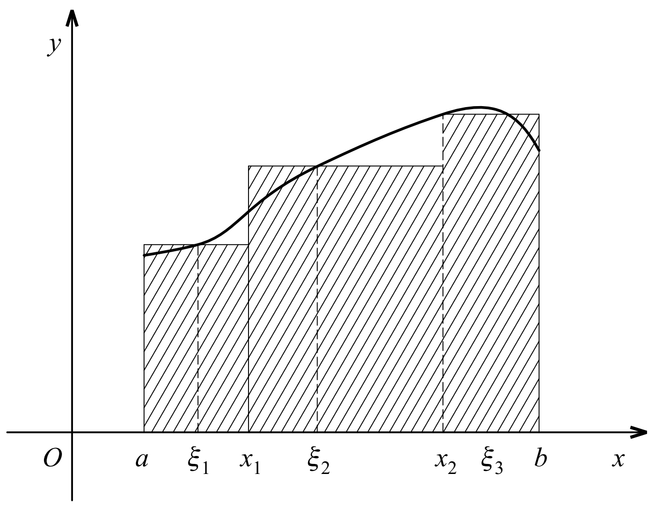
Rachunek całkowy.

♡ ♡ ♡

§1. Całka funkcji ciągłej.

1. Obliczanie pola pod wykresem funkcji nieujemnej. Postawmy następujące zadanie: Dana jest funkcja $f(x)$ ciągła i nieujemna w przedziale $[a, b]$. Obliczyć pole obszaru płaskiego Ω ograniczonego wykresem funkcji f, osią x-ów i prostymi $x = a$, $x = b$ równoległymi do osi y-ów (rys. 56). Zaczniemy od opisania prostej konstrukcji, która pozwala znaleźć przybliżoną wartość szukanego pola.



[rys. 56]

1^0 Dzielimy przedział $[a, b]$ na k mniejszych przedziałów przy pomocy punktów

$$x_1, x_2, \ldots, x_k.$$

Podział ten (oznaczymy go jako Π) możemy zapisać przy pomocy nierówności

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b. \tag{1}$$

2^0 W każdym z mniejszych przedziałów $[x_{j-1}, x_j]$ wybieramy *punkt pośredni*

$$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j] \qquad (j = 1, 2, \dots, k).$$

3^0 Znajdujemy wartość funkcji $f(\xi_j)$ i obliczamy pole P_j prostokąta, którego jeden bok stanowi odcinek $[x_{j-1},\ x_j]$ leżący na osi x-ów a drugi bok ma długość $f(\xi_j)$. Oznaczając

(2) $$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

mamy więc

$$P_j = f(\xi_j)\Delta x_j.$$

4^0 Suma pól wszystkich prostokątów P_j

$$S = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\Delta x_j$$

daje przybliżoną wartość pola obszaru Ω. Oczywiście przybliżenie jest tym lepsze im drobniejszy jest podział Π tzn. im mniejsza jest liczba

$$d = \max_j \Delta x_j.$$

Liczbę tą nazwiemy *średnicą podziału* Π.

Rozważmy teraz ciąg podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a, b]$ i niech $d(\Pi_n)$ oznacza średnicę podziału Π_n. Założymy, że

(3) $$\lim_{n\to\infty} d(\Pi_n) = 0.$$

Ciąg podziałów spełniający warunek (3) nazywamy *ciągiem normalnym podziałów.* Dla każdego podziału Π_n możemy teraz wykonać opisaną konstrukcję i utworzyć sumę S_n wprowadzoną w punkcie 4^0. Z warunku (3) wynika, że im większe jest n tym drobniejszy jest podział Π_n a zatem tym lepiej suma S_n przybliża pole obszaru Ω. Jeżeli istnieje granica

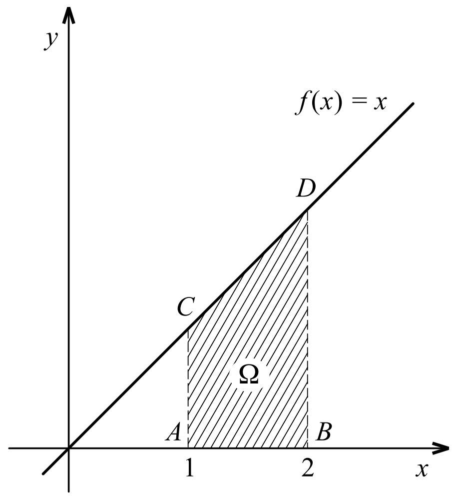
(4) $$\lim_{n\to\infty} S_n = G,$$

to możemy uważać, że liczba G określa pole obszaru Ω.

Postępując bardziej formalnie możemy przyjąć równość (4) jako *definicję pola obszaru* Ω. Czytelnik spotkał się już z pojęciem pola figury płaskiej w kursie szkolnym, obliczając pola różnego typu wielokątów. Jak widać z rys. 56, przyjęta przez nas definicja pola pozwala rozważać znacznie ogólniejszą klasę figur płaskich. W dalszym ciągu zobaczymy, że w przypadku wielokątów nowa definicja pola pokrywa się z definicją szkolną (por. Przykłady 1, 2, 4 oraz zadanie 27).

Przykład 1. Rozważmy funkcję

$$f(x) = x$$



[rys. 57]

w przedziale $[1, 2]$ i niech Π_n oznacza podział odcinka $[1, 2]$ na n równych części. Punkty podziału (1) są zatem określone wzorem

$$x_j = 1 + \frac{j}{n} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n),$$

przy czym zgodnie z (2)

$$\Delta x_j = \frac{1}{n}.$$

Wobec tego

$$d(\Pi_n) = \frac{1}{n}$$

i rozważany ciąg podziałów spełnia warunek (3), jest więc ciągiem normalnym podziałów odcinka $[1, 2]$. Przy ustalonym n punkt pośredni ξ_j obierzemy w lewym końcu przedziału $[x_{j-1}, x_j]$ tzn. przyjmiemy

$$\xi_j = 1 + \frac{j-1}{n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Suma S_n (nazwiemy ją *sumą przybliżoną*) ma postać

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{j-1}{n}\right) \frac{1}{n},$$

czyli po sprowadzeniu wyrażenia w nawiasie do wspólnego mianownika

$$S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} (n + j - 1)$$

co można inaczej zapisać

$$S_n = \frac{1}{n^2}(n^2 + p_n) \tag{5}$$

gdzie

$$p_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1). \tag{6}$$

Ponieważ (por. rozdz.I §1 zadanie 10(a))

$$p_n = \frac{(n-1)n}{2}, \tag{7}$$

więc z równości (5) dostajemy

$$S_n = 1 + \frac{n-1}{2n}$$

i po przejściu do granicy

$$G = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}.$$

Obliczona liczba G stanowi pole obszaru Ω (rys. 57), który w naszym przykładzie jest trapezem o podstawach AC, BD i wysokości AB. Oczywiście możemy znaleźć pole tego trapezu stosując regułę znaną z kursu szkolnego. Otrzymujemy ten sam wynik $\frac{3}{2}$.

