♡ ♡ ♡

§2. Szeregi o wyrazach dodatnich

Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu są dodatnie, to ciąg sum częściowych $\{S_n\}$ jest ściśle rosnący. Zachodzą wówczas dwie możliwości:

a.) ciąg $\{S_n\}$ jest ograniczony z góry - wówczas zgodnie z twierdzeniem 5 rozdz.II §2 ciąg ten jest zbieżny a to oznacza, że szereg jest zbieżny;

b.) ciąg $\{S_n\}$ jest nieograniczony z góry - wówczas jest on rozbieżny do ∞ a to oznacza, że szereg jest rozbieżny (jego suma jest równa ∞).

Z tych uwag wynika natychmiast (por. zadanie 6 §1)

Twierdzenie 1 (kryterium porównawcze rozbieżności). *Jeżeli dla $n \geq n_0$ (gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$) zachodzi nierówność*

$$a_n \geq b_n > 0$$

i szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

jest rozbieżny, to również szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest rozbieżny.

W dalszym ciągu przedstawimy warunki dostateczne zapewniające zbieżność szeregu o wyrazach dodatnich (tzw. *kryteria zbieżności.*)

Twierdzenie 2 (kryterium zagęszczania Cauchy'ego). *Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem malejącym o wyrazach dodatnich. Wówczas szereg*

$$(\alpha) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg

$$(\beta) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

DOWÓD. Niech S_n będzie n-tą sumą częściową szeregu (α), zaś T_n n-tą sumą częściową szeregu zagęszczonego (β). Zauważmy, że

$$S_{2^n-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n-1})$$

przy czym ostatni nawias zawiera $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ wyrazów. Wobec tego

$$(1) \qquad S_{2^n-1} \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} = a_1 + T_{n-1}.$$

Podobnie

$$S_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \cdots a_{2^n}),$$

a stąd

$$S_{2^n} \geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n} = a_1 + \frac{1}{2}T_n. \tag{2}$$

Ponieważ $2^n - 1 \to \infty$, do dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje wskaźnik n_k taki, że

$$k \leq 2^{n_k} - 1$$

skąd wynika

$$S_k \leq S_{2^{n_k}-1}. \tag{3}$$

Z nierówności (1), (2), (3) wynika, że ciąg $\{T_n\}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{S_n\}$ ma tą własność, a to stwierdzenie jest równoważne z tezą twierdzenia. □

Przykład 1. Zbadamy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}. \tag{4}$$

Jeżeli $\alpha \leq 0$, to ogólny wyraz szeregu nie dąży do zera przy $n \to \infty$, szereg jest więc rozbieżny (por. twierdzenie 8 §2).

Rozważmy teraz przypadek $\alpha > 0$. Szereg zagęszczony ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

Jest to szereg geometryczny o ilorazie $q = 2^{1-\alpha}$, który jest zbieżny gdy $q < 1$ (czyli gdy $1 - \alpha < 0$), rozbieżny w przeciwnym przypadku. Zgodnie z twierdzeniem 1 szereg (4) jest

zbieżny, gdy $\alpha > 1$, rozbieżny, gdy $0 < \alpha \leq 1$.

Zauważmy, że dla $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

zatem w obu przypadkach spełniony jest konieczny warunek zbieżności. Dla $\alpha = 1$ szereg (4) jest szeregiem harmonicznym, którego rozbieżność udowodniliśmy w Przykładzie 4 §1. W §1 rozważaliśmy również szereg (4) dla $\alpha = \frac{1}{2}$ (Przykład 5) i $\alpha = 2$ (Przykład 6).

Przykład 2. Szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} \qquad (\alpha > 0) \tag{5}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg zagęszczony

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(n \log 2)^\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^\alpha n^\alpha},$$

który różni się tylko stałym czynnikiem od szeregu (4). Wobec tego szereg (5) jest

zbieżny gdy $\alpha > 1$, rozbieżny gdy $0 < \alpha \leq 1$.

Twierdzenie 3 (kryterium d'Alemberta). [1] *Załóżmy, że istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g.$$

Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6}$$

jest

(i) *zbieżny gdy* $0 \le g < 1$,
(ii) *rozbieżny gdy* $1 < g \le \infty$.

