dla} \quad x = -\frac{1}{2}, \\ > 0 \quad \text{dla} \quad x > -\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{43}$$

Na mocy twierdzeń 3, 5 punkt $x = -\frac{1}{2}$ jest jedynym punktem przegięcia. Oznaczając przez l styczną do wykresu w punkcie $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ widzimy ze wzoru (18), że dla $x < -\frac{1}{2}$ wykres leży pod styczną l, dla $-\frac{1}{2} < x < 0$ wykres leży nad styczną l.

Ponadto z (43) wynika, że funkcja f jest wklęsła w przedziale $(-\infty, -\frac{1}{2})$ oraz wypukła w każdym z przedziałów $(-\frac{1}{2}, 0)$ i $(0, \infty)$.
Z definicji funkcji f otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = \infty,$$

zatem prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową wykresu. Podstawiając $t = -\frac{1}{x}$ i stosując regułę de l'Hospitala (por. Przykłady 32 - 34 §4) stwierdzamy, że

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = -\lim_{t\to\infty} t^2 e^{-t} = 0,$$

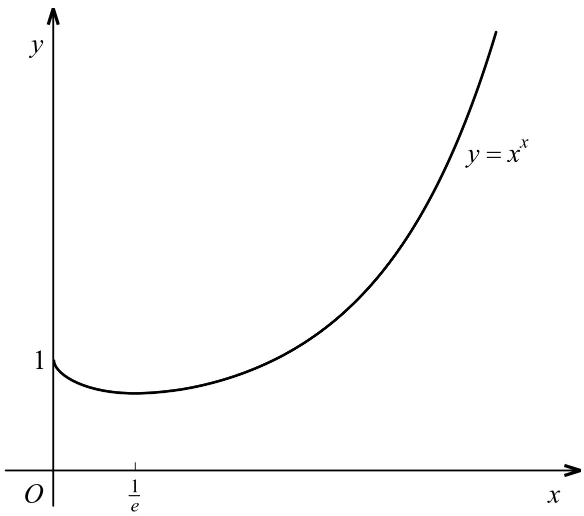
co oznacza, że wykres w przedziale $(-\infty, 0)$ osiąga początek układu stycznie do osi x-ów. Mamy następnie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

a więc prosta $y = 1$ jest asymptotą wykresu przy $x \to \infty$ oraz przy $x \to -\infty$. Wykres funkcji f podany jest na rys. 45.

Przykład 14. Zbadamy funkcję

$$f(x) = x^x \quad (x > 0).$$



[rys. 46]

Dziedziną funkcji jest przedział $(0, \infty)$. W celu obliczenia pochodnej możemy zastosować pochodną logarytmiczną (por. zadanie 11 i wzór (95) §4) lub przedstawić funkcję w postaci

$$f(x) = e^{x \log x} \tag{44}$$

(podobnie, jak w Przykładzie 12 §4). Różniczkując otrzymujemy

$$f'(x) = x^x(\log x + 1) \tag{45}$$

a stąd

$$f''(x) = f'(x)(\log x + 1) + \frac{1}{x}f(x) = x^x(\log x + 1)^2 + x^{x-1}.$$

Z własności potęgi wynika, że

$$f''(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x > 0, \tag{46}$$

zatem funkcja f nie ma punktów przegięcia i jest wypukła w przedziale $(0, \infty)$. Dla zbadania ekstremów zauważmy, że równanie

$$f'(x) = 0$$

jest równoważne równaniu

$$\log x = -1,$$

którego jedynym rozwiązaniem jest $x = \frac{1}{e}$. Ponieważ

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{dla} \quad 0 < x < \frac{1}{e}, \\ > 0 & \text{dla} \quad x > \frac{1}{e}, \end{cases}$$

funkcja f jest ściśle malejąca w przedziale $(0, \frac{1}{e})$ oraz ściśle rosnąca w przedziale $(\frac{1}{e}, \infty)$ zaś w punkcie $x = \frac{1}{e}$ osiąga swój kres dolny (czyli minimum absolutne w przedziale $(0, \infty)$ - por. Uwaga §3 punkt 6), przy czym

$$\inf_{(0,\infty)} f = e^{-\frac{1}{e}}.$$

Z przedstawienia (44) widać, że (por. wzór (86) §4)

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = e^0 = 1, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty. \tag{47}$$

Ponadto

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} e^{(x-1)\log x} = \infty,$$

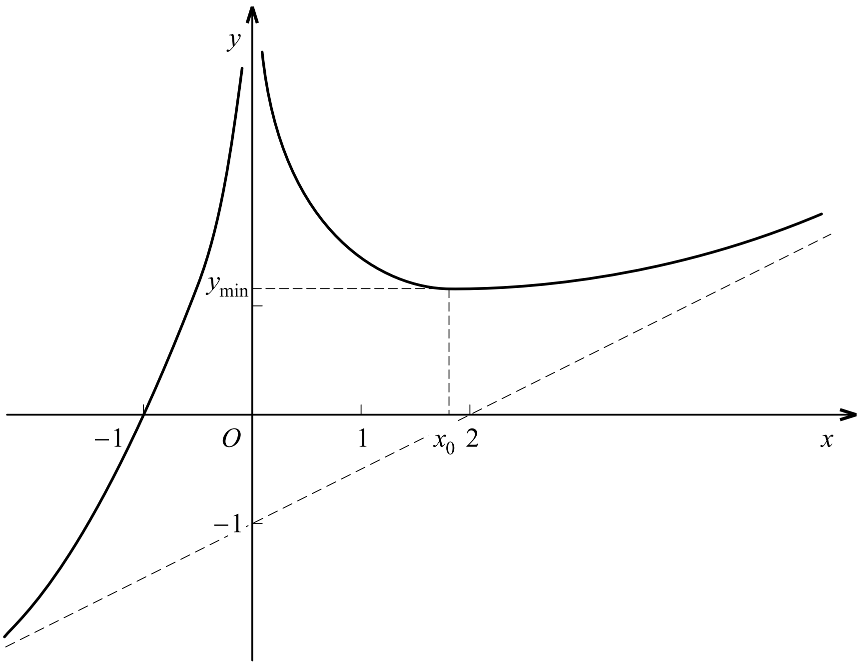
wobec tego wykres nie ma asymptot. Z (45), (47) wynika, że

$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = -\infty,$$

zatem przy $x \to 0+$ wykres dochodzi do osi y-ów stycznie do niej. Wykres funkcji f podany jest na rys. 46.

Przykład 15. Zbadajmy funkcję

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2}.$$



[rys. 47]

Funkcja f jest określona dla $x \neq 0$, jej dziedzina jest zatem sumą dwóch przedziałów $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Wykonując dzielenie możemy funkcję f przedstawić w postaci

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{2x^2} \tag{48}$$

skąd przez różniczkowanie dostajemy

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{x^3} = \frac{x^3 - 6}{2x^3}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{9}{x^4}.$$

Jedynym punktem stacjonarnym jest $x_0 = \sqrt[3]{6}$. Ponieważ

$$f''(x) > 0 \tag{49}$$

dla wszystkich $x \neq 0$, a więc i dla $x = x_0$, na mocy twierdzenia 4 funkcja f ma minimum w punkcie x_0. Ponieważ

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla} \quad x < 0 \quad \text{oraz dla} \quad x > x_0, \\ < 0 & \text{dla} \quad 0 < x < x_0 \end{cases}$$

funkcja f jest ściśle rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i (x_0, ∞) i ściśle malejąca w przedziale $(0, x_0)$. Oznaczając przez y_{min} najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $(0, \infty)$ (jest to kres dolny funkcji f w tym przedziale) mamy

$$y_{min} = f(x_0) = \frac{9 - 2\sqrt[3]{36}}{2\sqrt[3]{36}}.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$y_{min} > 0.$$

Istotnie, wyciągając pierwiastek trzeciego stopnia z obu stron nierówności $27 > 16$ dostajemy $3 > 2\sqrt[3]{2}$, skąd

$$9 > 6\sqrt[3]{2},$$

zaś z drugiej strony

$$2\sqrt[3]{36} = 2\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} < 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = 6\sqrt[3]{2}.$$