Przykład 2. Rozważając tą samą funkcję f i ten sam ciąg podziałów przedziału $[1,2]$ co w Przykładzie 1, obierzmy inaczej punkty pośrednie przyjmując

a.) $\xi'_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)$ (środek przedziału $[x_{j-1}, x_j]$)

lub

b.) $\xi''_j = x_j$ (prawy koniec przedziału $[x_{j-1}, x_j]$.

W przypadku a.) mamy

$$\xi'_j = 1 + \frac{2j-1}{2n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

suma przybliżona ma więc postać

$$S'_n = \sum_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{2j-1}{2n}\right) \cdot \frac{1}{n},$$

czyli po prostych przekształceniach

$$S'_n = 1 + \frac{q_n}{2n^2},$$

gdzie

$$q_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1).$$

Wyrażenie q_n można przedstawić w postaci

$$q_n = (1 + 2 + 3 + \cdots + 2n - 1) - 2(1 + 2 + \cdots + (n - 1)),$$

co daje (por. wzory (6), (7))

$$q_n = \frac{2n(2n-1)}{2} - 2\frac{n(n-1)}{2},$$

czyli po skróceniu i redukcji

$$q_n = n^2.$$

Zatem

$$S'_n = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

niezależnie od n.

W przypadku b.) dostajemy

$$\xi''_j = 1 + \frac{j}{n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

suma przybliżona ma więc postać

$$S''_n = \sum_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{j}{n}\right) \cdot \frac{1}{n},$$

czyli po przekształceniu

$$S''_n = 1 + \frac{p_{n+1}}{n^2},$$

gdzie wyrażenie p_{n+1} jest określone wzorem (6). Wobec tego

$$S''_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

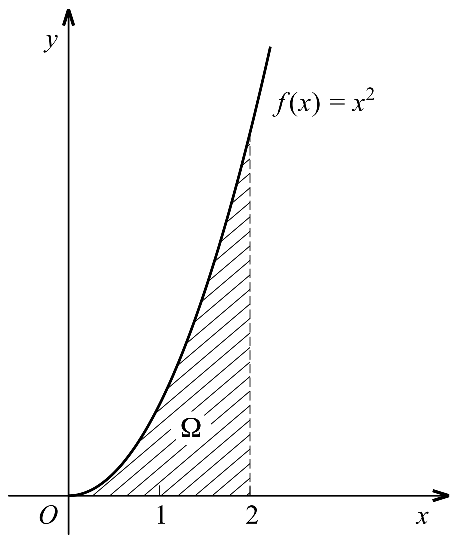
i podobnie jak poprzednio otrzymujemy po przejściu do granicy

$$\lim_{n\to\infty} S''_n = \frac{3}{2}.$$

Zauważmy, że w Przykładach 1, 2 otrzymujemy tą samą granicę ciągu sum przybliżonych niezależnie od sposobu, w jaki obieramy punkty pośrednie.

Przykład 3. Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^2$$



[rys. 58]

w przedziale $[0, 2]$ i niech Π_n oznacza podział odcinka $[0, 2]$ na n równych części. Punkty podziału są określone wzorem

$$x_j = \frac{2j}{n} \qquad (j = 0, 1, \dots, n),$$

stąd

$$\Delta x_j = \frac{2}{n} \qquad (j = 1, 2, \dots, n),$$

a więc

$$d(\Pi_n) = \frac{2}{n},$$

skąd widać, że warunek (3) jest spełniony. Ciąg $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów odcinka $[0, 2]$. Przy ustalonym n obierzemy punkt pośredni ξ_j w lewym końcu przedziału $[x_{j-1}, x_j]$, zatem

$$\xi_j = \frac{2(j-1)}{n} \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

i suma przybliżona ma postać

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{4(j-1)^2}{n^2} \cdot \frac{2}{n},$$

czyli

$$S_n = \frac{8}{n^3} r_n,$$

gdzie

$$r_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2.$$

Ponieważ (por. rozdz. I §1 zadanie 10(b))

$$r_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

otrzymujemy po skróceniu

$$S_n = \frac{4}{3}\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2},$$

a więc po przejściu do granicy

$$G = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{8}{3}.$$

Zatem pole obszaru Ω zakreskowanego na rys. 58 wynosi $\frac{8}{3}$.

Przykład 4. Wróćmy do funkcji

$$f(x) = x$$

rozważanej w przykładach 1, 2. Ciąg podziałów $\{\Pi_n\}$ określimy następująco: Podział Π_1 polega na podzieleniu przedziału $[1,2]$ na połowy; dokonując podziału Π_2 każdy z otrzymanych poprzednio odcinków dzielimy ponownie na połowy - zatem cały przedział $[1,2]$ zostaje podzielony na 4 równe części; ogólnie, każdy podział Π_n otrzymujemy dzieląc na połowy każdy z odcinków otrzymanych przy podziale Π_{n-1} - zatem cały przedział $[1,2]$ zostaje podzielony na 2^n równych części. Utworzony w taki sposób ciąg podziałów nazywamy *ciągiem dwójkowym*. Punkty x_j otrzymane przy podziale Π_n przy ustalonym n mają postać

$$x_j = 1 + \frac{j}{2^n} \qquad (j = 0, 1, \ldots, 2^n),$$

a stąd

$$\Delta x_j = \frac{1}{2^n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2^n),$$

a więc

$$d(\Pi_n) = \frac{1}{2^n},$$

skąd widać, że warunek (3) jest spełniony. Ciąg dwójkowy podziałów jest ciągiem normalnym. Przy ustalonym n jako punkt pośredni ξ_j obierzemy lewy koniec przedziału $[x_{j-1}, x_j]$, zatem

$$\xi_j = 1 + \frac{j-1}{2^n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2^n)$$

i wobec tego suma przybliżona ma postać

$$S_n = \sum_{j=1}^{2^n} \left(1 + \frac{j-1}{2^n}\right) \cdot \frac{1}{2^n},$$

co po przekształceniu daje

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^{2n}} \cdot p_{2^n}$$

przy czym zgodnie z (6), (7)

$$p_{2^n} = \frac{2^n(2^n - 1)}{2}.$$

Wobec tego

$$S_n = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Po przejściu do granicy dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}$$

a więc ten sam wynik co w przykładach 1, 2.

2. Całka funkcji ciągłej w przedziale domkniętym. Załóżmy teraz, że f jest dowolną funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ mogącą przyjmować wartości różnych znaków. Powtarzając konstrukcję opisaną w punkcie 1 rozważmy podział Π przedziału $[a, b]$ opisany nierównościami

(8) $$\Pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$$

oraz układ punktów pośrednich $\xi(\Pi) = \{\xi_j\}$ spełniających warunek

$$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j] \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

i utwórzmy sumę przybliżoną

(9) $$S(f, \Pi, \xi(\Pi)) = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\Delta x_j,$$

gdzie, podobnie jak poprzednio,

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Podział Π opisany nierównościami (8) możemy utożsamić ze zbiorem punktów

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}.$$

Będziemy mówili, że podział $\bar{\Pi} = \{\bar{x}_o, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r\}$ jest *zagęszczeniem* podziału Π, jeżeli zawiera on wszystkie punkty tego podziału tzn. jeżeli spełniony jest warunek

$$\Pi \subset \bar{\Pi}.$$

Udowodnimy

Twierdzenie 1. *Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. Wówczas istnieje liczba rzeczywista G taka, że dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a, b]$ i dowolnego układu punktów pośrednich $\xi(\Pi_n)$*

$$G = \lim_{n\to\infty} S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)). \tag{10}$$