DOWÓD. W przypadku (i) do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ można dobrać $N \in \mathbb{N}$ tak, by dla $n \ge N$ zachodziła nierówność

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < g + \varepsilon.$$

Ustalając $\varepsilon \in (0, 1 - g)$ i przyjmując $b = g + \varepsilon$ mamy zatem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < b \quad \text{dla} \quad n \ge N. \tag{7}$$

Z nierówności (7) dostajemy kolejno

$$\begin{aligned} &a_{N+1} < b\, a_N, \\ &a_{N+2} < b^2 a_N, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{N+p} < b^p a_N \quad \text{dla} \quad p \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{8}$$

Ponieważ $b \in (0, 1)$, szereg geometryczny

$$\sum_{p=1}^{\infty} b^p$$

jest zbieżny i wobec tego ostatnia nierówność (8) zapewnia na mocy kryterium porównawczego zbieżność szeregu

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p},$$

który powstaje z szeregu (6) przez skreślenie początkowych N wyrazów. Zgodnie z twierdzeniem 1 §1 szereg (6) jest również zbieżny.

W przypadku (ii) dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

z której wynika, że przynajmniej począwszy od pewnego wyrazu ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący, nie może być zatem zbieżny do zera. Wobec tego szereg (6) jest rozbieżny, gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności (por. twierdzenie 8 §1). $\square$

[1] Jean d'Alembert (1717 - 1783), matematyk francuski, od 1741 r. członek Paryskiej Akademii Nauk. Zajmował się analizą matematyczną, mechaniką i astronomią, z jego nazwiskiem związana jest metoda wyznaczania drgań poprzecznych struny sprężystej.

Twierdzenie 4 (kryterium Cauchy'ego). *Załóżmy, że istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g.$$

Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{9}$$

jest

(i) *zbieżny gdy* $0 \le g < 1$,

(ii) *rozbieżny gdy* $1 < g \le \infty$.

DOWÓD. Dowód przebiega podobnie do dowodu twierdzenia 3. W przypadku (i) można obrać liczbę $0 < b < 1$ tak, że dla $n \ge N \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_n} < b$$

z której wynika

$$a_n < b^n \quad \text{dla} \quad n \ge N. \tag{10}$$

Ponieważ szereg geometryczny

$$\sum_{n=N}^{\infty} b^n$$

jest zbieżny, nierówność (10) zapewnia zbieżność szeregu

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n,$$

a więc i zbieżność szeregu (9).

W przypadku (ii) dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_n} > 1$$

z której wynika, że przynajmniej począwszy od pewnego wyrazu mamy $a_n > 1$, ciąg $\{a_n\}$ nie może być więc zbieżny do zera. Wobec tego szereg (9) jest rozbieżny, gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu (por. twierdzenie 8 §1). □

Uwaga. Kryterium d'Alemberta jest na ogół wygodniejsze w użyciu niż kryterium Cauchy'ego. Ponadto

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{1} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

więc na podstawie twierdzenia o średniej geometrycznej (zadanie 2 rozdz. III §3) z istnienia granicy rozważanej w twierdzeniu 3 wynika istnienie granicy, o której mowa w twierdzeniu 4 oraz równość obu granic. Jeżeli $g = 1$ to mówimy, że szereg *nie reaguje na kryterium (d'Alembert'a, Cauchy'ego).*

Przykład 3. Rozważmy szereg

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots . \tag{11}$$

Ogólny wyraz tego szeregu można wyrazić wzorem

$$a_{2n-1} = a_{2n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

zatem

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1, \qquad \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{2}.$$

Wobec tego ciąg $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ jest przeplatanką dwóch różnych ciągów stałych, nie istnieje więc granica rozważana w twierdzeniu 3 i nie możemy stosować kryterium d'Alemberta. Natomiast

$$\sqrt[k]{a_k} = 2^{\alpha_k},$$

gdzie

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1-n}{2n} & \text{dla} \quad k = 2n, \\ \\ \frac{1-n}{2n-1} & \text{dla} \quad k = 2n-1. \end{cases}$$

Ponieważ ciąg $\{\alpha_k\}$ jest przeplatanką dwóch ciągów zbieżnych do granicy $-\frac{1}{2}$, mamy (por. zadanie 4 rozdz.II §1)

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = -\frac{1}{2}$$

a stąd wobec ciągłości funkcji wykładniczej $y = 2^x$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Wobec tego kryterium Cauchy'ego zapewnia zbieżność szeregu (11).

Z podanego przykładu widać, że może istnieć granica rozważana w twierdzeniu 4, podczas gdy granica w twierdzeniu 3 nie istnieje. Kryterium Cauchy'ego jest więc ogólniejsze niż kryterium d'Alemberta. Korzystając ze zbieżności szeregu (11) możemy zgodnie z twierdzeniem 5 §1 połączyć w nim wyrazy parami nie zmieniając jego sumy. Dostajemy w ten sposób szereg

$$(1+1) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0} \frac{1}{2^n} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

Zatem suma szeregu (11) wynosi 4.