Zestawienie otrzymanych nierówności daje $y_{min} > 0$, skąd wynika, że w przedziale $(0, \infty)$ funkcja f przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie. Natomiast w przedziale $(-\infty, 0)$ funkcja f przyjmuje wartości różnych znaków, gdyż

$$f(-1) = 0$$

a w przedziale tym funkcja f jest ściśle rosnąca. Z nierówności (49) wynika, że funkcja f jest wypukła w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$. Z przedstawienia (48) widać, że

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty,$$

zatem oś y-ów jest asymptotą pionową wykresu. Aby znaleźć asymptoty skośne zauważmy, że

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

oraz

$$B = \lim_{x\to\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = -1.$$

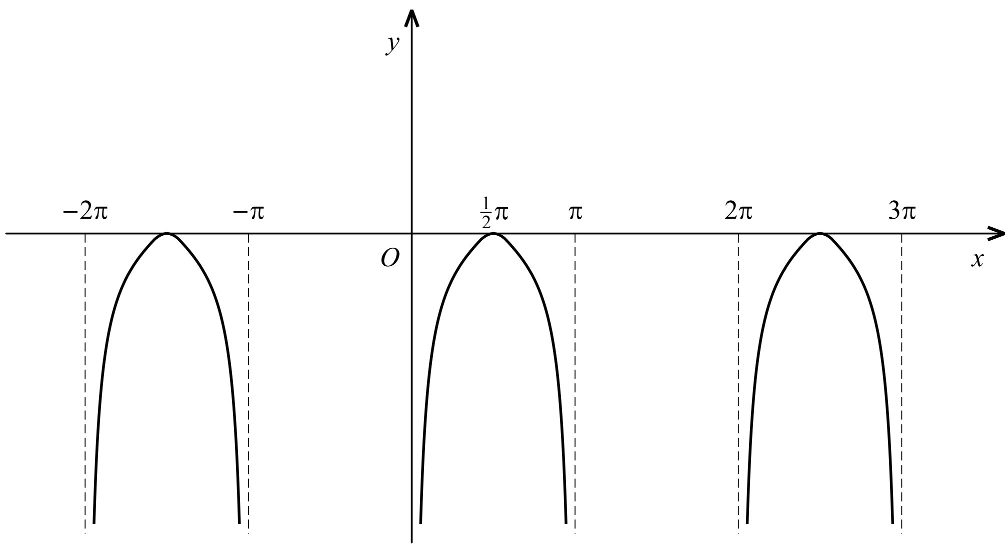
Na mocy wzorów (40), (41), (40'), (41') stwierdzamy, że prosta

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

jest asymptotą wykresu przy $x \to \infty$ oraz przy $x \to -\infty$. Wykres funkcji f przedstawiony jest na rys. 47.

Przykład 16. Niech $f(x) = \log \sin x$.

[rys. 48]



Funkcja f jest określona w każdym przedziale w którym $\sin x > 0$ tzn. w każdym przedziale $\mathbb{P}_k = (2k\pi, (2k+1)\pi)$ gdzie k jest liczbą całkowitą. Ponieważ jest to funkcja okresowa o okresie 2π, możemy ją rozważać tylko w jednym z przedziałów np. $\mathbb{P}_0$ czyli dla $0 < x < \pi$. Mamy

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x},$$

a stąd

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ = 0 & \text{dla} \quad x = \frac{\pi}{2}, \\ < 0 & \text{dla} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Wobec tego funkcja f jest ściśle rosnąca w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ i ściśle malejąca w przedziale $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ a w punkcie $x = \frac{\pi}{2}$ osiąga maksimum, przy czym

$$y_{max} = f(\frac{\pi}{2}) = 0$$

(zauważmy, że y_{max} jest kresem górnym funkcji f w przedziale $\mathbb{P}_0$). Ponieważ

$$f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0,$$

funkcja f jest wklęsła w przedziale $\mathbb{P}_0$. Ponadto

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to \pi-} f(x) = -\infty,$$

zatem proste $x = 0$ oraz $x = \pi$ stanowią asymptoty pionowe wykresu. Wykres funkcji f podajemy na rys. 48.

♡ ♡ ♡

8*. Przybliżone rozwiązywanie równań - metoda siecznych (regula falsi). Równanie, które chcemy rozwiązać, ma postać

$$f(x) = 0. \tag{50}$$

Jeżeli f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i na końcach tego przedziału przyjmuje wartości różnych znaków, to z twierdzenia Darboux (twierdzenie 13 §3) wynika, że w przedziale otwartym (a, b) istnieje rozwiązanie α równania (50). Jeżeli ponadto funkcja f jest ściśle monotoniczna w $[a, b]$, to rozwiązanie to jest jedyne. Zakładając, że f jest dwukrotnie różniczkowalna i wypukła względnie wklęsła w przedziale $[a, b]$ skonstruujemy ciąg zbieżny do rozwiązania równania (50). Dla ustalenia uwagi załóżmy, że

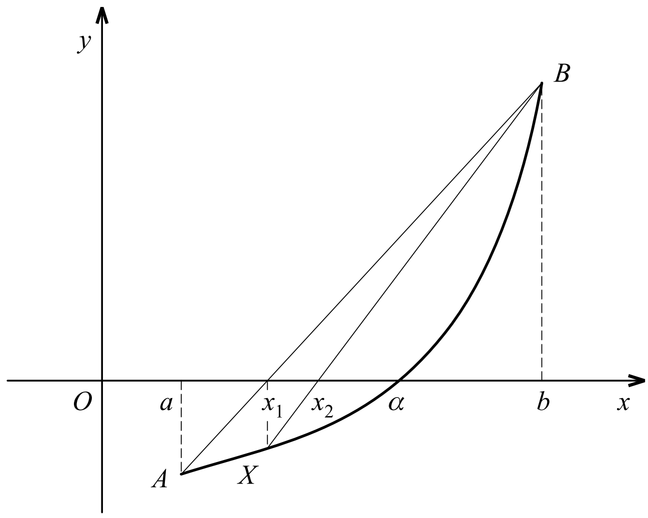
(i) $f(a) < 0 < f(b)$,
(ii) f jest ściśle rosnąca w $[a, b]$,
(iii) f jest dwukrotnie różniczkowalna i wypukła w $[a, b]$.

Sieczna wykresu funkcji f przechodząca przez punkty $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$ ma równanie

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

i przecina oś x-ów w punkcie

$$x_1 = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}.$$



[rys.49]

Ponieważ f jest wypukła w $[a, b]$, jej wykres leży pod cięciwą AB (por. punkt 3 i rys. 49), zatem $f(x_1) \leq 0$. Jeżeli $f(x_1) = 0$, to $x_1 = \alpha$ jest szukanym rozwiązaniem. Zakładając, że

$$f(x_1) < 0$$

mamy

$$a < x_1 < \alpha < b$$

i możemy powtórzyć przeprowadzoną konstrukcję zastępując przedział $[a, b]$ przez przedział $[x_1, b]$. Prowadząc sieczną przez punkty $X = (x_1, f(x_1)), B = (b, f(b))$ znajdujemy jej punkt przecięcia z osią x-ów (rys. 49)

$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1)f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

przy czym

$$a < x_1 < x_2 \leq \alpha < b.$$

Kontynuując opisane postępowanie dostajemy ciąg punktów określony wzorem rekurencyjnym

(51) $$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

przy czym

$$a < x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \alpha < b. \tag{52}$$

Zauważmy, że jeżeli dla pewnego n_0 mamy $f(x_{n_0}) = 0$, to oczywiście $x_{n_0} = \alpha$ i ze wzoru (51) wynika, że $x_n = \alpha$ dla $n \ge n_0$. Rozwiązanie równania (50) otrzymujemy wówczas w postaci dokładnej po n_0 krokach. Jeżeli taka sytacja nie zachodzi, to z nierówności (52) wynika, że ciąg nieskończony $\{x_n\}$ jest monotoniczny i ograniczony a więc zbieżny zgodnie z twierdzeniem 5 rozdz. II §2. Oznaczając

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g$$

mamy na mocy (52)

$$a < g \le \alpha < b. \tag{53}$$

Po przejściu do granicy w (51) i wykorzystaniu ciągłości funkcji f dostajemy

$$\frac{(b-g)f(g)}{f(b)-f(a)} = 0$$

co po uwzględnieniu (53) daje $f(g) = 0$. Zatem

$$g = \alpha$$

jest szukanym rozwiązaniem równania (50), a wyrazy ciągu $\{x_n\}$ dają jego przybliżenie (z niedomiarem). Aby oszacować błąd, jaki popełniamy zastępując rozwiązanie α przez jego przybliżenie załóżmy dodatkowo, że

(iv) $f'(x) > 0$ dla $x \in [a,b]$.

