## §3. Szeregi o wyrazach dowolnego znaku.

♡ ♡ ♡

Zajmiemy się teraz badaniem szeregów, których wyrazy mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Zaczniemy od prostego przekształcenia algebraicznego.

**1. Przekształcenie Abela.** Niech dana będzie suma

$$S = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \beta_j. \tag{1}$$

Przyjmując oznaczenie

$$B_r = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r \qquad (1 \le r \le m)$$

mamy

$$\beta_j = B_j - B_{j-1} \quad \text{dla} \quad j = 2, \ldots, m. \tag{2}$$

Wobec tego sumę $S$ można zapisać w postaci

$$S = \alpha_1 B_1 + \sum_{j=2}^{m} \alpha_j (B_j - B_{j-1}),$$

co po otwarciu nawiasów i przegrupowaniu daje

$$S = \sum_{j=1}^{m-1} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) B_j + \alpha_m B_m. \tag{3}$$

Przejście od postaci (1) do postaci (3) sumy $S$ nazywamy *przekształceniem Abela.*[1] Zauważmy, że oznaczając

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = \Delta\alpha_j, \qquad B_j - B_{j-1} = \Delta B_j$$

i korzystając z (2) możemy tożsamość (3) zapisać w postaci

$$\sum_{j=2}^{m} \alpha_j (\Delta B_j) = \alpha_m B_m - \alpha_1 B_1 - \sum_{j=1}^{m-1} (\Delta\alpha_j) B_j. \tag{3'}$$

Czytelnik znający elementy rachunku całkowego zauważy napewno analogię wzoru (3') z formułą całkowania przez części.

**2. Kryterium Dirichleta i twierdzenie Leibniza o szeregach naprzemiennych.** Wykorzystując przekształcenie Abela udowodnimy kolejne kryterium zbieżności szeregu, tym razem o wyrazach dowolnego znaku.

[1] Niels Henrik Abel (1802 - 1829), urodzony w Findöe (Norwegia), oceniany przez swych nauczycieli jako wielki talent matematyczny. Zajmował się teorią funkcji eliptycznych i równaniami algebraicznymi, udowodnił m.in. niemożliwość algebraicznego rozwiązania ogólnego równania stopnia wyższego niż cztery, odkrywając ponownie wynik Paolo Ruffiniego z 1799 r. Podał zastosowania funkcji eliptycznych w teorii liczb.

**Twierdzenie 1 (kryterium Dirichleta).** *Załóżmy, że*

(i) *ciąg* $\{a_n\}$ *jest monotoniczny i zbieżny do zera,*

(ii) *ciąg sum częściowych szeregu*

$$(\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

*jest ograniczony.*

*Wówczas szereg*

$$(\gamma) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

*jest zbieżny.*

DOWÓD. Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący, wówczas dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ mamy

$$a_n \geq a_{n+m} \tag{4}$$

skąd przechodząc do granicy przy $m \to \infty$ dostajemy

$$a_n \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{5}$$

(w przeciwnym przypadku zastąpilibyśmy ciąg $\{a_n\}$ przez ciąg $\{-a_n\}$, co nie wpłynęłoby na zbieżność szeregu $(\gamma)$).

Dowód twierdzenia polega na sprawdzeniu, że szereg $(\gamma)$ spełnia warunek Cauchy'ego (twierdzenie 6 §1). Rozważmy odcinek szeregu $(\gamma)$

$$C_{n,m} = \sum_{j=1}^{m} a_{n+j} b_{n+j}.$$

Przyjmując

$$\alpha_j = a_{n+j}, \qquad \beta_j = b_{n+j}$$

i korzystając z przekształcenia Abela dostajemy

$$C_{n,m} = \sum_{j=1}^{m-1} (a_{n+j} - a_{n+j+1}) B_j + a_{n+m} B_m.$$

Oznaczając $n$-tą sumę częściową szeregu $(\beta)$ przez $T_n$ mamy na mocy założenia (ii)

$$|T_n| \leq M \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

a zatem

$$|B_r| = |T_{n+r} - T_n| \leq 2M \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Wobec tego korzystając z (4), (5) dostajemy po redukcji po prawej stronie

$$|C_{n,m}| \leq 2Ma_{n+1}. \tag{6}$$

Z założenia (i) wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $N$ tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$a_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M}$$

a stąd wynika wobec (6)

$$|C_{n,m}| < \varepsilon$$

dla $n > N$ i dowolnego $m \in \mathbb{N}$. □

**Przykład 1.** Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem monotonicznym i zbieżnym do zera. Zbadamy zbieżność szeregów