DOWÓD. Dla uproszczenia zapisu przyjmiemy oznaczenie

$$S_n = S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)). \tag{11}$$

Zaczniemy od udowonienia, że ciąg $\{S_n\}$ ma granicę (być może zależną od sposobu, w jaki zostały obrane ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ i punkty pośrednie $\xi(\Pi_n)$). Dowód oprzemy na następującym lemacie:

Lemat. *Do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla dowolnych podziałów Π, $\bar{\Pi}$ spełniających warunki*

$$d(\Pi) < \delta, \quad \Pi \subset \bar{\Pi}$$

i dowolnego wyboru punktów pośrednich $\xi(\Pi)$, $\xi(\bar{\Pi})$ zachodziła nierówność

$$|S - \bar{S}| < \varepsilon, \tag{12}$$

gdzie

$$S = S(f, \Pi, \xi(\Pi)), \qquad \bar{S} = S(f, \bar{\Pi}, \xi(\bar{\Pi})).$$

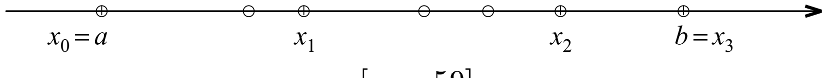
DOWÓD LEMATU. Niech

$$\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}, \qquad \bar{\Pi} = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{\bar{k}}\},$$

wówczas odpowiednie sumy przybliżone można zapisać w postaci

$$S = \sum_{s=1}^{k} f(\xi_s)\Delta x_s, \qquad \bar{S} = \sum_{s=1}^{k} \sum_{j\in A_s} f(\bar{\xi}_j)\Delta \bar{x}_j, \tag{13}$$

gdzie A_s przy ustalonym s oznacza zbiór tych wskaźników j, dla których $\bar{x}_j \in (x_{s-1}, x_s]$. Zapis ten zilustrowany jest na rys. 59, gdzie oznaczono kreseczką punkty podziału Π zaś kółeczkiem punkty jego zagęszczenia $\bar{\Pi}$.



[rys. 59]

Mamy

$$\bar{\Pi} : a = x_0 = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 = x_1 < \bar{x}_3 < \bar{x}_4 < \bar{x}_5 = x_2 < \bar{x}_6 = x_3 = b,$$

przy czym

$$A_1 = \{1, 2\}, \quad A_2 = \{3, 4, 5\}, \quad A_3 = \{6\}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta\bar{x}_1 + \Delta\bar{x}_2, \\ \Delta x_2 &= \Delta\bar{x}_3 + \Delta\bar{x}_4 + \Delta\bar{x}_5, \\ \Delta x_3 &= \Delta\bar{x}_6. \end{aligned}$$

W ogólnym przypadku

$$\Delta x_s = \sum_{j \in A_s} \Delta\bar{x}_j,$$

a stąd wobec (13)

$$|S - \bar{S}| \leq \sum_{s=1}^{k} \sum_{j \in A_s} |f(\xi_s) - f(\bar{\xi}_j)| \Delta\bar{x}_j. \tag{14}$$

Dla ustalonego s wszystkie punkty pośrednie ξ_s oraz $\bar{\xi}_j$, $j \in A_s$ leżą w przedziale $[x_{s-1}, x_s]$. Funkcja f jako funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest w tym przedziale jednostajnie ciągła, możemy więc dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by z warunku $d(\Pi) < \delta$ wynikała nierówność

$$|f(\xi_s) - f(\bar{\xi}_j)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \qquad (s = 1, \ldots, k;\ j \in A_s).$$

Wówczas z (14) dostajemy

$$|S - \bar{S}| < \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot D,$$

gdzie

$$D = \sum_{s=1}^{k} \sum_{j \in A_s} \Delta\bar{x}_j = \sum_{s=1}^{k} \Delta x_s = b - a,$$

a stąd wynika nierówność (12), co kończy dowód lematu. □

Wracając do dowodu twierdzenia 1 rozważmy dwie sumy przybliżone postaci (11) odpowiadające podziałom Π_k, Π_m i układom punktów pośrednich $\xi(\Pi_k)$, $\xi(\Pi_m)$ odpowiednio. Wspólnym zagęszczeniem podziałów Π_k, Π_m jest podział

$$\bar{\Pi} = \Pi_k \cup \Pi_m.$$

Oznaczając przez $\bar{S}$ sumę przybliżoną odpowiadającą podziałowi $\bar{\Pi}$ mamy

$$|S_k - S_m| \leq |S_k - \bar{S}| + |\bar{S} - S_m|,$$

a stąd po zastosowaniu lematu (z zastąpieniem ε przez $\frac{\varepsilon}{2}$) dostajemy

$$|S_k - S_m| < \varepsilon \tag{15}$$

o ile spełnione są nierówności

$$d(\Pi_k) < \delta, \quad d(\Pi_m) < \delta. \tag{16}$$

Ponieważ założyliśmy, że $d(\Pi_n) \to 0$ przy $n \to \infty$, do liczby δ można dobrać N tak, by dla $k, m > N$ spełniony był warunek (16). Ostatecznie widzimy, że liczba N została dobrana do ε tak, że dla $k, m > N$ spełniona jest nierówność (15) - a to oznacza, że ciąg $\{S_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny.

Rozważmy teraz dwa ciągi normalne podziałów $\{\Pi_n\}$, $\{\bar{\Pi}_n\}$, wybierzmy układy punktów pośrednich $\xi(\Pi_n)$ oraz $\xi(\bar{\Pi}_n)$ i niech

$$S_n = S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)), \qquad \bar{S}_n = S(f, \bar{\Pi}_n, \xi(\bar{\Pi}_n)).$$

Udowodniliśmy, że oba ciągi $\{S_n\}$, $\{\bar{S}_n\}$ mają granicę. Niech zatem

$$\lim_{n\to\infty} S_n = g, \qquad \lim_{n\to\infty} \bar{S}_n = \bar{g}$$

i przypuśćmy, że $g \neq \bar{g}$. Tworząc przeplatankę

$$S_1, \bar{S}_1, S_2, \bar{S}_2, \ldots, S_n \bar{S}_n, \ldots$$

otrzymujemy ciąg sum przybliżonych, który nie jest zbieżny, gdyż zawiera dwa podciągi zbieżne do różnych granic. Ciąg ten odpowiada ciągowi normalnemu podziałów przedziału $[a, b]$

$$\Pi_1, \bar{\Pi}_1, \Pi_2, \bar{\Pi}_2, \ldots, \Pi_n, \bar{\Pi}_n, \ldots$$

a więc w myśl udowodnionej już części twierdzenia powinien być zbieżny. Przypuszczenie, że granice g, $\bar{g}$ są różne prowadzi zatem do sprzeczności. Wobec tego granica ciągu $\{S_n\}$ nie może zależeć ani od wybory ciągu normalnego podziałów ani od sposobu obrania punktów pośrednich. Granica ta jest liczbą G, o której mowa w tezie twierdzenia. □

Granicę G określoną równością (10) nazywamy *całką oznaczoną* (lub krócej: *całką*) *funkcji f w przedziale* $[a, b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

(czytamy: całka od a do b $f(x)$ dx). Zgodnie z twierdzeniem 1

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) \tag{17}$$

dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a, b]$ i dowolnego wyboru punktów pośrednich $\xi(\Pi_n)$ przy założeniu, że funkcja f jest ciągła w $[a, b]$. Wyrażenie

$$S(f, \Pi, \xi(\Pi)) = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\Delta x_j$$

nazywamy *sumą przybliżoną całki* (17) odpowiadającą podziałowi Π.