Z założenia dwukrotnej różniczkowalności funkcji f wynika, że f' jest ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$, wobec tego na mocy twierdzenia Weierstrassa (twierdzenie 12 §3) osiąga w tym przedziale swój kres dolny m. Z uwagi na (iv) mamy

$$m = \inf_{[a,b]} f' > 0.$$

Zakładając, że $x_n \ne \alpha$ (a więc $x_n < \alpha$) i stosując twierdzenie o wartości średniej dostajemy

$$f(\alpha) - f(x_n) = (\alpha - x_n) f'(c),$$

gdzie $c \in (x_n, \alpha)$, skąd

$$|x_n - \alpha| \le \frac{|f(x_n)|}{f'(c)},$$

a zatem

$$|x_n - \alpha| \le \frac{|f(x_n)|}{m}. \tag{54}$$

Nierówność (54) pozwala sprowadzić oszacowanie błędu znalezionego przybliżenia do wyliczenia wartości $f(x_n)$. Zauważmy, że wartość $f(x_n)$ potrzebna jest do znalezienia następnego przybliżenia x_{n+1}. Znajdując ją możemy zdecydować w oparciu o (54), czy już uzyskaliśmy przybliżenie rozwiązania α z wystarczającą dokładnością czy też należy kontynuować obliczenia.

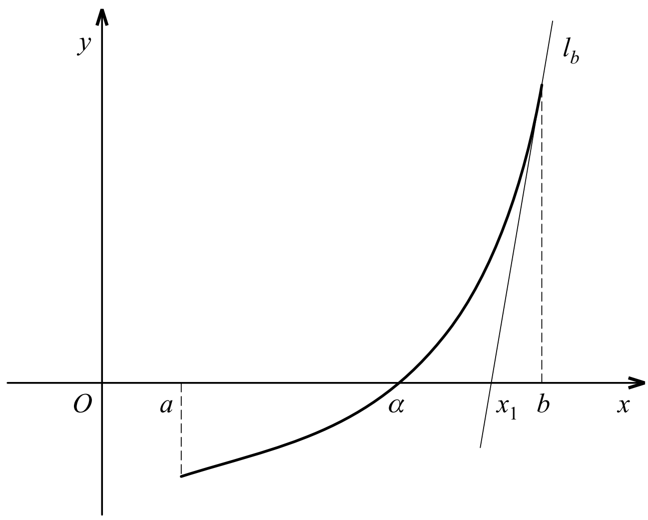
9*. Przybliżone rozwiązywanie równań - metoda stycznych (Newtona). Podamy jeszcze inną metodę przybliżonego rozwiązywania równania (50), w którym funkcja f oprócz założeń podanych w punkcie 8 spełnia jeszcze założenie dodatkowe

$$f'(x) \neq 0 \quad (x \in [a, b]).$$

Dla ustalenia uwagi założymy, że spełnione są warunki (i) - (iv) punktu 8.

Styczna l_b do wykresu w punkcie $(b, f(b))$ ma równanie

$$y = f(b) + f'(b)(x - b)$$



[rys.50]

i przecina oś x-ów (rys. 50) w punkcie

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Z założenia wypukłości funkcji f wynika, że jej wykres leży nad styczną l_b, zatem $f(x_1) \geq 0$. Jeżeli $f(x_1) = 0$, to $x_1 = \alpha$ jest szukanym rozwiązaniem równania (50). Zakładając, że

$$f(x_1) > 0$$

mamy

$$a < \alpha < x_1 < b$$

i możemy powtórzyć opisaną konstrukcję zastępując punkt b przez punkt x_1. Styczna l_{x_1} w punkcie $(x_1, f(x_1))$ przecina oś x-ów w punkcie

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \tag{55}$$

przy czym z założenia wypukłości funkcji f wynika, że $f(x_2) \geq 0$, a stąd i z (55) mamy

$$a < \alpha \leq x_2 < x_1 < b.$$

Kontynuując opisane postępowanie otrzymujemy ciąg punktów określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{56}$$

przy czym

$$a < \alpha \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \cdots \leq x_2 \leq x_1 < b. \tag{57}$$

Podobnie jak w metodzie siecznych, jeżeli dla pewnego n_0 mamy $f(x_{n_0}) = 0$, to $x_{n_0} = \alpha$ jest szukanym rozwiązaniem i ze wzoru (56) wynika, że wówczas $x_n = \alpha$ dla wszystkich $n \geq n_0$. Wówczas po skończonej ilości n_0 kroków dostajemy rozwiązanie dokładne równania (50). Jeżeli taka sytuacja nie zachodzi, to z (57) wynika, że ciąg nieskończony $\{x_n\}$ jest monotoniczny i ograniczony a więc zbieżny zgodnie z twierdzeniem 5 rozdz. II §2. Oznaczmy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g.$$

Przechodząc do granicy w (56) i korzystając z ciągłości funkcji f i jej pochodnej dostajemy

$$\frac{f(g)}{f'(g)} = 0$$

skąd wynika, że $f(g) = 0$. Zatem

$$g = \alpha$$

jest szukanym rozwiązaniem równania (50), a wyrazy ciągu (56) dają jego przybliżenie (z nadmiarem).

Aby oszacować błąd podanej metody załóżmy dodatkowo, że

(v) $f \in C^2([a,b])$, wówczas, zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa (twierdzenie 12 §3), druga pochodna f'' jest ograniczona w przedziale $[a,b]$. Zakładając, że $x_n \neq \alpha$ i stosując wzór Taylora do przedziału $[\alpha, x_n]$ dostajemy

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}f''(c)(\alpha - x_n)^2$$

gdzie $c \in (\alpha, x_n)$, a stąd

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha - x_n + \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2. \tag{58}$$

Ze wzoru rekurencyjnego (56) wynika

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

co po wykorzystaniu (58) daje

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c)}{f'(x_n)}.$$

Oznaczając

$$M = \sup_{[a,b]} f''(x), \quad m = \inf_{[a,b]} f'(x)$$

dostajemy oszacowanie błędu w postaci

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}(x_n - \alpha)^2 \, \frac{M}{m}. \tag{59}$$

Z otrzymanego oszacowania widać, że w metodzie Newtona błąd $(n+1)$-ego przybliżenia jest proporcjonalny do kwadratu błędu n-tego przybliżenia, co zapewnia szybką zbieżność metody.

Przykład 17. Rozważmy równanie

$$x^2 = a \qquad (a > 1).$$

Jak wiemy (rozdz.I §2 punkt 7), ma ono w zbiorze liczb dodatnich dokładnie jedno rozwiązanie $\sqrt{a}$, którego przybliżoną wartość możemy obliczyć stosując metody opisane w punktach 8, 9 do funkcji

$$f(x) = x^2 - a$$

w przedziale $[1, a]$. Mamy

$$f(1) = 1 - a < 0 < f(a) = a^2 - a$$

oraz

$$f'(x) = 2x, \qquad f''(x) = 2,$$

zatem założenia (i) - (v) są spełnione. Stosując *metodę siecznych* otrzymujemy ze wzoru (51)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(a - x_n)(x_n^2 - a)}{a^2 - x_n^2},$$

co po prostych przekształceniach daje

$$x_{n+1} = a\frac{x_n + 1}{x_n + a}.$$

Wobec tego błąd przybliżenia x_{n+1} wynosi

$$0 < \alpha_{n+1} = \sqrt{a} - x_{n+1} = c_n \left(\sqrt{a} - x_n\right),$$

gdzie

$$c_n = \frac{a - \sqrt{a}}{x_n + a}.$$

Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do $\sqrt{a} \in (1, a)$, mamy $x_n > 1$ dla dużych n i stąd

$$0 < c_n < \frac{a - \sqrt{a}}{1 + a},$$

co daje

$$0 < \alpha_{n+1} < c\alpha_n,$$

gdzie

$$0 < c = \frac{a - \sqrt{a}}{1 + a} < 1,$$

zaś α_n oznacza błąd przybliżenia x_n.