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

w zależności od parametru $x$. Aby zastosować kryterium Dirichleta zbadamy ciąg sum częściowych szeregu

$$(\alpha') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

oraz szeregu

$$(\beta') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx.$$

Oznaczając $k$-tą sumę częściową szeregu $(\alpha')$ przez $S_k$ mamy dla $x \neq 2r\pi$ ($r$ całkowite)

$$S_k = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{k} 2\sin nx \ \sin\frac{1}{2}x,$$

co po zastosowaniu ostatniego ze wzorów (38) rozdz. III §1 daje

$$S_k = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{k} \left[\cos(n-\frac{1}{2})x - \cos(n+\frac{1}{2})x\right],$$

czyli po redukcji

$$S_k = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{7}$$

Podobnie oznaczając $k$-tą sumę częściową szeregu $(\beta')$ przez $T_k$ dostajemy dla $x \neq 2r\pi$ ($r$ całkowite)

$$T_k = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{k} 2\cos nx \ \sin\frac{1}{2}x,$$

skąd po zastosowaniu pierwszego ze wzorów (38) rozdz. III §1 dostajemy

$$T_k = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{k} \left[ \sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(n-\frac{1}{2})x \right],$$

czyli po redukcji

$$T_k = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{8}$$

Ze wzorów (7), (8) widać, że przy ustalonym $x$ zachodzą nierówności

$$|S_k| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}, \qquad |T_k| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}, \tag{9}$$

zatem oba ciągi sum częściowych są ograniczone. Z twierdzenia 1 wynika, że oba szeregi $(\alpha)$, $(\beta)$ są zbieżne dla $x \neq 2r\pi$. Jeżeli $x = 2r\pi$ dla pewnego $r$ całkowitego, to szereg $(\alpha)$ jest zbieżny, gdyż wszystkie jego wyrazy są równe zeru. Natomiast

$$\cos 2nr\pi = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

wobec tego szereg $(\beta)$ przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

i może być zbieżny lub rozbieżny (proponujemy Czytelnikowi podanie przykładów).

Szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad (a_n > 0 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N})$$

nazywamy *szeregiem naprzemiennym.* Z twierdzenia 1 otrzymujemy jako prosty wniosek

**Twierdzenie 2 (Leibniza).** *Jeżeli w szeregu naprzemiennym ciąg $\{a_n\}$ monotonicznie dąży do zera, to szereg jest zbieżny.*

DOWÓD. Wystarczy przyjąć w twierdzeniu 1

$$b_n = (-1)^{n+1}.$$

Ciąg sum częściowych szeregu $(\beta)$ ma postać

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

jest więc ograniczony. □

**Przykład 2.** Z twierdzenia Leibniza wynika, że *szereg anharmoniczny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

jest zbieżny, gdyż ciąg

$$a_n = \frac{1}{n}$$

jest ciągiem malejącym zbieżnym do zera.

♡ ♡ ♡

**3. Prawo łączności dla szeregów nieskończonych.** W §1 zauważyliśmy, że w szeregu zbieżnym można w dowolny sposób łączyć wyrazy nawiasami nie zmieniając jego sumy. A kiedy można w szeregu nieskończonym opuszczać nawiasy? Odpowiedź daje

**Twierdzenie 3.** *Niech $\{n_k\}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Rozważmy szeregi*

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad\qquad (\tilde{\alpha}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_k,$$

*gdzie*

$$\tilde{a}_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1},$$
$$\tilde{a}_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k} \quad \textit{dla} \quad k \geq 2$$

*i załóżmy, że wszystkie wyrazy występujące w sumie $\tilde{a}_k$ $(k \in \mathbb{N})$ są tego samego znaku. Wówczas*

(i) *ze zbieżności szeregu $(\tilde{\alpha})$ wynika zbieżność szeregu $(\alpha)$, przy czym oba szeregi mają tą samą sumę;*

(ii) *jeżeli szereg $(\tilde{\alpha})$ jest rozbieżny do $\infty$ (do $-\infty$), to tą samą własność ma szereg $(\alpha)$.*

DOWÓD. Oznaczmy $n$-tą sumę częściową szeregu $(\alpha)$, $(\tilde{\alpha})$ przez $S_n$, $\tilde{S}_n$ odpowiednio. Zakładając, że szereg $(\tilde{\alpha})$ jest zbieżny i oznaczając przez $A$ jego sumę mamy

$$\lim_{k\to\infty} S_k = A.$$

Wobec tego ustalając dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$ można dobrać do niej wskaźnik $k_0$ tak, by dla $k \geq k_0$ zachodziła nierówność

$$A - \varepsilon < \tilde{S}_{k-1} < A + \varepsilon. \tag{10}$$

Ponieważ dla $n_{k-1} \leq n \leq n_k$ suma $S_n$ spełnia jedną z nierówności

$$\tilde{S}_{k-1} \leq S_n \leq \tilde{S}_k \qquad \text{lub} \qquad \tilde{S}_k \leq S_n \leq \tilde{S}_{k-1}$$

(zależnie od znaku wyrazów występujących w sumie $\tilde{a}_k$), z nierówności (10) wynika, że

$$A - \varepsilon < S_n < A + \varepsilon$$

dla $n \geq n_{k_0-1}$ co kończy dowód punktu (i). Dowód punktu (ii) przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

A oto krótsze, nieco mniej precyzyjne, sformułowanie twierdzenia 3:

**Twierdzenie 3'.** *W szeregu zbieżnym można opuścić nawiasy, jeżeli każdy nawias zawiera wyrazy tego samego znaku.*

**Przykład 3.** Rozważmy szereg

$$(1+\frac{1}{2})-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})-(\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\cdots . \tag{11}$$

Jest to szereg postaci $(\tilde{\alpha})$ gdzie

$$\tilde{a}_k=(-1)^{k+1}(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}).$$