Przykład 4. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

rozważany w przykładzie 1 nie reaguje na kryterium d'Alemberta (a więc i na kryterium Cauchy'ego), gdyż

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^\alpha}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$$

korzystając z ciągłości funkcji potęgowej $y = x^\alpha$ i z twierdzenia o granicy ilorazu dostajemy dla dowolnego α

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

niezależnie od tego, czy szereg jest zbieżny czy rozbieżny.

Przykład 5. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{12}$$

gdzie x jest ustaloną liczbą dodatnią. Stosujęc kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1},$$

a stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \tag{13}$$

co zapewnia zbieżność szeregu (12).

Aby zastosować kryterium Cauchy'ego zauważmy najpierw, że

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Mamy

$$b_n = \log \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}(\log 1 + \log 2 + \cdots + \log n)$$

skąd na podstawie twierdzenia o średniej arytmetycznej (twierdzenie 12 rozdz.II §2)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty. \tag{14}$$

Ponieważ

$$\sqrt[n]{n!} = e^{b_n},$$

więc z (14) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty,$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0. \tag{15}$$

Zgodnie z uwagą sformułowaną po twierdzeniu 4 granice (13) i (15) są równe. W dalszym ciągu zobaczymy, że suma szeregu (12) wynosi e^x.

Przykład 6. Wykorzystując własności szeregów możemy łatwo udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \tag{16}$$

przy ustalonych $k \in \mathbb{N}$, $a > 1$ (por. zadanie 12 rozdz.II §2). Zgodnie z twierdzeniem 8 §1 wystarczy udowodnić zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{n^k}{a^n}.$$

Stosując kryterium d'Alemberta dostajemy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k,$$

skąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a} < 1. \tag{17}$$

Podobnie zastosowanie kryterium Cauchy'ego daje

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{a}$$

skąd

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{a} < 1 \tag{18}$$

(oczywiście granice (17) i (18) są równe). Oba kryteria zapewniają zbieżność szeregu a więc i warunek (16).

Na zakończenie udowodnimy jeszcze jedno proste i bardzo wygodne w stosowaniu kryterium zbieżności względnie rozbieżności szeregu.

Twierdzenie 5. *Jeżeli istnieje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g \neq 0$$

to szeregi

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad\qquad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

są albo oba zbieżne albo oba rozbieżne.

DOWÓD. Ustalając $0 < \varepsilon < g$ mamy począwszy od pewnego wskaźnika n_0

$$g - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < g + \varepsilon$$

czyli

$$(g-\varepsilon)b_n < a_n < (g+\varepsilon)b_n. \tag{19}$$

Z twierdzeń 1, 3 §1 wynika, że szeregi

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (g-\varepsilon)b_n, \qquad\qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} (g+\varepsilon)b_n$$

są zbieżne wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg (β). Z nierówności (19) wynika zatem teza twierdzenia po zastosowaniu kryterium porównawczego zbieżności (twierdzenie 7 §1) oraz kryterium porównawczego rozbieżności (twierdzenie 1). □

♡ ♡ ♡

Zadania.

1. Przy założeniach twierdzenia 2 udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n a_{3^n}.$$

Czy liczby 2, 3 mogą być zastąpione przez dowolną inną liczbę naturalną różną od 1?

2. Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^{\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

w zależności od parametru α. Dla jakich n określone jest wyrażenie a_n?
Wskazówka. Opierając się na nierówności (por. rozdz. II §2 punkt 5)

$$2 \le e \le 3 \tag{20}$$

zastosować kryteria porównawcze zbieżności i rozbieżności (twierdzenie 7 §1 i twierdzenie 1) wykorzystując twierdzenie 2, przykład 2 i zadanie 1.

3. Oznaczmy

$$\underbrace{\log\log\ldots\log x}_{p \text{ razy}} = \log_{(p)} x,$$

$$b_n(0) = 1, \quad b_n(p) = \log n(\log_{(2)} n)\ldots(\log_{(p)} n),$$

$$a_n(p,\alpha) = \frac{1}{nb_n(p-1)(\log_{(p)} n)^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym $a_n(p,\alpha)$ w zależności od parametru α. Dla jakich n określone są wyrażenia $b_n(p)$, $a_n(p,\alpha)$?
Wskazówka. Korzystając z nierówności (20) udowodnić najpierw oszacowanie

$$\log_{(k)} 2^n \le \log_{(k-1)} n \le \log_{(k)} 3^n \quad (k \ge 2).$$

Następnie zastosować indukcję względem p wykorzystując twierdzenie 2, zadanie 1 i przykład 2.