Przechodząc do *metody Newtona* dostajemy z (56)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n},$$

czyli po przekształceniu prawej strony

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}.$$

Oznaczając przez β_n błąd przybliżenia x_n w metodzie Newtona otrzymujemy

$$0 < \beta_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n},$$

co daje dla dużych n

$$0 < \beta_{n+1} < \frac{1}{2}\beta_n^2$$

(por. wzór (59)). Z otrzymanych oszacowań widać, że dla dużych n ciąg $\{\alpha_n\}$ zachowuje się jak ciąg geometryczny o ilorazie $c \in (0, 1)$, natomiast w ciągu $\{\beta_n\}$ każdy następny wyraz jest mniejszy od kwadratu poprzedniego. Oznacza to, że stosując metodę Newtona, przy przejściu od x_n do x_{n+1} otrzymujemy, dla dostatecznie dużych n, conajmniej podwojoną liczbę dokładnych miejsc po przecinku.

10*. Funkcje wypukłe. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że *funkcja f jest wypukła w przedziale* $\mathbb{P}$, jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{P}$ i dowolnych liczb nieujemnych λ_1, λ_2 spełniających warunek

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \tag{60}$$

zachodzi nierówność

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \tag{61}$$

Zauważmy, że przyjmując $x_1 \leq x_2$ oraz $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ mamy wobec (60)

$$x = \lambda_1(x_1 - x_2) + x_2 \leq x_2$$

oraz

$$x = x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) \geq x_1$$

zatem $x \in [x_1, x_2]$, a więc również $x \in \mathbb{P}$ i lewa strona nierówności (61) jest dobrze określona.

Od funkcji f nie żądamy żadnej regularności, może ona nie być różniczkowalna, wystarczy jedynie, by była określona w pewnym przedziale. W dalszym ciągu zobaczymy, że w klasie funkcji dwukrotnie różniczkowalnych rozważana obecnie definicja funkcji wypukłej jest równoważna tej, którą podaliśmy w punkcie 3.

Twierdzenie 6. *Funkcja f jest wypukła w przedziale $\mathbb{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego przedziału $[a, b] \subset \mathbb{P}$ (gdzie $a < b$) zachodzi nierówność*

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \tag{62}$$

dla $x \in [a, b]$.

DOWÓD. Połóżmy dla ustalonego $x \in [a, b]$

$$\lambda_1 = \frac{b-x}{b-a}, \quad \lambda_2 = \frac{x-a}{b-a}.$$

Obie liczby $\lambda_1,\ \lambda_2$ są nieujemne i spełniają warunek (60). Zakładając, że f jest wypukła i przyjmując $x_1 = a,\ x_2 = b$ stwierdzamy, że

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \frac{b-x}{b-a} a + \frac{x-a}{b-a} b = x$$

i wobec tego nierówność (62) wynika z (61).

Załóżmy teraz, że f spełnia warunek podany w twierdzeniu. Udowodnimy, że f jest wypukła w $\mathbb{P}$.

Dla $x_1 = x_2$ nierówność (61) jest oczywista (przyjmuje ona wtedy postać równości $f(x_1) = f(x_1)$.) Załóżmy wobec tego, że liczby x_1, x_2 są różne i niech będzie $x_1 < x_2$. Dla dowolnie obranych liczb nieujemnych λ_1, λ_2 spełniających (60) połóżmy

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2.$$

Jak już stwierdziliśmy na początku tego punktu, z warunku (60) wynika, że $x \in [x_1, x_2]$. Ponadto mamy, ponownie wykorzystując (60),

$$x = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2 = \lambda_1(x_1 - x_2) + x_2$$

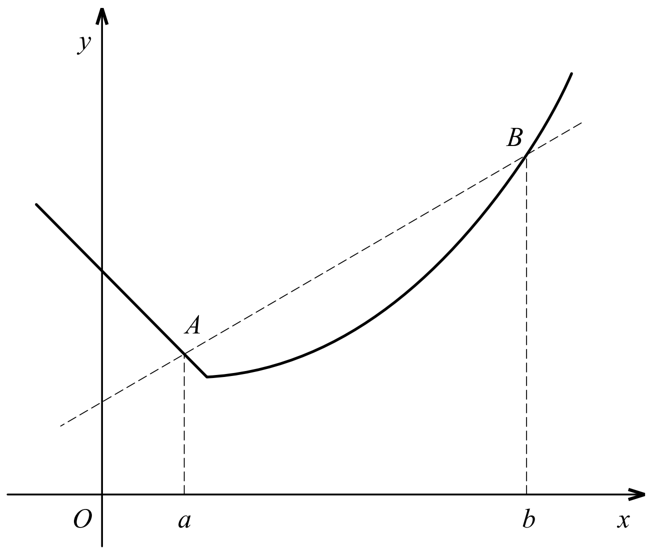
skąd

$$\lambda_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

a zatem

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Możemy teraz zastosować nierówność (62) przyjmując $a = x_1$, $b = x_2$, co daje (61). $\square$



[rys. 51]

Udowodnione twierdzenie ma prostą interpretację geometryczną. Równanie

$$y(x) = \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b)$$

określa prostą wyznaczoną przez punkty $A = (a, f(a)$ oraz $B = (b, f(b))$, zwaną *sieczną wykresu funkcji f*. Zbiór punktów $(x, y(x))$, gdzie $x \in [a, b]$ jest odcinkiem AB który nazywamy *cięciwą wykresu* (por. punkt 3). Zatem twierdzenie 6 można sformułować następująco (por. rys. 51)

Twierdzenie 6'. *Funkcja f jest wypukła w przedziale $\mathbb{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres leży pod każdą cięciwą wyznaczoną przez punkty $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, gdzie $a, b \in \mathbb{P}$, $a < b$.*

Przykład 18. Sprawdzimy, że funkcja

$$f(x) = |x|$$

jest wypukła w przedziale $\mathbb{P} = (-\infty, \infty)$. Jeżeli liczby a, b są tego samego znaku, to cięciwa AB pokrywa się z częścią wykresu dla $x \in [a, b]$, zatem w nierówności (62) mamy znak równości. Załóżmy wobec tego, że

$$a < 0 < b.$$

Równanie siecznej ma postać

$$y(x) = (-a)\frac{b-x}{b-a} + b\frac{x-a}{b-a}$$

zatem

$$y(x) - |x| = \begin{cases} \frac{2a(x-b)}{b-a} & \text{dla} \quad 0 \le x \le b, \\ \frac{2b(x-a)}{b-a} & \text{dla} \quad a \le x < 0. \end{cases} \tag{63}$$

Ponieważ obie liczby po prawej stronie (63) są nieujemne, nierówność (62) jest spełniona dla $x \in [a, b]$. Zgodnie z twierdzeniem 6 funkcja f jest wypukła. Warunek geometryczny sformułowany w twierdzeniu 6' wynika natychmiast z rysunku (rys. 22).

Twierdzenie 7. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale $\mathbb{P}$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest wypukła;*

(ii) *f' jest funkcją rosnącą;*

(iii) *dla dowolnych $x_0, x \in \mathbb{P}$ zachodzi nierówność*

$$f(x) \ge f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{64}$$

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód według schematu

$$\text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii).

Wprowadźmy funkcję

$$g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) \quad (x \in \mathbb{P}).$$

Funkcja g jest różniczkowalna w $\mathbb{P}$ i przy tym

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

Z założenia

$$g'(x)\begin{cases} > 0 & \text{dla} \quad x > x_0, \\ = 0 & \text{dla} \quad x = x_0, \\ < 0 & \text{dla} \quad x < x_0, \end{cases}$$

wobec tego funkcja g przyjmuje najmniejszą wartość w przedziale $\mathbb{P}$ w punkcie x_0. Ponieważ

$$g(x_0) = 0,$$

mamy

$$g(x) \geq 0$$

dla $x \in \mathbb{P}$, co jest równoważne z nierównością (64).

(iii)$\Rightarrow$(i).

Najpierw udowodnimy lemat dotyczący funkcji liniowych (jest on oczywisty geometrycznie - proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku).

Lemat 1. *Jeżeli $y(x)$, $z(x)$ są funkcjami liniowymi oraz dla pewnych a, b $(a < b)$ zachodzą nierówności*

(65) $$y(a) \geq z(a), \quad y(b) \geq z(b),$$

to

(66) $$y(x) \geq z(x)$$

dla dowolnego $x \in (a, b)$.