Oznaczając

$$b_k=\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}$$

mamy

$$\tilde{a}_k=(-1)^{k+1}b_k,$$

szereg (11) jest więc szeregiem naprzemiennym. Ponieważ ciąg $\{b_k\}$ jest ciągiem malejącym zbieżnym do zera, na mocy twierdzenia Leibniza szereg (11) jest zbieżny i zgodnie z twierdzeniem 3 możemy w nim opuścić nawiasy. Oznaczając jego sumę przez $S$ mamy zatem

$$S=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots .$$

**Przykład 4.** Szereg postaci $(\tilde{\alpha})$

$$(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})+\cdots$$

jest oczywiście zbieżny, gdyż w każdym nawiasie suma jest równa zeru. Opuszczając nawiasy dostajemy szereg

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\cdots$$

który jest rozbieżny, gdyż jego ogólny wyraz nie dąży do zera. Twierdzenie 3 nie ma tu zastosowania, gdyż w każdym nawiasie mamy wyrazy różnych znaków.

♡ ♡ ♡

**4. Prawo przemienności dla szeregów nieskończonych.** Zaczniemy od przykładu.

**Przykład 5.** Wiemy (por Przykład 2), że szereg anharmoniczny jest zbieżny. Oznaczając jego sumę przez $s$ mamy

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=s. \tag{12}$$

Zmieńmy kolejność wyrazów szeregu (12) w taki sposób, by po każdym wyrazie dodatnim występowały dwa ujemne. Otrzymujemy w ten sposób szereg

$$(12') \qquad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots .$$

Oznaczając przez $S_k$, $S'_k$ sumy częściowe szeregów (12), (12') odpowiednio mamy

$$S'_{3k} = \sum_{n=1}^{k} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \sum_{n=1}^{k} \left( \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \frac{1}{2} S_{2k},$$

a stąd

$$\lim_{k\to\infty} S'_{3k} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} S_{2k} = \frac{1}{2} s.$$

Ponadto

$$S'_{3k+1} = S'_{3k} + \frac{1}{2k+1}, \quad S'_{3k+2} = S'_{3k+1} - \frac{1}{4k+2},$$

skąd wynika, że

$$\lim_{k\to\infty} S'_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} S'_{3k+2} = \lim_{k\to\infty} S'_{3k} = \frac{1}{2} s.$$

Ciąg $\{S'_k\}$ jest więc przeplatanką trzech ciągów zbieżnych do tej samej granicy, zatem (por. zadanie 4 rozdz.II §1)

$$\lim_{k\to\infty} S'_k = \frac{1}{2} s,$$

a to oznacza, że szereg (12') jest zbieżny i jego suma wynosi $\frac{1}{2} s$.

Przykład 5 wykazuje, że zmiana kolejności wyrazów szeregu zbieżnego może zmienić jego sumę. W przypadku nieskończonego dodawania nie zachodzi więc prawo przemienności (dla sum skończonych wynika ono z aksjomatu (1a) rozdz.I §1). Można jednak wyodrębnić klasę szeregów, dla których zachodzi prawo przemienności - są to szeregi bezwzględnie zbieżne.

Mówimy, że szereg

$$(\alpha) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest *bezwzględnie zbieżny*, jeżeli zbieżny jest szereg

$$(\alpha^*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Oczywiście każdy szereg zbieżny o wyrazach nieujemnych (lub ogólniej - mający od pewnego miejsca wyrazu tego samego znaku) jest zbieżny bezwzględnie. Zachodzi łatwe do udowodnienia

**Twierdzenie 4.** *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

DOWÓD. Mamy dla dowolnych $n, p \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|.$$

Wynika stąd, że szereg $(\alpha)$ spełnia warunek Cauchy'ego, jeżeli szereg $(\alpha^*)$ ma tą własność zaś (twierdzenie 6 §1) warunek Cauchy'ego jest równoważny zbieżności szeregu. $\square$

Istnieją szeregi zbieżne, które nie są bezwzględnie zbieżne - takie szeregi nazywamy *warunkowo zbieżnymi.* Najprostszym przykładem jest szereg anharmoniczny (Przykład 2). Szereg $(\alpha^*)$ ma tu postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

jest to więc szereg harmoniczny o którym wiemy, że jest rozbieżny (Przykład 4 §1).

Mówimy, że ciąg liczb naturalnych $\{m_n\}$ jest *permutacją zbioru liczb naturalnych*, jeżeli każda liczba naturalna występuje w nim dokładnie raz. O szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}$$

mówimy wówczas, że *powstał z szeregu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*przez zmianę kolejności wyrazów.*

**Twierdzenie 5.** *Jeżeli w szeregu bezwzględnie zbieżnym zmienimy kolejność wyrazów to otrzymany szereg pozostaje bezwzględnie zbieżny i ma tą samą sumę, co szereg wyjściowy.*

Twierdzenie to można sformułować krócej

**Twierdzenie 5'.** *W szeregu bezwzględnie zbieżnym można zmieniać kolejność wyrazów.*

DOWÓD. Ponieważ szereg $(\alpha^*)$ jest zbieżny, zgodnie z twierdzeniem 4 §1 do ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $N$ tak, by dla $k > N$ zachodziła nierówność