3. Własności całki oznaczonej. Całka oznaczona funkcji ciągłej jest, jak wiemy, granicą pewnego ciągu sum. Z twierdzenia, które udowodnimy, widać, że całka ma własności analogiczne do własności sumy skończonej. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że f, g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a,b]$. Wówczas*

$$\text{(i)}\quad \int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\text{(ii)}\quad \int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \quad \textit{dla dowolnej stałej} \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\text{(iii)}\quad |\int_a^b f(x)\,dx| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

DOWÓD. Dla dowodu obierzmy ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ i punkty pośrednie $\xi(\Pi_n)$. Wówczas zgodnie ze wzorem (9)

$$S(f+g,\Pi_n,\xi(\Pi_n)) = S(f,\Pi_n,\xi(\Pi_n)) + S(g,\Pi_n,\xi(\Pi_n)), \tag{18}$$

$$S(cf,\Pi_n,\xi(\Pi_n)) = cS(f,\Pi_n,\xi(\Pi_n)), \tag{19}$$

$$|S(f,\Pi_n,\xi(\Pi_n))| \le S(|f|,\Pi_n,\xi(\Pi_n)). \tag{20}$$

Przechodząc do granicy przy $n \to \infty$ we wzorach (18), (19), (20) i opierając się na równości (17) dostajemy punkty (i), (ii), (iii) tezy twierdzenia. □

Uwaga. Punkty (i), (ii) wyrażają ważną własność całki zwaną *liniowością*.

W podobny sposób można udowodnić

Twierdzenie 3 (o podziale przedziału całkowania). *Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$ i niech $a < c < b$. Wówczas*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{21}$$

DOWÓD. Niech Π będzie dowolnym podziałem przedziału $[a,b]$ zawierającym punkt c tzn określonym nierównościami

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = c < x_{p+1} < \cdots < x_k = b.$$

Podział ten wyznacza dwa podziały

1^0 przedziału $[a,c]$

$$\Pi^* : a = x_0 < x_1 \cdots < x_p = c$$

oraz

2^0 przedziału $[c,b]$

$$\Pi^{**} : c = x_p < x_{p+1} < \cdots < x_k = b.$$

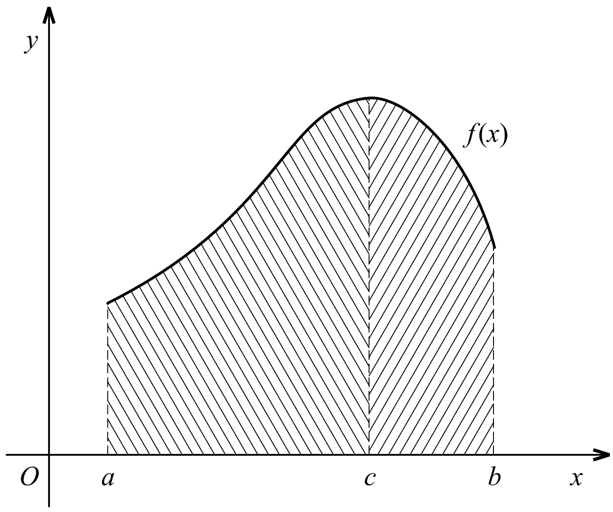
Obierając w dowolny sposób punkty pośrednie $\xi(\Pi)$ oznaczmy przez S^*, S^{**} sumy przybliżone odpowiadające podziałom Π^*, Π^{**} odpowiednio. Wówczas oczywiście

$$S(f,\Pi,\xi(\Pi)) = S^* + S^{**}. \tag{22}$$

Obierzmy teraz ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a,b]$ w taki sposób, by dla każdego n punkt c był jednym z punktów podziału Π_n (możemy to zrobić np. dzieląc każdy z przedziałów $[a,c]$ i $[c,b]$ na n równych części). Obierając dowolnie punkty pośrednie $\xi(\Pi_n)$ możemy przy ustalonym n powtórzyć rozumowanie przeprowadzone na początku dowodu. Przyjmując oznaczenie (11) mamy zgodnie z (22)

$$S_n = S_n^* + S_n^{**},$$

a stąd po przejściu do granicy przy $n \to \infty$ dostajemy w oparciu o (17) tezę twierdzenia. □



[rys. 60]

Jeżeli funkcja f jest nieujemna, twierdzenie o podziale przedziału całkowania ma prosty sens geometryczny zilustrowany na rys. 60: obszar ograniczony wykresem funkcji f w przedziale $[a,b]$, osią x-ów i prostymi $x=a$, $x=b$ został podzielony na dwa obszary odpowiadające przedziałom $[a,c]$ i $[c,b]$ (na rysunku zakreskowane pionowo i poziomo), zaś z rozważań punktu 1 wynika, że całki występujące w równości (21) są równe polu odpowiednich obszarów.

Udowodnimy jeszcze

Twierdzenie 4 (monotoniczność całki). *Jeżeli funkcje f, g są ciągłe w przedziale $[a,b]$ i spełniają nierówność*

(23) $$f(x) \le g(x) \quad dla \quad x \in [a,b]$$

to

(24) $$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

DOWÓD. Obierając ciąg normalny $\{\Pi_n\}$ podziałów przedziału $[a,b]$ i punkty pośrednie $\xi(\Pi_n)$ mamy wobec (23)

$$S(f,\Pi_n,\xi(\Pi_n)) \le S(g,\Pi_n,\xi(\Pi_n))$$

a stąd po przejściu do granicy przy $n \to \infty$ wynika (24). $\square$

Przykład 5. Obliczmy całkę

$$\int_0^b x^3\,dx \qquad (b > 0).$$

Zgodnie z równością (17) należy obrać ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[0, b]$ i punkty pośrednie $\xi(\Pi_n)$, utworzyć sumy przybliżone i przejść do granicy przy $n \to \infty$. Określimy Π_n jako podział przedziału $[0, b]$ na n równych części, wówczas

$$x_j = j\frac{b}{n} \qquad (j = 0, 1, \dots, n)$$

oraz

$$\Delta x_j = \frac{b}{n} \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Przy ustalonym n umieścimy punkt pośredni ξ_j w prawym końcu przedziału $[x_{j-1}, x_j]$, zatem

$$\xi_j = x_j = j\frac{b}{n} \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

i wobec tego suma przybliżona ma postać

$$S_n = \frac{b}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{jb}{n}\right)^3.$$

W celu obliczenia granicy zapiszemy sumę S_n jako

$$S_n = b\frac{x_n}{y_n},$$

gdzie

$$x_n = \sum_{j=1}^{n}(jb)^3, \qquad y_n = n^4$$

i zastosujemy twierdzenie Stolza (twierdzenie 11 rozdz.II §2) (zauważmy, że ciąg $y_n = n^4$ spełnia założenia twierdzenia). Mamy

$$\lim_{n\to\infty} S_n = b\lim_{n\to\infty} w_n,$$

gdzie

$$w_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{n^3 b^3}{n^4 - (n-1)^4}.$$