DOWÓD LEMATU. Każdy punkt $x \in (a, b)$ można przedstawić w postaci

$$x = ta + (1 - t)b,$$

gdzie $0 < t < 1$ (wystarczy w tym celu przyjąć $t = \frac{b-x}{b-a}$). Niech

$$y(x) = Ax + B, \quad z(x) = Cx + D,$$

wówczas

$$y(x) = t(Aa + B) + (1 - t)(Ab + B)$$

oraz

$$z(x) = t(Ca + D) + (1 - t)(Cb + D)$$

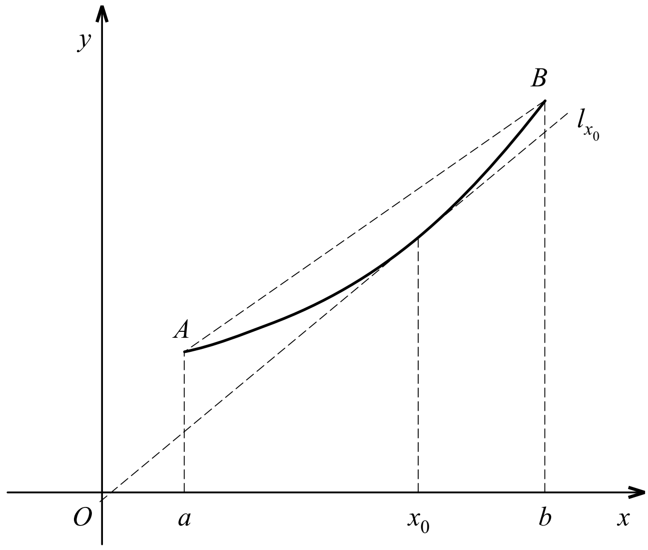
co można inaczej zapisać jako

(67) $$y(x) = ty(a) + (1 - t)y(b)$$

oraz

(68) $$z(x) = tz(a) + (1 - t)z(b).$$

Ponieważ liczby t, $1-t$ są dodatnie, z (67), (68) i nierówności (65) wynika (66), co kończy dowód lematu.



[rys. 52]

Kontynuując dowód twierdzenia obierzmy dowolnie przedział $[a,b] \subset \mathbb{P}$ $(a < b)$ oraz punkt $x_0 \in (a,b)$ i niech prosta l_{x_0} będzie styczną do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Założenie (iii) oznacza, że każdy punkt wykresu funkcji f leży nad prostą l_{x_0} - dotyczy to w szczególności punktów $A = (a, f(a))$ oraz $B = (b, f(b))$. Na mocy lematu 1 również każdy punkt cięciwy o końcach A, B leży nad prostą l_{x_0}, w szczególności punkt cięciwy o pierwszej współrzędnej x_0 leży nad punktem styczności $(x_0, f(x_0))$. Wobec dowolności $x_0 \in (a,b)$ oznacza to, że cała cięciwa o końcach A, B leży nad wykresem funkcji f w przedziale $[a,b]$. Przedział $[a,b] \subset \mathbb{P}$ był również obrany dowolnie, zatem zgodnie z twierdzeniem 6' funkcja f jest wypukła w przedziale $\mathbb{P}$.Przeprowadzone rozumowanie ilustruje rys. 52.

(i)$\Rightarrow$(ii).

Dowód zaczniemy od lematu.

Lemat 2. *Dla $t_1 < t < t_2$ i dowolnych y, y_1, y_2 nierówności*

(69)
$$y \leq \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} y_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} y_2$$

oraz

(70)
$$\frac{y - y_1}{t - t_1} \leq \frac{y_2 - y}{t_2 - t}$$

są równoważne.

DOWÓD LEMATU. Po wykonaniu mnożenia w licznikach po prawej stronie (69) oraz pomnożeniu obu stron nierówności przez mianownik $t_2 - t_1$ dostajemy

$$yt_2 - y_1t_2 + y_1t \leq yt_1 - y_2t_1 + y_2t.$$

Odejmując od obu stron ostatniej nierówności wyrażenie yt otrzymujemy

$$(y - y_1)(t_2 - t) \le (y_2 - y)(t - t_1)$$

skąd po podzieleniu przez dodatnie wyrażenie $(t_2 - t)(t - t_1)$ wynika (70). Jak łatwo zauważyć, przeprowadzony rachunek wykazuje, że i na odwrót z (70) wynika (69).

Wróćmy do dowodu twierdzenia. Wobec założonej wypukłości funkcji f i twierdzenia 6 nierówność (69) jest spełniona, jeżeli przyjmiemy

$$t_1 = a,\ t = x,\ t_2 = b, \qquad y_1 = f(a),\ y = f(x),\ y_2 = f(b).$$

Zgodnie z lematem 2 zachodzi wobec tego nierówność

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \tag{71}$$

dla dowolnych $a, b, x \in \mathbb{P}$ takich, że $a < x < b$. Ustalmy teraz dwa punkty $x_1, x_2 \in \mathbb{P}$ zakładając, że $x_1 < x_2$ i obierzmy $h > 0$ tak, by

$$x_1 + h < x_2 - h.$$

Z nierówności (71) dla

$$a = x_1, \quad x = x_1 + h, \quad b = x_2 - h$$

dostajemy

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \le \frac{f(x_2 - h) - f(x_1 + h)}{(x_2 - h) - (x_1 + h)} \tag{72}$$

zaś dla

$$a = x_1 + h, \quad x = x_2 - h, \quad b = x_2$$

mamy

$$\frac{f(x_2 - h) - f(x_1 + h)}{(x_2 - h) - (x_1 + h)} \le \frac{f(x_2) - f(x_2 - h)}{h}. \tag{73}$$

Z nierówności (72), (73) wynika, że

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \le \frac{f(x_2 - h) - f(x_2)}{-h},$$

co po przejściu do granicy przy $h \to 0$ daje

$$f'(x_1) \le f'(x_2).$$

Ponieważ punkty x_1, x_2 były obrane dowolnie, ostatnia nierówność oznacza, że pochodna f' jest funkcją rosnącą, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Jak już wspominaliśmy, równanie

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

określa styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Wobec tego możemy podać następujące sformułowanie geometryczne punktów (i), (iii) twierdzenia 7.

Twierdzenie 7'. *Funkcja f różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy jej wykres leży nad styczną poprowadzoną w dowolnym punkcie $(x_0, f(x_0))$, gdzie $x_0 \in \mathbb{P}$.*

Jeżeli f jest dwukrotnie różniczkowalna w $\mathbb{P}$, to z punktów (i), (ii) twierdzenia 7 wynika natychmiast

Twierdzenie 8. *Funkcja f dwukrotnie różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy $f''(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{P}$.*

Zatem podana w tym punkcie ogólna definicja funkcji wypukłej jest w klasie funkcji dwukrotnie różniczkowalnych równoważna definicji podanej w punkcie 3.

Twierdzenie 9. *Jeżeli funkcja f określona w przedziale $\mathbb{P}$ jest wypukła, to dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{P}$ i dowolnych liczb nieujemnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ spełniających warunek*

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \tag{74}$$

mamy $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in \mathbb{P}$ i zachodzi nierówność

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \tag{75}$$

Nierówność (75) nosi nazwę *nierówności Jensena.*

DOWÓD. Zastosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ z warunku (74) wynika $\lambda_1 = 1$ i nierówność (75) przyjmuje postać równości $f(x_1) = f(x_1)$, zaś dla $n = 2$ twierdzenie zawiera się w definicji funkcji wypukłej. Zakładając teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n = k \geq 2$ udowodnimy, że jest ono prawdziwe dla $n = k+1$. Rozważmy układ punktów $x_1, \dots, x_k, x_{k+1} \in \mathbb{P}$ i układ liczb nieujemnych $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ spełniających warunek

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k + \lambda_{k+1} = 1. \tag{76}$$

Należy udowodnić, że

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in \mathbb{P} \tag{77}$$

oraz że zachodzi nierówność

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}). \tag{78}$$

Jeżeli$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, to wobec (76) musi być $\lambda_{k+1} = 1$ i nierówność (78) przyjmuje postać równości $f(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$. W przeciwnym razie

$$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k > 0$$

i przyjmując $\lambda'_j = \frac{\lambda_j}{\lambda}$ $(j = 1, \dots, k)$ stwierdzamy, że liczby λ'_j spełniają warunek (74) z zastąpieniem n przez k. Na mocy założenia indukcyjnego mamy $\lambda'_1 x_1 + \cdots + \lambda'_k x_k \in \mathbb{P}$ przy czym zachodzi nierówność

$$f(\lambda'_1 x_1 + \cdots + \lambda'_k x_k) \leq \lambda'_1 f(x_1) + \cdots + \lambda'_k f(x_k). \tag{79}$$