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| < \varepsilon. \tag{13}$$

Oznaczmy odpowiednio przez $S_n$, $T_n$ sumy częściowe szeregów

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}.$$

Ustalając $k > N$ możemy dobrać $n_k \geq k$ tak, by dla $n > n_k$ w sumie $T_n$ występowały wszystkie wyrazy $a_1, \ldots, a_{k-1}$. Wówczas w różnicy $S_n - T_n$ wyrazy te ulegną redukcji, skąd wynika wobec (13), że

$$|S_n - T_n| < \varepsilon \tag{14}$$

dla $n > n_k$. Zgodnie z twierdzeniem 4 szereg $(\alpha)$ jest zbieżny co oznacza, że ciąg $\{S_n\}$ ma granicę. Z nierówności (14) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n,$$

a więc szereg $(\beta)$ jest również zbieżny i ma tą samą sumę co szereg $(\alpha)$. Aby udowodnić, że szereg $(\beta)$ jest bezwzględnie zbieżny wystarczy okazać, że szereg

$$(\beta^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m_n}|$$

jest zbieżny. Zauważmy jednak, że szereg

$$(\alpha^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

jest bezwzględnie zbieżny jako szereg o wyrazach nieujemnych i możemy do niego zastosować udowodnioną już część twierdzenia. Wynika z niej, że szereg $(\beta^*)$ jest również zbieżny, co kończy dowód. □

W Przykładzie 5 pokazaliśmy, że w szeregu warunkowo zbieżnym zmiana kolejności wyrazów może zmienić jego sumę. Nie jest to przypadek lecz ogólna prawidłowość, zachodzi bowiem następujące

**Twierdzenie 6 (Riemanna).** [2] *Załóżmy, że szereg*

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*jest warunkowo zbieżny. Wówczas*

(i) *obierając dowolnie liczbę rzeczywistą $A$ możemy tak zmienić kolejność wyrazów w szeregu $(\alpha)$ by otrzymać szereg zbieżny o sumie $A$;*

(ii) *można tak zmienić kolejność wyrazów w szeregu $(\alpha)$ aby otrzymać szereg rozbieżny do $\infty$ lub do $-\infty$.*

♡ ♡ ♡

[2] Bernhard Riemann (1826 - 1866), wybitny matematyk niemiecki, autor fundamentalnych prac z zakresu teorii funkcji zmiennej zespolonej, szeregów trygonometrycznych oraz geometrii, od 1859 r. profesor uniwersytetu w Getyndze. Sformułował nie udowodnioną do dziś hipotezę dotyczącą funkcji dzeta.

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że w szeregu $(\alpha)$ występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele wyrazów ujemnych,w przeciwnym wypadku byłby on bezwzględnie zbieżny wbrew założeniu. Przyjmując

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n & \text{gdy} \quad a_n > 0, \\ 0 & \text{gdy} \quad a_n \le 0, \end{cases}$$
$$q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} -a_n & \text{gdy} \quad a_n < 0, \\ 0 & \text{gdy} \quad a_n \ge 0 \end{cases}$$

stwierdzamy łatwo, że oba szeregi o wyrazach nieujemnych

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q_n \tag{15}$$

są rozbieżne do $\infty$. Mamy bowiem

$$a_n = p_n - q_n, \qquad |a_n| = p_n + q_n,$$

zatem zbieżność jednego z szeregów (15) pociągałaby za sobą zbieżność drugiego, a stąd wynikałaby bezwzględna zbieżność szeregu $(\alpha)$ wbrew założeniu.

Dowód zaczniemy od punktu (i). Przyjmijmy

$$P_1 = p_1 + \cdots + p_{k_1}$$

obierając wskaźnik $k_1$ w taki sposób, by

$$p_1 + \cdots + p_s \begin{cases} \le A & \text{dla} \quad s = k_1 - 1, \\ > A & \text{dla} \quad s = k_1 \end{cases}$$

(jeżeli $p_1 > A$, to wystarczy obrać $k_1 = 1$). Następnie obierzmy wskaźnik $m_1$ tak, by

$$P_1 - (q_1 + \cdots + q_s) \begin{cases} \ge A & \text{dla} \quad s < m_1, \\ < A & \text{dla} \quad s = m_1 \end{cases}$$

i oznaczmy

$$Q_1 = q_1 + \cdots + q_{m_1}.$$

Mamy zatem

$$P_1 > A, \qquad A - q_{m_1} \le P_1 - Q_1 < A.$$

Powtarzając opisane postępowanie utwórzmy wyrażenie

$$P_2 = p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2}$$

w taki sposób, by

$$P_1 - Q_1 + (p_{k_1+1} + \cdots + p_s) \begin{cases} \le A & \text{dla} \quad k_1 < s < k_2, \\ > A & \text{dla} \quad s = k_2, \end{cases}$$

wówczas

$$A < P_1 - Q_1 + P_2 \leq A + p_{k_2}.$$

Następnie obierzmy wskaźnik $m_2$ tak, by

$$P_1 - Q_1 + P_2 - (q_{m_1+1} + \cdots + q_s) \begin{cases} \geq A & \text{dla} \quad m_1 < s < m_2, \\ < A & \text{dla} \quad s = m_2, \end{cases}$$