Ponieważ

$$n^4 - (n-1)^4 = (n^2 - (n-1)^2)(n^2 + (n-1)^2) = (2n-1)(2n^2 - 2n + 1)$$

więc

$$w_n = b^3 \frac{n^3}{(2n-1)(2n^2-2n+1)}$$

i dzieląc w ostatnim wyrażeniu licznik i mianownik przez n^3 dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{b^3}{4}.$$

Wobec tego

$$\int_0^b x^3 dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b^4}{4}.$$

Przykład 6. Rozważmy *funkcję Dirichleta*

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \quad \text{wymiernych,} \\ 0 & \text{dla} \quad x \quad \text{niewymiernych.} \end{cases}$$

(por. rozdział II §1 zadanie 11). Niech Π będzie dowolnym podziałem ustalonego przedziału $[a, b]$. Jak wiemy (por. rozdz. I §2 Twierdzenie 5 i zadanie 6), w każdym przedziale (x_{j-1}, x_j) leżą zarówno liczby wymierne jak i niewymierne. Wobec tego obierając dowolnie ciąg normalny $\{\Pi_n\}$ podziałów przedziału $[a, b]$ możemy

(i) przyjąć, że wszystkie punkty pośrednie są wymierne, wówczas dla dowolnego n suma przybliżona ma postać

$$S_n = \sum_{j=1}^{k_n} \Delta x_j = b - a$$

lub

(ii) przyjąć, że wszystkie punkty pośrednie są niewymierne, wówczas dla dowolnego n

$$S_n = 0.$$

Mamy zatem

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} b-a & \text{w przypadku (i),} \\ 0 & \text{w przypadku (ii)} \end{cases}$$

a więc granica ciągu $\{S_n\}$ zależy od sposobu obrania punktów $\xi(\Pi_n)$. Funkcja Dirichleta jest funkcją nieciągłą (nie jest ciągła w żadnym punkcie - proponujemy Czytelnikowi udowodnienie tego), dlatego nie stosuje się do niej twierdzenie 1.

4. Zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego. Jak Czytelnik na pewno zauważył, metoda liczenia całki oznaczonej na podstawie definicji zastosowana w Przykładzie 5 jest dość uciążliwa - wymaga utworzenia ciągu sum przybliżonych i obliczenia jego granicy, co w przypadku bardziej skomplikowanej funkcji f może okazać się niewykonalne. Twierdzenie, które teraz udowodnimy, podaje metodę obliczania całki oznaczonej bez odwoływania się do definicji. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $\mathbb{P}$.

Mówimy, że funkcja F jest *funkcją pierwotną* (lub krócej: *pierwotną*) funkcji f w tym przedziale, jeżeli jest ona różniczkowalna i zachodzi równość

$$F'(x) = f(x)$$

dla $x \in \mathbb{P}$ (w punktach końcowych przedziału przez pochodną rozumiemy pochodną jednostronną).

Twierdzenie 5 (zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego). *Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i niech F będzie jej pierwotną w przedziale $[a, b]$. Wówczas*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{25}$$

DOWÓD. Dla dowolnego podziału Π przedziału $[a, b]$ mamy po zastosowaniu twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{k} [F(x_j) - F(x_{j-1})] = \sum_{j=1}^{k} f(\bar{x}_j)\Delta x_j. \tag{26}$$

Jeżeli teraz $\{\Pi_n\}$ jest ustalonym ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$, to możemy przy dowolnie ustalonym n obrać jako punkty pośrednie punkty $\bar{x}_j$ występujące w równości (26) (są one narzucone przez twierdzenie Lagrange'a). Wówczas dla każdego n

$$S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = F(b) - F(a),$$

co w granicy przy $n \to \infty$ daje (25). □

Uwaga 1. Przyjęte są oznaczenia

$$F(b) - F(a) = F(x) \,|_a^b = [F(x)]_a^b\,.$$

Uwaga 2. Jeżeli F jest pierwotną funkcji f, to $F_1 = F + C$, gdzie C jest dowolną stałą, również jest pierwotną tej funkcji (por. rozdz. III §4 wzory (7), (24)). Łatwo również wykazać, że dowolne dwie pierwotne F, G funkcji f różnią się o stałą. Mamy bowiem

$$F'(x) - G'(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{P}),$$

a stąd na mocy twierdzenia 13 rozdz. III §4 wynika istnienie stałej C takiej, że

$$F(x) - G(x) = C.$$

Jak widać z postaci wzoru (25), w celu obliczenia całki po lewej stronie możemy wybrać dowolną pierwotną funkcji f, gdyż stała C dodana do F redukuje się po prawej stronie wzoru.

Przykład 7. Obliczmy pole P zawarte między wykresem funkcji $f(x) = \sin x$ a osią x-ów w przedziale $[0, \pi]$. Jak wiemy z punktu 1

$$P = \int_0^\pi \sin x \, dx. \tag{27}$$

Aby zastosować twierdzenie 5 zauważmy, że jedną z funkcji pierwotnych jest

$$F(x) = -\cos x$$

gdyż

$$(-\cos x)' = \sin x).$$

Wobec tego

$$P = [-\cos x]_0^\pi = 2.$$

Przykład 8. Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^2 x^4 \, dx.$$

Podobnie jak w Przykładzie 7 możemy łatwo odgadnąć jedną z funkcji pierwotnych, a mianowicie

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5,$$

gdyż

$$\left(\frac{1}{5}x^5\right)' = \frac{1}{5}(5x^4) = x^4.$$

Zgodnie z twierdzeniem 5

$$\int_{-1}^2 x^4 \, dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^2 = \frac{1}{5}(32+1) = \frac{33}{5}.$$

Przykład 9. Obliczyć całkę

$$\int_a^b \alpha \, dx,$$

gdzie α jest stałą. Jako funkcję pierwotną można przyjąć

$$F(x) = \alpha x$$

gdyż

$$(\alpha x)' = \alpha,$$

zatem

$$\int_a^b \alpha \, dx = \alpha(b-a). \tag{28}$$

Korzystając z (28) i opierając się na twierdzeniu 2 punkt (iii) oraz na twierdzeniu 4 otrzymujemy łatwo

Wniosek 1. *Jeżeli*

$$|f(x)| \leq M \quad dla \quad x \in [a,b],$$

to

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq M(b-a).$$

Dotychczas rozważaliśmy całkę oznaczoną w przedziale $[a,b]$ zakładając oczywiście, że $a < b$. Ze względów rachunkowych wygodnie jest uogólnić przyjętą definicję na przypadek gdy $a \geq b$. Przyjmujemy

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx \quad \text{gdy} \quad a > b, \tag{29}$$

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0. \tag{30}$$

Przy tak rozszerzonej definicji całki wzór (25) pozostaje słuszny, również słuszne pozostają reguły rachunkowe podane w twierdzeniu 2 (i), (ii).