4. Rozważmy szeregi o wyrazach dodatnich

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

i niech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

Jeżeli oba szeregi są zbieżne, to mówimy, że *szereg* (β) *jest zbieżny szybciej niż szereg* (α). Jeżeli oba szeregi są rozbieżne, to mówimy, że *szereg* (β) *jest rozbieżny wolniej niż szereg* (α). Przyjmijmy oznaczenia zadania 3 i niech $A_\alpha(p)$ będzie szeregiem

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(p,\alpha) \quad (n_0 \quad \text{dostatecznie duże}).$$

Udowodnić, że
a.) w przypadku zbieżności szereg $A_\alpha(p)$ jest zbieżny szybciej niż szereg $A_\alpha(p+1)$,
b.) w przypadku rozbieżności szereg $A_\alpha(p+1)$ jest rozbieżny wolniej niż szereg $A_\alpha(p)$.
Wskazówka. Oprzeć się na wyniku zadania 3. W punkcie a.) zastosować regułę de l'Hospitala obliczania granicy wyrażeń nieoznaczonych.

5. Przyjmijmy oznaczenia

$$(S_\alpha)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},\qquad\qquad (S_\beta)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\beta}$$

przy czym $\beta > \alpha > 0$. Przyjmując terminologię wprowadzoną w zadaniu 4 udowodnić, że
a.) gdy oba szeregi są zbieżne, to szereg (S_β) jest zbieżny szybciej niż szereg (S_α);
b.) gdy oba szeregi są rozbieżne, to szereg (S_β) jest rozbieżny wolniej niż szereg (S_α).

6. Zbadać zbieżność szeregów o wyrazie ogólnym

$$\text{a.)}\quad a_n=\frac{\log n}{n^\alpha}\quad(\alpha>0),\qquad \text{b.)}\quad a_n=\frac{1}{(\log n)^\alpha}\quad(\alpha>0),$$

$$\text{c.)}\quad a_n=\frac{\sqrt{n}}{2^{\sqrt{n}}},\qquad \text{d.)}\quad a_n=\frac{1}{2^{\sqrt{n}}},$$

$$\text{e.)}\quad a_n=\frac{1}{(\log n)^{\sqrt{n}}}.$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenia 2 i 4.

7. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}\quad(a>0)$$

w zależności od parametru a.

8. Udowodnić, że następujące ciągi są zbieżne do zera:

$$u_n=\frac{d^n}{n!}\quad(d>0),\qquad v_n=\frac{n^n}{(n!)^2},$$

$$w_n=\frac{n^\alpha}{n!}\quad(\alpha\in\mathbb{R}),\qquad z_n=\frac{n!}{n^n}$$

(por. zadanie 12 rozdz. II §2).
Wskazówka. Wykorzystać warunek konieczny zbieżności odpowiedniego szeregu.

9. Opierając się na twierdzeniu 5 zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym a_n, jeśli

$$\text{a.)}\quad a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{a}{\sqrt{n}}\quad(a>0),\qquad \text{b.)}\quad a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}},$$

$$\text{c.)}\quad a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}},\qquad \text{d.)}\quad a_n=\frac{1}{4n-1},$$

$$\text{e.)}\quad a_n=\frac{n}{n^2+1},\qquad \text{f.)}\quad a_n=\frac{\sqrt{n}+\sin n}{n^2-n+1},$$

$$\text{g.)}\quad a_n=n^\alpha\sin^2\frac{1}{n}\quad(\alpha>0)$$

10. Zakładając, że szereg o wyrazie ogólnym $a_n > 0$ jest zbieżny oraz że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

Porównać z twierdzeniem 8 §1.
Wskazówka. Udowodnić najpierw nierówność

$$na_n \le \frac{n}{n-k} r_k \quad \text{dla} \quad n > k,$$

gdzie r_k oznacza k-tą resztę szeregu, następnie oprzeć się na twierdzeniu 4 §1.

11. Na przykładzie szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

pokazać, że szereg spełniający warunki podane w zadaniu 10 może być rozbieżny.

12. Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym

$$\text{a.)} \quad a_n = n^{-a} \sin\frac{1}{n} \qquad\qquad \text{b.)} \quad a_n = a^{\log n} \qquad (a > 0)$$

w zależności od parametru a.

13. Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym a_n, gdy

$$\text{a.)} \quad a_n = \frac{a^n n!}{n^n} \quad (a > 0,\ a \ne e), \qquad \text{b.)} \quad a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n,$$

$$\text{c.)} \quad a_n = \frac{2^n}{n^k} \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad \text{d.)} \quad a_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n,$$

$$\text{e.)} \quad a_n = \frac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

14. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta + 1}$$

w zależności od parametrów α, β.

15. Udowodnić następujące

Uogólnione kryterium d'Alemberta. *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (a_n > 0)$$

jest

(i) *zbieżny, jeżeli* $\overline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, (ii) *rozbieżny, jeżeli* $\underline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Wskazówka. Rozumowanie podobne jak w dowodzie twierdzenia 3.

16. Udowodnić następujące

Uogólnione kryterium Cauchy'ego. *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (a_n > 0)$$

jest
(i) *zbieżny, jeżeli* $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} < 1$, (ii) *rozbieżny, jeżeli* $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} > 1$.

Wskazówka. W dowodzie zbieżności przeprowadzić rozumowanie podobne jak w dowodzie twierdzenia 4. Dla dowodu rozbieżności wykazać, że nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu (twierdzenie 8 §1).

17. Wykazać, że w przypadku szeregu rozważanego w Przykładzie 3 również uogólnione kryterium d'Alemberta (zadanie 15) nie pozwala rozstrzygnąć jego zbieżności ani rozbieżności.

18. Rozważmy szereg

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots .$$

Sprawdzić, że
a.) kryterium d'Alemberta (nawet uogólnione - zadanie 15) nie zapewnia zbieżności ani rozbieżności szeregu,
b.) uogólnione kryterium Cauchy'ego (zadanie 16) zapewnia jego zbieżność. Obliczyć sumę szeregu. Dlaczego nie można zastosować kryterium Cauchy'ego w postaci podanej w twierdzeniu 4?

19. Oznaczając przez $\tau(n)$ ilość dzielników pierwszych liczby n zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n \qquad (x > 0).$$

Wskazówka Zastosować uogólnione kryterium Cauchy'ego (zadanie 16).

20. Rozważmy szeregi o wyrazach dodatnich

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Udowodnić następujące

Uogólnione kryterium porównawcze. *Jeżeli począwszy od pewnego wskaźnika n_0 zachodzi nierówność*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \tag{21}$$

to

(i) *ze zbieżności szeregu (β) wynika zbieżność szeregu (α),*
(ii) *z rozbieżności szeregu (α) wynika rozbieżność szeregu (β).*

Wskazówka. Nie zmniejszając ogólności można założyć (dlaczego?), że nierówność (21) zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Pomnożyć stronami nierówności (21) dla $n = 1, 2, \ldots, k$, następnie skorzystać z kryterium porównawczego zbieżności (twierdzenie 7 §1) i kryterium porównawczego rozbieżności (twierdzenie 1).

21. Rozważmy szereg o wyrazach dodatnich

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

i niech

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Udowodnić następujące

Kryterium Raabego. [2] *Załóżmy, że istnieje granica (skończona lub niewłaściwa)*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = r.$$

Wówczas

a.) jeżeli $r < 1$, to szereg jest rozbieżny,
b.) jeżeli $r > 1$, to szereg jest zbieżny.

Wskazówka. W przypadku a.) dojść do nierówności (dla dostatecznie dużych n)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1}$$

i zastosować zadanie 20. W przypadku b.) zauważyć, że przyjmując $p = \frac{r+1}{2}$ mamy dla dostatecznie dużych n

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{p}{n}. \tag{22}$$

[2] Joseph Ludwig Raabe (1801 - 1859), urodzony w Polsce w miejscowości Brody, matematyk szwajcarski, od 1843 r. profesor uniwersytetu w Zurichu. Prace z analizy matematycznej, algebry i geometrii.

Obierając następnie $1 < \alpha < p$ udowodnić, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$1 + \frac{p}{n} > (1 + \frac{1}{n})^{\alpha} \tag{23}$$

po czym opierając się na nierównościach (22), (23) zastosować zadanie 20. Nierówność (23) można otrzymać stosując wzór Taylora przy $a = 0$ do funkcji

$$f(x) = 1 + px - (1 + x)^{\alpha}$$

przy założeniu, że liczba $x > 0$ jest dostatecznie mała (por. rozdz. III §5).