i niech

$$Q_2 = q_{m_1+1} + \cdots + q_{m_2},$$

wówczas

$$A - q_{m_2} \leq P_1 - Q_1 + P_2 - Q_2 < A.$$

Opisana konstrukcja sum $P_1,\ Q_1,\ P_2,\ Q_2$ jest wykonalna dzięki rozbieżności obu szeregów (15) - oczywiście tą samą własność mają szeregi powstałe z nich przez skreślenie pewnej skończonej ilości wyrazów. Ciągi sum częściowych tych szeregów są rozbieżne do $\infty$ i wobec tego sumując dostatecznie dostatecznie dużą ilość wyrazów można przekroczyć każdą z góry daną liczbę. Kontynuując tą konstrukcję możemy utworzyć dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$ sumy

$$S_{2r} = P_1 - Q_1 + P_2 - Q_2 + \cdots + P_r - Q_r, \qquad S_{2r-1} = P_1 - Q_1 + P_2 - Q_2 + \cdots + P_r$$

gdzie

$$P_j = p_{k_{j-1}+1} + \cdots + p_{k_j}, \qquad Q_j = q_{m_{j-1}+1} + \cdots + q_{m_j},$$

przy czym zachodzą nierówności

$$k_j \geq j, \qquad m_j \geq j \tag{16}$$

oraz

$$A < S_{2r-1} \leq A + p_{k_r}, \qquad A - q_{m_r} \leq S_{2r} < A. \tag{17}$$

Oczywiście każdy wyraz szeregu $(\alpha)$ znajdzie się w pewnej sumie $P_j$ lub w pewnej sumie $-Q_j$. Z nierówności (16) wynika, że ciągi wskaźników $\{k_j\},\ \{m_j\}$ są rozbieżne do $\infty$. Ponieważ na mocy założenia zbieżności szeregu $(\alpha)$ jego ogólny wyraz $a_n$ dąży do zera przy $n \to \infty$, mamy

$$\lim_{r\to\infty} p_{k_r} = \lim_{r\to\infty} q_{m_r} = 0.$$

Do dowolnego $\varepsilon > 0$ można więc dobrać liczbę $R$ tak, by dla $r > R$ zachodziły nierówności

$$0 < p_{k_r} < \varepsilon, \qquad 0 < q_{m_r} < \varepsilon$$

a to oznacza wobec (17), że

$$A < S_{2r-1} < A + \varepsilon, \qquad A - \varepsilon < S_{2r} < A$$

dla $r > R$. Zatem

$$\lim_{r\to\infty} S_{2r-1} = \lim_{r\to\infty} S_{2r} = A. \tag{18}$$

Rozważmy teraz szereg

$$P_1 - Q_1 + P_2 - Q_2 + \cdots + P_r - Q_r + \cdots . \tag{19}$$

Ciąg jego sum częściowych jest przeplatanką ciągów $\{S_{2r-1}\}$ oraz $\{S_{2r}\}$ więc na mocy (18) jest on zbieżny do granicy $A$ (por. zadanie 4 rozdz.II §1). Mamy zatem

$$\begin{aligned}&(p_1 + \cdots + p_{k_1}) - (q_1 + \cdots + q_{m_1}) + (p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2}) - (q_{m_1+1} + \cdots + q_{m_2}) + \\ &\cdots + (p_{k_{r-1}+1} + \cdots + p_{k_r}) - (q_{m_{r-1}+1} + \cdots + q_{m_r}) + \cdots = A.\end{aligned} \tag{20}$$

Zgodnie z twierdzeniem w szeregu (20) można opuścić nawiasy nie zmieniając jego sumy. Otrzymany w ten sposób szereg zawiera wszystkie wyrazy szeregu ($\alpha$) lecz w zmienionej kolejności i jego suma jest równa danej z góry liczbie A. Punkt (i) został udowodniony.

Przechodząc do punktu (ii) pokażemy, że zmieniając odpowiednio kolejność wyrazów szeregu ($\alpha$) można otrzymać szereg rozbieżny do $\infty$. Wobec rozbieżności pierwszego z szeregów (15) możemy utworzyć ciąg sum

$$P_1 = p_1 + \cdots + p_{k_1}, \quad P_j = p_{k_{j-1}+1} + \cdots + p_{k_j} \qquad (j = 2, 3, \dots)$$

tak, aby

$$\begin{aligned}&P_1 > 1, \\ &S_{2r-1} = P_1 - q_1 + P_2 - q_2 + \cdots + P_{r-1} - q_{r-1} + P_r > r \quad \text{dla} \quad r = 2, 3, \dots .\end{aligned} \tag{21}$$

Z nierówności (21) wynika, że

$$S_{2r} = P_1 - q_1 + P_2 - q_2 + \cdots + P_r - q_r > r - q_r. \tag{22}$$

Ponieważ podobnie jak w dowodzie punktu (i) stwierdzamy, że

$$\lim_{r\to\infty} q_r = 0$$

z oszacowań (21), (22) wynika, że

$$\lim_{r\to\infty} S_{2r} = \lim_{r\to\infty} S_{2r-1} = \infty. \tag{23}$$

Ciąg sum częściowych szeregu

$$P_1 - q_1 + P_2 - q_2 + \cdots + P_r - q_r + \cdots \tag{24}$$

jest przeplatanką ciągów $\{S_{2r}\}$ i $\{S_{2r-1}\}$ zatem wobec (23) jest również rozbieżny do $\infty$. Wobec tego szereg (24), który możemy zapisać inaczej w postaci

$$(24') \quad (p_1+\cdots+p_{k_1})-q_1+(p_{k_1+1}+\cdots+p_{k_2})-q_2+\cdots+(p_{k_{r-1}+1}+\cdots+p_{k_r})-q_r+\cdots$$

jest rozbieżny do nieskończoności i zgodnie z twierdzeniem 3 to samo dotyczy szeregu powstałego z (24') przez opuszczenie nawiasów. Szereg ten zawiera wszystkie wyrazy szeregu $(\alpha)$ lecz w zmienionej kolejności i jest rozbieżny do $\infty$.