Twierdzenie 3 o podziale przedziału całkowania możemy teraz sformułować ogólniej:

Twierdzenie 3'. *Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w przedziale $\mathbb{P}$. Wówczas dla dowolnych a, b, $c \in \mathbb{P}$ zachodzi* (21).

DOWÓD. Zakładając $a < b$ rozważmy przypadki

$$\text{(i)} \quad c < a, \qquad \text{(ii)} \quad a < c < b, \qquad \text{(iii)} \quad b < c.$$

Przypadek (ii) był już rozważany. Opierając się na twierdzeniu 3 mamy

$$\int_c^a f(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, dx = \int_c^b f(x)\, dx$$

w przypadku (i) oraz

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

w przypadku (iii). Obie równości dają (21) po uwzględnieniu (29). Dowód gdy $a > b$ pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

Odgadywanie funkcji pierwotnej zastosowane w przykładach 7 i 8 nie zawsze się udaje. W dalszym ciągu poznamy reguły rachunkowe pozwalające znajdywać funkcję pierwotną dla wielu klas funkcji f. Na razie udowodnimy

Twierdzenie 6. *Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w przedziale $\mathbb{P}$ i niech $a \in \mathbb{P}$. Wówczas funkcja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{31}$$

jest różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$ i przy tym

$$F'(x) = f(x) \quad dla \quad x \in \mathbb{P}. \tag{32}$$

DOWÓD. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że x_0 jest punktem wewnętrznym przedziału $\mathbb{P}$ i że h jest dostatecznie małą liczbą dodatnią. Mamy

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\, dt, \qquad F(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t)\, dt,$$

zatem korzystając z twierdzenia o podziale przedziału całkowania możemy iloraz różnicowy $\Phi(h)$ zapisać w postaci

$$\Phi(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt. \tag{33}$$

Ponadto zauważmy, że zgodnie z (28)

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\, dt = f(x_0). \tag{34}$$

Z (33), (34) dostajemy

$$\Phi(h) - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\, dt. \tag{35}$$

Z założenia ciągłości funkcji f wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla $|t - x_0| < \delta$ zachodziła nierówność

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Opierając się na twierdzeniu 2 (iii) i twierdzeniu 4 możemy oszacować lewą stronę (35). Otrzymujemy dla $0 < h < \delta$

$$|\Phi(h) - f(x_0)| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\, dt = \varepsilon,$$

a to oznacza, że

$$\lim_{h \to 0+} \Phi(h) = f(x_0).$$

Okazaliśmy więc, że funkcja F ma w punkcie x_0 pochodną prawostronną x_0 i że zachodzi równość

$$F'_{+}(x_0) = f(x_0).$$

W podobny sposób dowodzimy, że funkcja F ma w punkcie x_0 pochodną lewostronną i że zachodzi równość

$$F'_{-}(x_0) = f(x_0).$$

Wobec tego zgodnie z twierdzeniem 1 rozdz. III §4 funkcja F ma pochodną w punkcie x_0 i przy tym

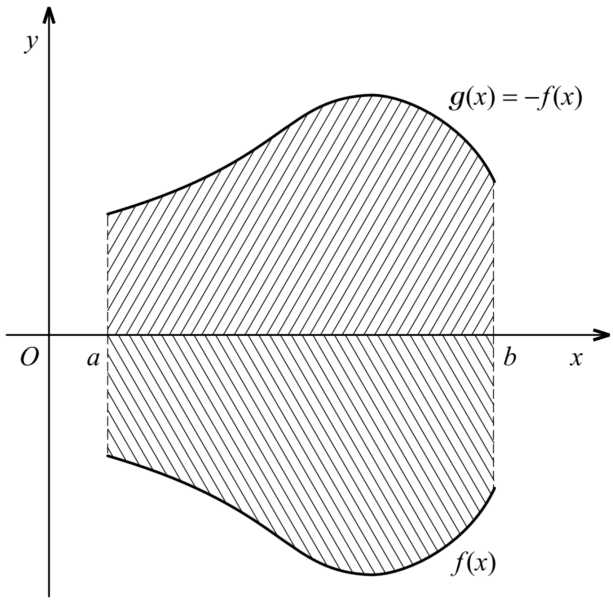
$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Jeżeli x_0 jest jednym z punktów końcowych przedziału $\mathbb{P}$, to przez pochodną we wzorze (32) należy rozumieć pochodną jednostronną. Dowód przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi. $\square$

Z twierdzenia 6 wynika, że każda funkcja ciągła f ma pierwotną określoną wzorem (31). Wzór ten nie daje jednak metody rachunkowej pozwalającej na znalezienie pierwotnej - aby wyznaczyć funkcję F należałoby obliczyć całkę oznaczoną po prawej stronie, a to możemy zrobić dopiero po uprzednim znalezieniu pierwotnej funkcji f.

Z rozważań punktu 1 wynika, że w przypadku funkcji $f(x)$ nieujemnej całka

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



[rys. 61]

może być uważana za miarę pola obszaru zawartego w przedziale $[a, b]$ między wykresem funkcji a osią x-ów. Jeżeli $f(x) \leq 0$ w przedziale $[a, b]$, to oczywiście funkcja $g(x) = -f(x)$ jest w tym przedziale nieujemna zaś jej wykres powstaje z wykresu funkcji f przez odbicie w osi x-ów. Wynika stąd, że obszar ograniczony wykresem funkcji f i osią x-ów (na rys. 61 zakreskowany poziomo) ma takie samo pole jak obszar ograniczony wykresem funkcji g i osią x-ów (na rys. 61 zakreskowany pionowo). Z drugiej strony mamy zgodnie z twierdzeniem 2

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dx$$

a stąd wynika, że pole P obszaru zawartego w przedziale $[a,b]$ między wykresem funkcji f a osią x-ów można obliczyć ze wzoru

$$P = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Przykład 10. Znajdziemy pole P zawarte między wykresem funkcji $f(x) = \cos x$ w przedziale $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ a osią x-ów. Ponieważ $\cos x \leq 0$ w rozważanym przedziale, mamy

$$P = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx.$$

Jako funkcję pierwotną można przyjąć

$$F(x) = \sin x,$$

gdyż

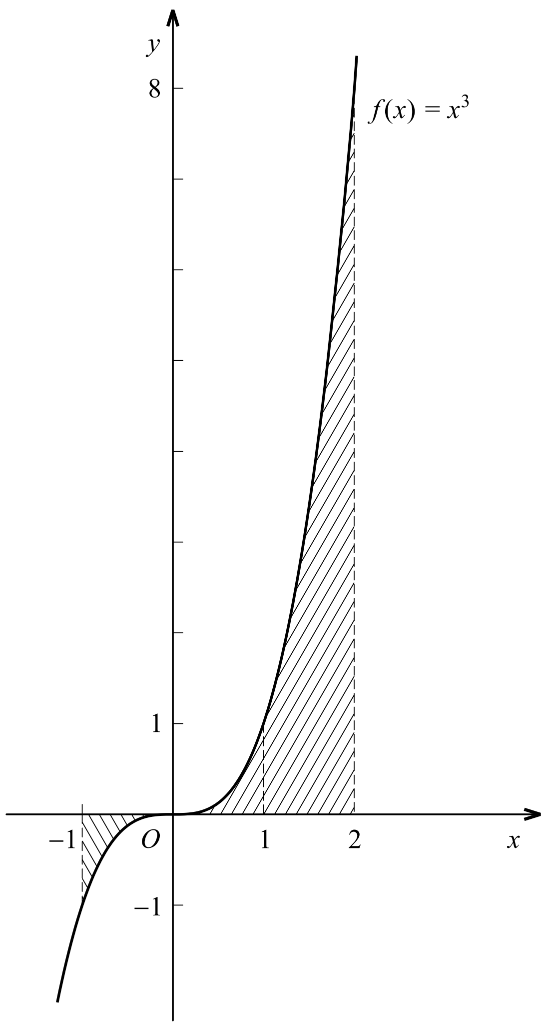
$$(\sin x)' = \cos x.$$

Wobec tego zgodnie z twierdzeniem 5

$$P = -\Big[\sin x\Big]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = -(-1-1) = 2.$$