Z definicji liczby λ i warunku (76) wynika, że

$$\lambda + \lambda_{k+1} = 1,$$

zatem oznaczając

$$x = \lambda_1' x_1 + \cdots + \lambda_k' x_k$$

stwierdzamy stosując nasze twierdzenie dla $n = 2$, że

$$\lambda x + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in \mathbb{P} \tag{80}$$

oraz że

$$f(\lambda x + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \le \lambda f(x) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}). \tag{81}$$

Ponieważ

$$\lambda \lambda_j' = \lambda_j \quad (j = 1, \ldots, k)$$

oraz

$$\lambda x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k,$$

z warunku (80) wynika (77) zaś z nierówności (79), (81) dostajemy (78), co kończy dowód indukcyjny. □

Przykład 19. Niech

$$f(x) = -\log x \qquad (x > 0).$$

Ponieważ

$$f'(x) = -\frac{1}{x}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0,$$

zgodnie z twierdzeniem 8 funkcja f jest wypukła w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$. Przyjmując w twierdzeniu 9

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$$

dostajemy

$$-\log \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \le -\frac{1}{n}(\log x_1 + \cdots + \log x_n) \tag{82}$$

dla $x_1, \ldots, x_n \in (0, \infty)$. Zmieniając znak po obu stronach nierówności (82) i przekształcając prawą stronę (82) otrzymujemy

$$\log \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \ge \log \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

skąd wynika

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \tag{83}$$

dla $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ (jeżeli niektóre liczby x_j są równe zeru, nierówność jest oczywista). Nierówność (83) nosi nazwę *nierówności Cauchy'ego.*

Podstawiając w (83)

$$x_j = \frac{1}{y_j} \quad (y_j > 0; j = 1, \ldots, n)$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt[n]{y_1 \cdots y_n}} \leq \frac{1}{n}(\frac{1}{y_1} + \cdots + \frac{1}{y_n})$$

skąd

(84)
$$\sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{y_1} + \cdots + \frac{1}{y_n}}.$$

Dla dodatnich liczb $x_1, \ldots x_n$ określamy ich średnie arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną następująco:

średnia arytmetyczna

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n),$$

średnia geometryczna

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

średnia harmoniczna

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Z nierówności (83), (84) wynika, że (por. zadanie 7 rozdz.I §1)

$$H(x_1, \ldots, x_n) \leq G(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n).$$

Na zakończenie przyjmijmy, że *funkcja f jest wklęsła w przedziale* $\mathbb{P}$ jeżeli funkcja $-f$ jest wypukła w tym przedziale (por. punkt 3). Wszystkie nierówności podane poprzednio dla funkcji wypukłych przenoszą się na funkcje wklęsłe z tym, że znak $\leq$ należy zamienić na $\geq$ i vice versa.

11*. Funkcje ściśle wypukłe. Mówimy, że funkcja f określona w przedziale $\mathbb{P}$ jest *ściśle wypukła w* $\mathbb{P}$ jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{P}$, $(x_1 \neq x_2)$ i dowolnych liczb dodatnich λ_1, λ_2 spełniających warunek (60) zachodzi nierówność

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Oczywiście każda funkcja ściśle wypukła w przedziale $\mathbb{P}$ jest wypukła w tym przedziale, ale nie na odwrót (por. zadanie 38). Twierdzenia udowodnione poprzednio dla funkcji wypukłych można łatwo zmodyfikować dla funkcji ściśle wypukłych.

Twierdzenie 10. *Funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $\mathbb{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego przedziału $[a, b] \subset \mathbb{P}$ (gdzie $a < b$) zachodzi nierówność*

$$f(x) < \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

dla $x \in (a, b)$.

Twierdzenie 11. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale $\mathbb{P}$. Następujące warunki są równoważne:*
(i) *f jest ściśle wypukła;*
(ii) *f' jest funkcją ściśle rosnącą;*
(iii) *dla dowolnych $x, x_0 \in \mathbb{P}$ $(x \neq x_0)$ zachodzi nierówność*

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Twierdzenie 12. *Jeżeli funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $\mathbb{P}$, to dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{P}$ nie wszystkich równych między sobą oraz dowolnych liczb dodatnich $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ spełniających warunek (74) zachodzi nierówność*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) < \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Dowody twierdzeń 10 - 12 przebiegają zupełnie podobnie do dowodów twierdzeń 6, 7, 9 i pozostawiamy je Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

Zadania.

1. Udowodnić, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ma w punkcie $x = 0$ pochodne wszystkich rzędów równe zeru.
Wskazówka. Najpierw udowodnić metodą indukcji, że

$$f^{(n)}(x) = w_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{dla} \quad x > 0,$$

gdzie w_n jest wielomianem (podać postać wielomianu w_n dla $n = 1, 2$). Przy badaniu kolejnych pochodnych w punkcie $x = 0$ wystarczy rozważać granicę prawostronną ilorazu różnicowego (dlaczego?). Przy obliczaniu tej granicy wykorzystać Przykład 33 §4.

2. Zbadać przebieg funkcji f określonej w zadaniu 1 i naszkicować jej wykres.

3. Niech

$$f(x) = \text{arctg} x \quad (x \in (-\infty, \infty)).$$

Znaleźć wzór rekurencyjny wyrażający $f^{(n)}(x)$ przy pomocy pochodnych tej funkcji niższych rzędów. Następnie obliczyć wartości wszystkich pochodnych funkcji f w punkcie $x = 0$.
Wskazówka. Zastosować wzór Leibniza do lewej strony tożsamości

$$(1 + x^2)f'(x) = 1.$$

4. Podać wzór na n-tą pochodną funkcji

$$\begin{aligned} &\text{a.)} \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \\ &\text{b.)} \quad g(x) = \log x \quad (x > 0). \end{aligned}$$

5. Posługując się wzorem Leibniza znaleźć n-tą pochodną funkcji f gdy

$$\begin{aligned} &\text{a.)} \quad f(x) = x \log x \quad (x > 0), \\ &\text{b.)} \quad f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0), \\ &\text{c.)} \quad f(x) = x^2 e^x. \end{aligned}$$

6. Posługując się wzorem Leibniza znaleźć $f^{(3)}(x)$ oraz $g^{(7)}(x)$, jeżeli

$$f(x) = e^x \sin x, \quad g(x) = e^{2x} \cos x.$$

7. Udowodnić wzór Halphena

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n x^{-n-1} e^{\frac{1}{x}}.$$

Wskazówka. Najpierw sprawdzić prawdziwość wzoru dla $n = 1, 2$, następnie zastosować indukcję względem n.

8. Udowodnić, że jeżeli funkcja n-krotnie różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$ znika w $n + 1$ różnych punktach, to istnieje punkt $x_0 \in \mathbb{P}$ taki, że $f^{(n)}(x_0) = 0$.
Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu Rolle'a (twierdzenie 10 §4) i zastosować indukcję względem n.

9. Zbadać, przy jakim naturalnym n funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w przedziale $(-\infty, \infty)$, gdy

$$\begin{aligned} &\text{a.)} \quad f(x) = x|x|, \\ &\text{b.)} \quad f(x) = |x^k| \quad (k \in \mathbb{N}), \\ &\text{c.)} \quad f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$(\alpha > 0)$.

10. Niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w przedziale $\mathbb{P}$ i niech $a \in \mathbb{P}$. Udowodnić, że dla dowolnego $x \in \mathbb{P}$ istnieje $\Theta \in (0,1)$ takie, że

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n, \tag{85}$$

gdzie

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!}(1-\Theta)^{n-1} f^{(n)}(\bar{x}), \quad \bar{x} = a + \Theta(x-a) \tag{86}$$

(zatem $\bar{x}$ jest punktem leżącym między a, x).
Wskazówka. Zastępując x przez b $(b > a)$ zastosować twierdzenie Lagrange'a (twierdzenie 11" §4, $b = a + h$) do funkcji g wprowadzonej w dowodzie twierdzenia 1. Następnie zauważyć, że w twierdzeniu Lagrange'a można założyć, że $b < a$ i rozważać przedział $[b, a]$.
Uwaga. Wzór (85) nosi nazwę *wzoru Taylora* z resztą R_n *w postaci Cauchy'ego* określoną wzorem (86).