Proponujemy, by Czytelnik samodzielnie zakończył dowód punktu (ii) wykazując, że przez odpowiednią zmianę kolejności wyrazów w szeregu $(\alpha)$ można otrzymać szereg rozbieżny do $-\infty$. □

♡ ♡ ♡

**5. Mnożenie szeregów nieskończonych.** Gdy mnożymy przez siebie dwie sumy skończone, reguła jest prosta i dobrze znana Czytelnikowi z kursu szkolnego: mnożymy każdy wyraz pierwszej sumy przez każdy wyraz drugiej sumy a następnie dodajemy otrzymane iloczyny. Reguła ta wynika z aksjomatu (9a) zapewniającego rozdzielność mnożenia względem dodawania (rozdz. I §1 punkt 1). Powstaje pytanie, czy można ją przenieść na przypadek mnożenia przez siebie dwóch szeregów nieskończonych

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Częściową odpowiedź daje

**Twierdzenie 7.** *Załóżmy, że oba szeregi* $(\alpha)$, $(\beta)$ *są bewzględne zbieżne i niech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

*oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A^*, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = B^*.$$

*Załóżmy następnie, że ciąg* $\{p_n\}$ *jest utworzony z iloczynów częściowych postaci* $a_k b_m$ *ustawionych w dowolnej kolejności. Wówczas szereg*

$$(\gamma) \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

*jest również bezwzględnie zbieżny i jego suma jest równa* $AB$.

DOWÓD. Niech $P_n^*$ oznacza $n$-tą sumę częściową szeregu

$$(\gamma^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |p_n|.$$

W sumie tej występują iloczyny (być może nie wszystkie) postaci $|a_k||b_m|$ gdzie $k \leq k_n$, $m \leq m_n$, wobec tego

$$P_n^* \leq (|a_1| + \cdots + |a_{k_n}|)(|b_1| + \cdots + |b_{m_n}|) \leq A^*B^*. \tag{25}$$

Z nierówności (25) wynika, że szereg $(\gamma^*)$ jest zbieżny, gdyż jest to szereg o wyrazach nieujemnych i jego ciąg sum częściowych jest ograniczony z góry. Zatem szereg $(\gamma)$ jest bezwzględnie zbieżny i możemy w nim

a.) dowolnie zmieniać kolejność wyrazów (twierdzenie 5),

b.) dowolnie łączyć wyrazy nawiasami (twierdzenie 5 §1) nie zmieniając jego sumy.

W szczególności rozważmy szereg

$$(\delta) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} d_n,$$

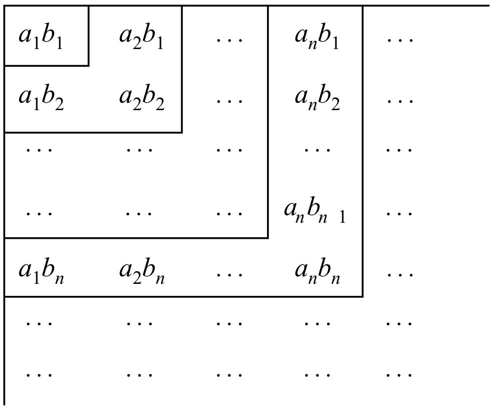
gdzie

$$d_1 = a_1b_1, \quad d_2 = a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1, \ldots$$
$$d_n = a_1b_n + a_2b_n + \cdots + a_nb_n + a_nb_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

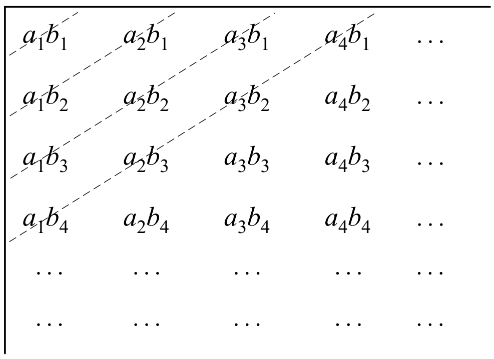
W szeregu tym występuje każdy iloczyn $a_kb_m$ dokładnie raz, zatem zgodnie z tym, co udowodniliśmy przed chwilą, jego suma jest równa sumie szeregu $(\gamma)$. Oznaczając $n$-tą sumę częściową szeregu $(\alpha)$, $(\beta)$ $(\delta)$ odpowiednio przez $A_n$, $B_n$, $D_n$ mamy

$$D_n = A_n \cdot B_n,$$

skąd po przejściu do granicy przy $n \to \infty$ wynika, że suma szeregu $(\delta)$ ( a więc i szeregu $(\gamma)$ jest równa $AB$. $\square$




[rys. 53]




[rys. 54]

**Uwaga.** Na rys. 53 pokazano jak można utworzyć z iloczynów częściowych $a_kb_m$ nieograniczoną prostokątną tablicę. Iloczyny występujące w sumach $d_1$, $d_2, \ldots d_n$ są obramowane grubszą linią.