Przykład 11. Znajdziemy pole P ograniczone wykresem funkcji $f(x) = x^3$ w przedziale $[-1,2]$, osią x-ów i prostymi $x = -1$, $x = 2$ (rys. 62). Rozważany obszar składa się z dwóch części: leżącej pod osią x-ów (zakreskowanej poziomo) i leżącej nad osią x-ów (zakreskowanej pionowo). Oznaczając ich pola przez P_1, P_2 mamy

$$P_1 = -\int_{-1}^0 x^3\,dx, \qquad P_2 = \int_0^2 x^3\,dx.$$



[rys. 62]

Funkcją pierwotną jest

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4$$

gdyż

$$(\frac{1}{4}x^4)' = x^3.$$

Zgodnie z twierdzeniem 5

$$P_1 = -\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{4}, \qquad P_2 = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2} = 4,$$

zatem

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}.$$

♡ ♡ ♡

Zadania.

1. Naszkicować wykres funkcji $f(x)$ i obliczyć pole zawarte między wykresem a osią x-ów w podanym przedziale, jeżeli

$$\begin{aligned}
&\text{a.)}\quad f(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad \text{przedział}\quad \left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right];\\
&\text{b.)}\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{przedział}\quad \left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right];\\
&\text{c.)}\quad f(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\quad \text{przedział}\quad \left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right];\\
&\text{d.)}\quad f(x)=\frac{1}{x},\quad \text{przedział}\quad \left[e,e^3\right];\\
&\text{e.)}\quad f(x)=e^{3x},\quad \text{przedział}\quad [0,1].
\end{aligned}$$

Wskazówka. Szukane pole zapisać przy pomocy całki oznaczonej, następnie zastosować twierdzenie 5.

2. Niech P będzie prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, którego jeden z wierzchołków leży w początku układu zaś wierzchołek przeciwległy na paraboli $y=x^2$. Okazać, że parabola ta dzieli pole prostokąta P w stosunku $1:2$.
Wskazówka. Pole zawarte między parabolą a osią x-ów wyrazić przy pomocy całki oznaczonej, następnie zastosować twierdzenie 5.

3. Obliczyć pole zawarte między wykresem funkcji $f(x)$ a osią x-ów, jeżeli

$$\text{a.)}\quad f(x)=\sin x,\quad -\pi\le x\le \frac{3}{2}\pi;\qquad \text{b.)}\quad f(x)=x^p\quad (p\in\mathbb{N}),\quad -a\le x\le a.$$

Wskazówka. Szukane pole zapisać przy pomocy całki lub sumy całek i zastosować twierdzenie 5. Zwrócić uwagę na znak funkcji f w rozważanym przedziale!

4. Obliczyć całkę

$$\int_0^b x^p\,dx\quad (p\in\mathbb{N},\quad \text{ustalone})$$

stosując wzór (17) i przyjmując, że Π_n jest podziałem odcinka $[0,b]$ na n równych części, zaś przy ustalonym n jako punkt pośredni ξ_j obieramy
  a.) prawy koniec przedziału $[x_{j-1},x_j]$,
  b.) lewy koniec tego przedziału.
Sprawdzić otrzymany wynik obliczając całkę w oparciu o twierdzenie 5.
Wskazówka. Przy obliczaniu granicy ciągu sum przybliżonych oprzeć się na twierdzeniu Stolza (rozdz. II §2 twierdzenie 11).

5. Obliczyć całki

$$\text{a.)} \quad \int_0^b x^2\, dx \qquad (b>0), \text{b.)} \quad \int_0^b x^3\, dx \qquad (b>0)$$

stosując wzór (17) i przyjmując, że Π_n jest podziałem odcinka $[0,b]$ na 2^n równych części, zaś przy ustalonym n jako punkt pośredni $\xi_j \quad (j=1,2,\ldots,2^n)$ obieramy prawy koniec przedziału $[x_{j-1},x_j]$. Otrzymany wynik porównać z zadaniem 3.
Wskazówka. Przy obliczaniu granicy ciągu sum przybliżonych zastosować zadania 10, 11 rozdz. I §1.

6. Z twierdzenia 4 wynika, że nierówności zachodzące między funkcjami ciągłymi można całkować. Pokazać na przykładzie, że nierówności nie można różniczkować tzn. że z nierówności

$$f(x) \le g(x) \quad \text{dla} \quad x\in[a,b]$$

(gdzie f, g są funkcjami różniczkowalnymi) nie wynika na ogół nierówność

$$f'(x) \le g'(x) \quad \text{dla} \quad x\in[a,b].$$

7. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$. Udowodnić, że z nierówności

$$A \le f(x) \le B \qquad \text{dla} \quad x\in[a,b]$$

wynika oszacowanie całki

$$A(b-a) \le \int_a^b f(x)\, dx \le B(b-a).$$

Podać sens geometryczny tego oszacowania w przypadku funkcji f o wartościach dodatnich.
Wskazówka. Zastosować twierdzenie 4 i Przykład 9.

8. Niech f, g będą funkcjami ciągłymi w przedziale $[a,b]$. Udowodnić, że
a.) z nierówności

$$f(x) > 0 \qquad \text{dla} \quad x\in[a,b]$$

wynika

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0;$$

b.) z nierówności

$$f(x) > g(x) \qquad \text{dla} \quad x\in[a,b]$$

wynika

$$\int_a^b f(x)\, dx > \int_a^b g(x)\, dx$$

Wskazówka. Najpierw udowodnić, że

$$m = \inf_{[a,b]} f > 0$$

opierając się na twierdzeniu Weierstrassa (twierdzenie 12 rozdz. III §3), następnie zastosować twierdzenie 4 do nierówności

$$f(x) \geq m \qquad \Big(x \in [a,b]\Big).$$

Punkt b.) sprowadzić do punktu a.).

9. Załóżmy, że f, g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$ i że spełnione są nierówności

$$f(x) \geq g(x) \qquad \text{dla} \quad x \in [a,b]$$

oraz

$$f(x) > g(x) \qquad \text{dla} \quad x \in (c,d),$$

gdzie $a \leq c < d \leq b$. Udowodnić, że

$$\int_a^b f(x)\, dx > \int_a^b g(x)\, dx.$$

Wskazówka. Podzielić przedział całkowania, następnie oprzeć się na zadaniu 8 i na twierdzeniu 4.