11. Załóżmy, że
  (i) f jest $(n-1)$-krotnie różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$,
  (ii) istnieje $f^{(n)}(a)$, gdzie $a \in \mathbb{P}$.
Udowodnić, że istnieje funkcja $\eta(x)$ taka, że
  (a) η jest $(n-1)$-krotnie różniczkowalna w $\mathbb{P} \setminus \{a\}$,
  (b) $\lim_{x\to a} \eta(x) = 0$,
  (c) dla $x \in \mathbb{P}$ zachodzi równość

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n, \tag{87}$$

gdzie

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} \eta(x). \tag{88}$$

Wskazówka. Określając dla $x \neq a$

$$\varphi(x) = \frac{n!}{(x-a)^n} \cdot \left(f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right)$$

wykazać najpierw stosując regułę de l'Hospitala, że

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}.$$

Uwaga. Wzór (87) nosi nazwę *wzoru Taylora* z resztą *w postaci Peano*[4] określoną wzorem (88).

12. Zakładając, że
 (i) f jest różniczkowalna w otoczeniu $a \in \mathbb{R}$,
 (ii) istnieje $f''(a)$
udowodnić równość

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a).$$

Wskazówka. Zastosować wzory (87), (88) przyjmując $n = 2$, $x = a + h$ oraz $x = a - h$.

13. Uogólnić twierdzenie sformułowane w zadaniu 12 na przypadek, gdy
 (i) f jest $(n-1)$-krotnie różniczkowalna w otoczeniu $a \in \mathbb{R}$,
 (ii) istnieje $f^{(n)}(a)$.

14. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale $\mathbb{P} = (A, \infty)$ i taką, że kresy górne

$$M_0 = \sup_{\mathbb{P}} |f|, \quad M_1 = \sup_{\mathbb{P}} |f'|, \quad M_2 = \sup_{\mathbb{P}} |f''|$$

są skończone. Udowodnić nierówność

$$M_1^2 \le 4M_0M_2.$$

Wskazówka. Zastosować wzór Taylora (8) przyjmując $n = 2$, $x = a + 2h$ $(a > A, h > 0)$, następnie dobrać odpowiednio h.

15. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$ i taką, że
 (i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$,
 (ii) $f''(x)$ jest ograniczona w $\mathbb{P}$.
Udowodnić, że

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$

Wskazówka. Wykorzystać zadanie 14.

16. Na przykładzie funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin x^2 \quad (x > 0)$$

okazać, że twierdzenie sformułowane w zadaniu 15 nie jest prawdziwe, jeżeli opuścimy założenie (ii).

---

[4] Giuseppe Peano (1858 - 1932), matematyk włoski, zajmował się logiką matematyczną i podstawami matematyki, podał aksjomatykę liczb naturalnych.

17. Zbadać dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi uogólniona nierówność Bernoulliego (por. rozdz.I §1 punkt 7)

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \quad (x > -1).$$

Wskazówka. Zbadać wypukłość funkcji

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad (x > -1).$$

18. Pokazać, że nierówność

$$\mathrm{tg} x > x \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

(por. (39) §1) wynika ze wzoru Taylora w postaci (20).

19. Udowodnić, że w każdym przedziale $\mathbb{P}_k = (k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{2})$, gdzie k jest liczbą całkowitą, leży dokładnie jedno miejsce zerowe funkcji

$$p(x) = \mathrm{tg} x - x \qquad (x \in \mathbb{R}).)$$

Narysować wykres tej funkcji.
Wskazówka. Najpierw rozważyć przedział $\mathbb{P}_0$, następnie zauważyć, że

$$p(x + k\pi) = p(x) - k\pi.$$

20. Udowodnić, że w każdym przedziale $\mathbb{P}_k = (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, gdzie k jest liczbą całkowitą różną od zera, leży dokładnie jedno miejsce zerowe funkcji

$$h(x) = 2x - \mathrm{tg} x.$$

Narysować wykres tej funkcji.
Wskazówka. Najpierw rozważyć przedział $\mathbb{P}_0$, następnie zauważyć, że

$$h(x + k\pi) = h(x) + 2k\pi.$$

21. Zbadać ekstrema i naszkicować wykres funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin x \quad (x > 0).$$

Wskazówka. Najpierw zbadać zachowanie się funkcji w przedziale $(0, \frac{\pi}{2}]$. Następnie zauważyć, że w każdym przedziale $\mathbb{P}_k = (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), k = 1, 2, \ldots$

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{x^2} p(x),$$

gdzie

$$p(x) = \mathrm{tg}x - x$$

i wykorzystać zadanie 19.

22. Zbadać ekstrema i naszkicować wykres funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin x^2 \quad (x > 0).$$

Wskazówka. Podstawiając $t = x^2$ zauważyć, że

$$f'(x) = \frac{\cos t}{t} h(t)$$

w każdym przedziale $Q_k = (\sqrt{k\pi - \frac{\pi}{2}}, \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{2}}), \quad k = 1, 2, \ldots$, gdzie

$$h(t) = 2t - \mathrm{tg}t.$$

Następnie wykorzystać zadanie 20, zaczynając od badania funkcji f w przedziale $(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$.

23. Zbadać ekstrema i punkty przegięcia funkcji

$$f(x) = \cos x.$$

24. Podać na wspólnym rysunku wykresy funkcji

$$f(x) = \log(1 + x), \quad g(x) = \frac{x}{1 + x}, \quad h(x) = x.$$

Porównać z nierównością (63) §4.

25. Znaleźć równania asymptot i narysować wykres funkcji

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

26. Narysować wykresy funkcji

$$\begin{aligned}
&(1) \quad f(x) = e^{-x^2}, && (6) \quad f(x) = \frac{5 - 3x}{x^2 - 1},\\
&(2) \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x+1}}, && (7) \quad f(x) = e^{px} - x \quad (p > 0),\\
&(3) \quad f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x + 1}, && (8) \quad f(x) = \frac{1}{2}\log x - \frac{x^2}{2},\\
&(4) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, && (9) \quad f(x) = 5 - x - \frac{4}{x},\\
&(5) \quad f(x) = x - \frac{2}{x} - 3\log x.
\end{aligned}$$

badając ich ekstrema, punkty przegięcia i asymptoty.

27. Zbadać ekstrema i punkty przegięcia oraz narysować wykresy funkcji

$$\begin{aligned} &\text{a.)}\quad f(x) = x\sqrt{4-x^2}, \qquad \text{b.)}\quad f(x) = x(a-x)^2 \quad (a>0), \\ &\text{c.)}\quad f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 1, \qquad \text{d.)} f(x) = \sin x + \sin 2x. \end{aligned}$$

28. Zbadać ekstrema i punkty przegięcia funkcji

$$f(x) = ax + \sin x$$

w zależności od parametru a. Naszkicować wykres.

29. Zbadać ekstrema, punkty przegięcia i asymptoty wykresu funkcji

$$f(x) = x^k e^{-x}$$

w zależności od paramwetru $k \in \mathbb{R}$. Naszkicować wykres.

30. Zbadać ekstrema i asymptoty wykresu funkcji

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

Naszkicować wykres.

31*. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $\mathbb{P}$ i niech dla $a \in \mathbb{P}$

$$g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in \mathbb{P}, \quad x \neq a).$$

Udowodnić, że funkcja g_a jest rosnąca w $\mathbb{P} \setminus \{a\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest wypukła w $\mathbb{P}$.
Wskazówka. Mamy udowodnić, że z nierówności $x_1 < x_2 \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{P} \setminus \{a\})$ wynika

$$g_a(x_1) \leq g_a(x_2). \tag{88}$$

Należy rozważyć przypadki

$$1^0 \quad a < x_1 < x_2, \quad 2^0 \quad x_1 < a < x_2, \quad 3^0 \quad x_1 < x_2 < a.$$

W przypadku 1^0 i 3^0 opierając się na twierdzeniu 6 zauważyć, że nierówność (88) jest równoważna wypukłości funkcji f w przedziale $\mathbb{P}$. W przypadku 2^0 zakładając wypukłość funkcji f udowodnić (88) w oparciu o twierdzenie 6 i lemat 2.