Z twierdzenia 7 wynika, że mnożąc szeregi bezwzględnie zbieżne możemy w dowolny sposób porządkować i łączyć w nawiasy iloczyny częściowe występujące w tablicy na rys. 53. Specjalnie wygodny jest sposób podany schematycznie na rys. 54: łączymy w nawias wyrazy leżące na tej samej przekątnej zaznaczonej na rysunku przerywaną linią. Otrzymujemy w ten sposób szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{26}$$

gdzie

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1. \tag{27}$$

Równość (27) można zapisać w postaci skróconej

$$c_n = \sum_{k+m=n+1} a_k b_m = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}. \tag{27'}$$

Szereg określony wzorami (26), (27) nazywamy *iloczynem Cauchy'ego* szeregów $(\alpha)$, $(\beta)$. Z twierdzenia 7 otrzymujemy jako wniosek

**Twierdzenie 8.** *Jeżeli szeregi $(\alpha)$, $(\beta)$ są bezwzględnie zbieżne i sumy ich wynoszą $A$, $B$ odpowiednio, to ich iloczyn Cauchy'ego jest również bezwzględnie zbieżny i jego suma jest równa $AB$.*

**Uwaga.** Czasami rozważamy szeregi zaczynające się od wyrazu ze wskaźnikiem zero

$$(\alpha_0) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad (\beta_0) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_m.$$

Wówczas ich iloczyn Cauchy'ego ma postać

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$\begin{array}{|cccc}
\hline
a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 \\
a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\
a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\
a_0b_3 & a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3
\end{array}$$

[rys. 55]

gdzie

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 \tag{28}$$

czyli

$$c_n = \sum_{k+m=n} a_k b_m = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \tag{28'}$$

(por. rys. 55). Oczywiście twierdzenie pozostaje prawdziwe przy takim ponumerowaniu wyrazów.

**Przykład 6.** Znajdźmy iloczyn Cauchy'ego szeregów $(\alpha)$, $(\beta)$ przyjmując

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Oba szeregi $(\alpha)$, $(\beta)$ mają więc tą samą postać

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots . \tag{29}$$

Zgodnie ze wzorem (27')

$$c_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}}.$$

Wyrażenie $|c_n|$ można łatwo oszacować z dołu opierając się na nierówności

$$2ab \le a^2 + b^2, \tag{30}$$

która jest równoważna oczywistej nierówności

$$(a-b)^2 \ge 0.$$

Korzystając z (30) dostajemy

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}} \ge \frac{2n}{n+1} \ge 1. \tag{31}$$

Z oszacowania (31) widać, że utworzony iloczyn Cauchy'ego nie jest zbieżny, gdyż jego ogólny wyraz $c_n$ nie dąży do zera przy $n \to \infty$ (por. twierdzenie 8 §1). Zauważmy, że zbieżność szeregu (29) wynika z twierdzenia Leibniza, gdyż jest to szereg naprzemienny a ciąg $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ dąży monotonicznie do zera. Natomiast szereg ten nie jest bezwzględnie zbieżny, szereg $(\alpha^*)$ ma bowiem postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

jest więc rozbieżny (por. Przykład 1 §2). W rozważanym przykładzie nie są zatem spełnione założenia twierdzenia 8.

**Przykład 7.** Znajdźmy iloczyn Cauchy'ego szeregów $(\alpha_0)$, $(\beta_0)$ przyjmując dla ustalonych $x,\ y \in \mathbb{R}$

$$a_n = \frac{x^n}{n!}, \qquad b_n = \frac{y^n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Ze wzoru (28') mamy

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k},$$

zatem (por. punkt 8 rozdz. I §1)

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

czyli

$$c_n = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Iloczyn Cauchy'ego jest zatem szeregiem postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}. \tag{32}$$

Zauważmy, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!}$$

jest zbieżny dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, bowiem oznaczając jego ogólny wyraz przez $d_n$ i stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{|t|}{n+1} = 0.$$

Zatem oba szeregi $(\alpha_0)$, $(\beta_0)$ są w naszym przykładzie bezwzględnie zbieżne i możemy zastosować twierdzenie 8. Oznaczając

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{33}$$

mamy wobec tego

$$E(x)E(y) = E(x+y) \tag{34}$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$. Czytelnik zauważy na pewno, że tożsamość (34) prawdziwa jest dla funkcji wykładniczej. W dalszym ciągu zobaczymy, że rzeczywiście funkcja $E(t)$ określona jako suma szeregu wzorem (33) jest funkcją wykładniczą tzn. że zachodzi równość

$$E(t) = e^t \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

♡ ♡ ♡

**Zadania.**

1. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a.)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \qquad \text{b.)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$$

w zależności od parametru $x \in \mathbb{R}$.

2. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$$

w zależności od parametru $x \in \mathbb{R}$. Czy szereg ten jest bezwzględnie zbieżny?