22. Zbadać zbieżność szeregu (por. zadanie 13 a.))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

stosując kryterium Raabego (zadanie 21). Czy szereg reaguje na kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego?

23. Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym

a.) $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \dfrac{1}{2n+1}$, b.) $a_n = \dfrac{n!}{(x+1) \cdots (x+n)}$ $(x > 0)$

stosując kryterium Raabego (zadanie 21). Czy szeregi te reagują na kryterium d'Alemberta?

24. Rozważmy szereg o wyrazach dodatnich

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

i niech

$$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \qquad (c_n > 0 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}).$$

Udowodnić następujące

Kryterium Kummera. [3] *Załóżmy, że szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

[3]Ernst Eduard Kummer (1810 - 1893), urodzony w Polsce w miejscowości Żary. W 1831 r. ukończył studia matematyczne w Halle, w latach 1832 - 1842 był nauczycielem w gimnazjum realnym w Legnicy a w latach 1842 - 1855 profesorem Uniwersytetu Wrocławskiego, pełniąc w okresie Wiosny Ludów (1848/49) funcję rektora. We Wrocławiu powstały jego najważniejsze prace z teorii liczb, m.in. dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata dla wykładników $n < 101$. Od 1855 r. aż do przejścia na emeryturę był profesorem Uniwersytetu Berlińskiego. Zajmował się również analizą, geometrią różniczkową i fizyką matematyczną.

jest rozbieżny oraz że istnieje granica (skończona lub niewłaściwa)

$$\lim_{n\to\infty} K_n = k.$$

Wówczas
jeżeli $k > 0$ to szereg (α) jest zbieżny,
jeżeli $k < 0$ to szereg (α) jest rozbieżny.

Pokazać, że
a.) dla $c_n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ kryterium Kummera przechodzi w kryterium d'Alemberta,
b.) dla $c_n = n \quad (n \in \mathbb{N})$ z kryterium Kummera otrzymujemy kryterium Raabego (zadanie 21).
Wskazówka. W przypadku $k > 0$ zauważyć, że istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla dużych n zachodzi nierówność

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta a_{n+1}.$$

Wywnioskować stąd, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$$

jest zbieżny (jaki jest ciąg sum częściowych tego szeregu?). Następnie oprzeć się na kryterium porównawczym zbieżności (twierdzenie 7 §1). W przypadku $k < 0$ zastosować uogólnione kryterium porównawcze (zadanie 20).

25. Załóżmy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (a_n > 0)$$

jest rozbieżny i niech S_n oznacza jego n-tą sumę częściową. Udowodnić, że
a.) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$$

jest rozbieżny,
b.) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$$

jest rozbieżny,
c.) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$$

jest zbieżny.

Wskazówka. W punkcie a.) rozważyć dwa przypadki, gdy ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry lub gdy nie ma tej własności. W punkcie b.) okazać, że badany szereg nie spełnia warunku Cauchy'ego (twierdzenie 6 §1). W punkcie c.) zauważyć, że szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n}\right)$$

jest zbieżny (jaki jest ciąg sum częściowych tego szeregu?), następnie zastosować kryterium porównawcze zbieżności (twierdzenie 7 §1).

26. Załóżmy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (a_n > 0)$$

jest zbieżny i niech

$$r_n = \sum_{j=n}^{\infty} a_j$$

będzie jego n-tą resztą. Udowodnić, że
a.) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n}$$

jest rozbieżny,
b.) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$$

jest zbieżny.
Wskazówka. W punkcie a.) wykazać, że szereg nie spełnia warunku Cauchy'ego (twierdzenie 6 §1). W punkcie b.) zauważyć, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}}\right)$$

jest zbieżny i zastosować kryterium porównawcze zbieżności (twierdzenie 7 §1).

27. Zakładając, że szereg

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (a_n > 0)$$

jest rozbieżny rozważmy szereg

$$(\beta) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}.$$

a.) Przyjmując

$$a_n = \frac{1}{n}$$

sprawdzić, że szereg (β) jest rozbieżny.
b.) Przyjmując

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{gdy} \quad n \neq k^2, \\ 1 & \text{gdy} \quad n = k^2 \end{cases}$$

(dlaczego szereg (α) jest w tym przypadku rozbieżny?) udowodnić, że szereg (β) jest zbieżny.
Wskazówka. W przypadku b.) zauważyć, że szereg (β) jest sumą dwóch szeregów zbieżnych.

28. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n} \qquad (a_n > 0)$$

jest zawsze zbieżny niezależnie od zbieżności lub rozbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$