32*. Niech f będzie funkcją wypukłą w przedziale $\mathbb{P}$ i niech x_0 będzie punktem wewnętrznym tego przedziału. Udowodnić, że f ma w punkcie x_0 skończone pochodne lewostronną $f'_-(x^0)$ i prawostronną $f'_+(x_0)$, przy czym zachodzi nierówność

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0).$$

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 6 i lemacie 2 udowodnić nierówność

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

dla $x < x_0 < y \quad (x, y \in \mathbb{P})$. Następnie skorzystać z zadania 31 i oprzeć się na twierdzeniu o zbieżności monotonicznej (twierdzenie 11 §2).

33*. Udowodnić, że funkcja wypukła w przedziale $\mathbb{P}$ jest ciągła w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału.
Wskazówka. Niech x_0 będzie punktem wewnętrznym przedziału $\mathbb{P}$. Opierając się na zadaniu 32 zauważyć, że

$$\lim_{x\to x_0-}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0+}(f(x)-f(x_0)) = 0.$$

Następnie skorzystać z twierdzenia 10 §2.

34*. Udowodnić, że funkcja wypukła w przedziale $\mathbb{P}$ nie będąca stałą nie może osiągać swego kresu górnego w żadnym punkcie wewnętrznym tego przedziału.
Wskazówka. Niech

$$M = \sup_{\mathbb{P}} f < \infty$$

i niech x_0 będzie punktem wewnętrznym przedziału $\mathbb{P}$ takim, że

$$M = f(x_0).$$

Wykazać, że istnieją punkty $a, b \in \mathbb{P}$ spełniające warunki
$1^0 \quad a < x_0 < b$
2^0 przynajmniej jedna z liczb $f(a), f(b)$ jest różna od M.
Następnie opierając się na twierdzeniu 6 dojść do sprzeczności.

35*. Podać przykład funkcji wypukłej w przedziale $[a, b] \quad (a, b \in \mathbb{R}; a < b)$ nieciągłej w punktach a, b. Porównać z zadaniem 33.

36*. W jakich przedziałach funkcja

$$\text{a.)} \quad f(x) = \sin x, \qquad \text{b.)} \quad f(x) = \cos x$$

jest wypukła a w jakich wklęsła?

37*. Które z podanych niżej funkcji są wypukłe względnie wklęsłe w przedziale $\mathbb{P}$?

$$\text{(i)}\quad f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}, \qquad \mathbb{P} = (-\infty, -\sqrt[4]{3}],$$

$$\text{(ii)}\quad f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla} \quad |x| \le 1, \\ 1 & \text{dla} \quad 1 < |x| \le 2 \end{cases} \qquad \mathbb{P} = [-2, 2]$$

$$\text{(iii)}\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad -3 \le x < 0, \\ \frac{1}{2}x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1, \\ x - \frac{1}{2} & \text{dla} \quad 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad \mathbb{P} = [-3, 2]$$

$$\text{(iv)}\quad f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla} \quad x = -1, \\ 2x^2 & \text{dla} \quad -1 < x < 2, \\ 9 & \text{dla} \quad x = 2 \end{cases} \qquad \mathbb{P} = [-1, 2]$$

$$\text{(v)}\quad f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla} \quad -1 < x < 0, \\ x & \text{dla} \quad 0 \le x < 1, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases} \qquad \mathbb{P} = (-1, 1]$$

$$\text{(vi)}\quad f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad -1 \le x \le 0, \\ 2x & \text{dla} \quad 0 < x < 2 \end{cases} \qquad \mathbb{P} = (-1, 2)$$

Wskazówka. W punktach (ii) - (vi) narysować wykres funkcji f.

38*. Sprawdzić, że funkcja liniowa

$$f(x) = ax + b$$

jest wypukła, ale nie jest ściśle wypukła w przedziale $(-\infty, \infty)$.

39*. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale $\mathbb{P}$. Udowodnić, że jeżeli

$$f''(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P},$$

to f jest ściśle wypukła w $\mathbb{P}$. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?
Wskazówka. Zastosować twierdzenie 11.

40*. Udowodnić, że znak równości w nierówności (83) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie liczby $x_1, \ldots, x_n$ są równe. Wywnioskować stąd, że

$$H(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n)$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 11 stwierdzić, że funkcja

$$f(x) = -\log x \quad (x > 0)$$

jest ściśle wypukła w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$. Następnie zastosować twierdzenie 12 i rozumować podobnie jak w Przykładzie 19.

41. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale $[a, b]$ spełniającą warunek

$$f''(x) > 0 \quad \text{dla} \quad a < x < b.$$

Udowodnić, że wówczas

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

dla $a < x < b$. Jaki jest sens geometryczny tej nierówności?
Wskazówka. Dowód jest podobny do dowodu nierówności (16) punkt 3.

42*. Niech f będzie funkcją ściśle rosnącą i dwukrotnie różniczkowalną w przedziale $[a, b]$ spełniającą warunki

$$f(a) < 0 < f(b), \qquad f''(x) > 0 \quad \text{dla} \quad a < x < b$$

i niech$\{x_n\}$ będzie ciągiem przybliżeń pierwiastka α równania

$$f(x) = 0$$

otrzymanym metodą siecznych (wzór (51)). Udowodnić, że

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \alpha < b$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
Wskazówka. Skorzystać z zadania 41.

43. Zakładając, że funkcja f spełnia założenia podane w zadaniu 41 udowodnić nierówność

$$f(x) > f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

dla $x, x_0 \in [a, b], \quad x \neq x_0$ i podać jej sens geometryczny.
Wskazówka. Skorzystać ze wzoru Taylora przy $n = 2$.

44*. Niech f będzie funkcją ściśle rosnącą i dwukrotnie różniczkowalną w przedziale $[a, b]$ spełniającą warunki

$$f(a) < 0 < f(b); \quad f''(x) > 0 \quad \text{dla} \quad a < x < b; \quad f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b.$$

i niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem przybliżeń pierwiastka α równania

$$f(x) = 0$$

otrzymanym metodą stycznych (wzór (56)). Udowodnić, że

$$a < \alpha < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < b$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
Wskazówka. Skorzystać z zadania 43.

45*. Niech f będzie funkcją ściśle rosnącą, dwukrotnie rózniczkowalną i wklęsłą w przedziale $[a, b]$ przyjmującą na jego końcach wartości różnych znaków. Skostruować ciąg przybliżeń $\{x_n\}$ pierwiastka α równania

$$f(x) = 0$$

a.) metodą siecznych,
b.) metodą stycznych, zakładając dodatkowo, że $f'(x) \neq 0$ w przedziale $[a, b]$.
Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$

Co można powiedzieć o ciągu $\{x_n\}$, jeżeli wzmocnimy założenia przyjmując, że

$$f''(x) < 0 \quad \text{dla} \quad a < x < b?$$

Wskazówka. Przeprowadzić rozumowanie podobne jak w punktach 8,9 oraz w zadaniach 42, 44.

46*. Udowodnić, że równanie

$$x^3 + 3x - 2 = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $(0, 1)$. Znaleźć jego przybliżenia stosując
a.) metodę siecznych,
b.) metodę Newtona.

47*. Udowodnić, że równanie

$$e^x + \sin x = 0$$

(i) ma dokładnie jedno rozwiązanie w każdym przedziale (a_k, c_k) oraz (c_k, b_k), gdzie

$$a_k = -(2k+1)\pi, \quad c_k = -(2k\pi + \frac{\pi}{2}), \quad b_k = -2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

(ii) nie ma innych rozwiązań poza wymienionymi w punkcie (i).
Znaleźć przybliżenia rozwiązania leżącego w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ stosując
a.) metodę siecznych,
b.) metodę Newtona.
Wskazówka. Oznaczając przez $f(x)$ lewą stronę równania zbadać przebieg funkcji f w przedziale $[a_k, b_k]$.

48*. Wyznaczyć przybliżoną wartość liczby e stosując

a.) metodę siecznych,
b.) metodę Newtona
do równania

$$\log x = 1$$

w przedziale $[1, 4]$. Oszacować błąd otrzymanych przybliżeń.
Wskazówka. Oprzeć się na zadaniu 45.

49*. Wyznaczyć przybliżoną wartość wyrażeń

$$\sqrt{3}, \qquad \sqrt[3]{5}, \qquad \sqrt[4]{7}$$

stosując do odpowiednio dobranego równania
a.) metodę siecznych,
b.) metodę Newtona.
Oszacować błąd otrzymanych przybliżeń.