3. Dla jakich $\alpha > 0$ szereg o wyrazie ogólnym

$$\text{(i)} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \qquad \text{(ii)} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n(\log n)^\alpha}$$

$$\text{(iii)} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n(\log n)(\log\log n)^\alpha}$$

jest
 a.) warunkowo zbieżny,
 b.) bezwzględnie zbieżny?
Dla jakich $n$ określone jest wyrażenie $a_n$ w punktach (ii) i (iii)?

4. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

jest warunkowo zbieżny.
Wskazówka. Najpierw udowodnić, że szereg jest zbieżny po połączeniu nawiasami wyrazów tego samego znaku, następnie oprzeć się na twierdzeniu 3.

5. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

(przypominamy, że $[a]$ oznacza część całkowitą liczby $a$).
Wskazówka. Najpierw okazać, że łącząc nawiasami wyrazy tego samego znaku można badany szereg przedstawić w postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k,$$

gdzie

$$\frac{2}{k+1} < b_k < \frac{2}{k}.$$

Następnie skasować nawiasy opierając się na twierdzeniu 3.

6. Udowodnić rozbieżność szeregu naprzemiennego

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots .$$

Dlaczego twierdzenie Leibniza nie stosuje się w tym przypadku?
Wskazówka. Znaleźć sumę częściową o wskaźniku parzystym.

7. Udowodnić, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony a szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

jest bezwzględnie zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

jest również bezwzględnie zbieżny.

8. Udowodnić, że jeżeli oba szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

są zbieżne i jeden z nich jest bezwzględnie zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

jest bezwzględnie zbieżny.
Wskazówka. Oprzeć się na zadaniu 7.

9. Niech $s$ oznacza sumę szeregu anharmonicznego (Przykład 2). Udowodnić, że

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}s.$$

Wskazówka. Oznaczając przez $S_k$ sumę częściową badanego szeregu okazać najpierw, że

$$\lim_{k\to\infty} S_{3k}=\frac{3}{2}s$$

oraz że taką samą granicę mają ciągi $\{S_{3k-1}\}$ i $\{S_{3k-2}\}$.

10. Udowodnić indukcyjnie nierówność

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k}{4}\qquad (k\in\mathbb{N}).$$

11. W szeregu anharmonicznym (Przykład 2) przestawiamy wyrazy w następujący sposób:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^8}-1+\frac{1}{2^8+2}+\cdots+\frac{1}{2^{16}}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{8(k-1)}+2}+\cdots+\frac{1}{2^8k}-\frac{1}{2k-1}+\cdots.$$

Udowodnić, że otrzymany szereg jest rozbieżny.
Wskazówka. Oznaczając

$$q_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^8}-1,\qquad q_k=\frac{1}{2^{8(k-1)}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{8k}}-\frac{1}{2k-1}\quad (k\geq 2)$$

i opierając się na zadaniu 10 udowodnić, że

$$q_1+q_2+\cdots+q_k>k.$$

12. Opierając się na zadaniu 55 rozdz. III §4 udowodnić, że

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\log k+\frac{1}{2}C+\alpha_k,$$
$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}=\log 2+\frac{1}{2}\log k+\frac{1}{2}C+\beta_k,$$

gdzie $C$ jest stałą Eulera a ciągi $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ są zbieżne do zera.

13. Udowodnić, że szereg anharmoniczny (Przykład 2) ma sumę $\log 2$.
Wskazówka. Oznaczając przez $S_n$ sumę częściową szeregu anharmonicznego udowodnić najpierw, że

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \log 2$$

opierając się na zadaniu 12.

14. W szeregu anharmonicznym (Przykład 2) zmieniamy kolejność wyrazów następująco: najpierw dodajemy $p$ wyrazów dodatnich, potem $q$ wyrazów ujemnych, potem ponownie $p$ wyrazów dodatnich i $q$ wyrazów ujemnych itd. Udowodnić, że otrzymany szereg ma sumę $\log(2\sqrt{p/q})$. Porównać z Przykładem 5 oraz z zadaniami 9, 13.
Wskazówka. Najpierw rozważyć szereg, w którym wyrazy jednakowego znaku połączono nawiasami i znaleźć jego sumy częściowe $S_{2n}$, $S_{2n-1}$ opierając się na zadaniu 12. Następnie wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \log(2\sqrt{p/q})$$

i skasować nawiasy opierając się na twierdzeniu 3.

15. Sprawdzić, że zachodzi równość

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

(przyjmujemy $0! = 1$).

16. Niech

$$c_0 = 1, \qquad c_n = y^n + xy^{n-1} + x^2y^{n-2} + \cdots + x^{n-1}y + x^n \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

jest zbieżny dla $x, y \in (0, 1)$ oraz znaleźć jego sumę.
Wskazówka. Przedstawić badany szereg jako iloczyn Cauchy'ego dwóch szeregów.

17. Zakładając, że $|x| < 1$ znaleźć kwadrat (tj. iloczyn przez siebie) w sensie Cauchy'ego szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

i podać jego sumę.

18. Załóżmy, że $|x| < 1$ oraz że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

jest bezwzględnie zbieżny. Oznaczając sumę tego szeregu przez $D(x)$ udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty}(d_0 + d_1 + \cdots + d_n)x^n$$

jest bezwzględnie zbieżny oraz że jego suma jest równa

$$\frac{D(x)}{1-x}.$$

Wskazówka - jak w zadaniu 16.