10. Podać przykłady funkcji f, g spełniających warunki sformułowane w zadaniach 8, 9 i sprawdzić, że zachodzą podane w tych zadaniach nierówności dla całek.

11. Niech f będzie funkcją ciągłą nieujemną w przedziale $[a, b]$. Udowodnić, że z warunku

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0$$

wynika

$$f(x) = 0 \qquad \text{dla} \quad x \in [a,b].$$

Wskazówka. Zaprzeczając tezę okazać najpierw, że istnieje przedział $[c, d]$ $(a \leq c < d \leq b)$ w którym f jest stale dodatnia. Następnie oprzeć się na zadaniu 9.

12. Udowodnić nierówność

$$2\sqrt{n} - 2 \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \;\leq 2\,\sqrt{n} - 1.$$

Wskazówka. Najpierw oszacować z góry i z dołu całkę

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

wykorzystując zadanie 7.

13. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$$

Wskazówka. Skorzystać z zadania 13.

14. Niech

$$g(x) = \frac{1}{x^s} \qquad (0 < s < 1).$$

Opierając się na nierówności

$$g(k+1) \leq \int_k^{k+1} g(x)\, dx \leq g(k) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

(por. zadanie 7) wykazać, że ciąg

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} g(k) - \int_1^n g(x)\, dx$$

jest rosnący i ograniczony z góry przez liczbę 1. Jaki stąd wynika wniosek?

15. Wykazać ponownie, że ciąg $\{u_n\}$ określony w zadaniu 15 jest rosnący i ograniczony z góry przez liczbę 1, opierając się na interpretacji geometrycznej wyrażenia u_n jako sumy pól pewnych obszarów.

16. Udowodnić zbieżność ciągu

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} \qquad (0 < s < 1).$$

Wskazówka. Skorzystać z zadania 15. W celu obliczenia całki odgadnąć funkcję pierwotną i oprzeć się na twierdzeniu 5.

17. Obliczyć granice ciągów

$$u_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2}, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \qquad w_n = n^{-(p+1)} \left(1^p + 2^p + \cdots + n^p\right) \quad (p > 0).$$

Wskazówka. Przedstawić n-ty wyraz ciągu jako sumę przybliżoną pewnej całki, następnie obliczyć tą całkę odgadując funkcję pierwotną. Wykorzystać twierdzenie 5 i wzór (17).

18. Zróżniczkować funkcje

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad f(x) = \int_0^x \sin(1+t^2)\, dt,\\
&\text{(ii)} \quad f(x) = \int_0^{x^2} e^{2t^3}\, dt,\\
&\text{(iii)} \quad f(x) = \int_{-x}^0 \sqrt{1+t^2}\, dt,\\
&\text{(iv)} \quad f(x) = \int_{-x}^{2x} \cos(1+t^3)\, dt.
\end{aligned}$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 6. W punkcie (iv) podzielić najpierw przedział całkowania.

19. Niech w będzie wielomianem stopnia $\leq n$ spełniającym warunek

$$\int_0^1 x^k w(x)\, dx = 0 \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Udowodnić, że wszystkie współczynniki wielomianu w są równe zeru.
Wskazówka. Zauważyć, że

$$\int_0^1 (w(x))^2\, dx = 0$$

i wykorzystać zadanie 11.

20. Udowodnić, że ciąg

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$$

jest zbieżny oraz że stała

$$C = \lim_{n\to\infty} u_n$$

(zwana *stałą Eulera* por. zadanie 55 rozdz.III §4) leży w przedziale $[0, 1]$.
Wskazówka. Opierając się na zadaniu 7 udowodnić nierówność

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

następnie skorzystać z równości (uzasadnić ją!)

$$\log n = \int_1^n \frac{dx}{x}. \tag{36}$$

21. Wykazać, że ciąg

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \log n$$

jest rosnący i ograniczony z góry, opierając się na interpretacji geometrycznej wyrażenia v_n jako sumy pól pewnych obszarów. Wywnioskować stąd, że

(i) ciąg $\{u_n\}$ rozważany w zadaniu 21 jest zbieżny,

(ii) zachodzi równość

$$C = \lim_{n\to\infty} v_n,$$

przy czym stała Eulera C leży w przedziale $[0, 1]$.

Opierając się na punkcie (ii) podać interpretację geometryczną stałej Eulera.
Wskazówka. Skorzystać z (36).

22. Opierając się na zadaniu 21 udowodnić, że dla naturalnych $p,\ q \quad (q > p)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=np}^{nq} \frac{1}{k} = \log \frac{p}{q}.$$

23. Niech

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \qquad (\alpha > -1).$$

Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Wskazówka. Opierając się na zadaniu 7 oszacować najpierw całkę

$$\int_k^{k+1} x^\alpha \, dx.$$

Następnie oszacować z góry i z dołu wyrażenie u_n i zastosować twierdzenie o trzech ciągach. W którym miejscu dowodu wykorzystuje się ciągłość funkcji potęgowej?

24. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $\mathbb{P}$. Udowodnić, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{P}$ zachodzi nierówność

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \left| \int_a^b |f(x)|\, dx \right|.$$

Wskazówka. Rozważyć przypadki $a < b,\ a > b,\ a = b$ i oprzeć się na twierdzeniu 2.

25. Zakładając, że g jest ciągła w przedziale $(-\infty, \infty)$ udowodnić ciągłość funkcji

$$f(x) = \int_0^x g(x+t)\, dt$$

w dowolnym punkcie x_0.
Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 2 i zadaniu 25 udowodnić najpierw nierówność

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| \leq \left|\int_0^{x_0} |g(x_0+h+t)-g(x_0+t)|\,dt\right| + \left|\int_{x_0}^{x_0+h} |g(x_0+h+t)|\,dt\right|.$$

Następnie wykorzystać jednostajną ciągłość (twierdzenie 9 rozdz. III §3) i ograniczoność (twierdzenie 12 rozdz. III §3) funkcji g.

26. Na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych dane są punkty $A = (a, 0)$, $B = (c, d)$, przy czym $a > 0$, $d > 0$. Opierając się na interpretacji geometrycznej całki obliczyć pole trójkąta OAB. Porównać ze wzorem znanym z geometrii elementarnej.

27. Niech f będzie funkcją liniową w każdym z przedziałów $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ i spełniającą warunki

a.) $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = 0$,

b.) $f(0) = 0$, $f(1) = 5$, $f(2) = 0$, $f(3) = -1$.

Podać wzór określający funkcję f w każdym z podanych przedziałów i obliczyć całkę

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

dwoma sposobami:
1^0 korzystając z wzorów określających funkcję f oraz z twierdzeń 3 i 5,
2^0 opierając się na interpretacji geometrycznej całki jako pola.
Sprawdzić, że funkcja F jest różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P} = [0, 3]$ i że zachodzi równość

$$F'(x) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{P}).$$

Wskazówka. Narysować wykres funkcji f.

28. Załóżmy, że pręt niejednorodny o długości l wypełnia przedział $[0, l]$ osi x-ów, przy czym gęstość pręta określa funkcja ciągła $f(x)$ $(0 \leq x \leq l)$. Uzasadnić, że masę m pręta można obliczyć stosując wzór

$$m = \int_0^l f(x)\,dx.$$

Wskazówka. Rozumować podobnie, jak w punkcie 1.