§2. Całkowanie efektywne.

♡ ♡ ♡

1. Całka nieoznaczona. Niech F, G będą pierwotnymi funkcji f w przedziale $\mathbb{P}$, wówczas

$$G'(x) - F'(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P},$$

a stąd na mocy twierdzenia 13 rozdz. III §4 wynika istnienie stałej C takiej, że

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P}. \tag{1}$$

Na odwrót, jeżeli F jest pierwotną funkcji f, to każda funkcja G postaci (1) również jest pierwotną tej funkcji. Można więc powiedzieć, że wzór (1) określa ogólną postać funkcji pierwotnej. Każdą z funkcji G określonych wzorem (1) nazywamy *całką nieoznaczoną* funkcji f w przedziale $\mathbb{P}$ i oznaczamy symbolem

$$\int f(x)\,dx.$$

Mamy zatem równość

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (x \in \mathbb{P})), \tag{2}$$

gdzie F jest dowolnie obraną pierwotną w przedziale $\mathbb{P}$, zaś C dowolną stałą (zwaną *stałą całkowania*).

Zauważmy, że zgodnie z wprowadzoną terminologią słowo "całka" użyte bez przymiotnika oznacza dwa różne pojęcia:

całka oznaczona $\int_a^b f(x)\,dx$ jest *liczbą* przyporządkowaną ciągłej funkcji f w przedziale $[a, b]$, w przypadku funkcji nieujemnej jest to miara pola zawartego między wykresem a osią x-ów,

całka nieoznaczona $\int f(x)\,dx$ jest *funkcją* określoną w pewnym przedziale $\mathbb{P}$, która po zróżniczkowaniu daje w tym przedziale funkcję podcałkową f.

Z twierdzenia 5 §1 wynika, że między tymi dwoma pojęciami zachodzi prosty związek rachunkowy. Obliczanie całki oznaczonej sprowadza się zatem do znajdywania całki nieoznaczonej (czynność tą nazywamy *całkowaniem*).

2. Wzory rachunkowe dla całek nieoznaczonych. Ze wzorów dotyczących różniczkowania funkcji udowodnionych w rozdz.III §4 i §5 wynikają podane dalej wzory dla całek nieoznaczonych (przypominamy, że symbolem log oznaczamy *logarytm naturalny* tzn.

logarytm o podstawie e - por. rozdz. III §1 punkt 8):

(3) $$\int \alpha\, dx = \alpha x + C, \qquad \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$
w przedziale $(-\infty, \infty)$;

(4) $$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{dla} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N},\ \alpha \neq -1$$
w przedziale $(0, \infty)$;

(5) $$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$$
w każdym z przedziałów$(-\infty, 0)$ oraz $(0, \infty)$;

(6) $$\int e^x\, dx = e^x + C, \qquad \int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0)$$

(7) $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$
w przedziale $(-\infty, \infty)$;

(8) $$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \mathrm{tg} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\mathrm{ctg} x + C$$
w każdym przedziale, w którym mianownik funkcji podcałkowej nie znika;

(9) $$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \mathrm{arctg} x + C$$
w przedziale $(-\infty, \infty)$;

(10)
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \mathrm{arcsin} x + C \qquad \text{oraz} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\mathrm{arccos} x + C$$
w przedziale $(-1, 1)$;

(11)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \mathrm{ar\ sinh} x + C = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$
w przedziale $(-\infty, \infty)$

(12)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \mathrm{ar\ cosh} x + C = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C$$
w przedziale $(1, \infty)$

Sprawdzenie każdego z tych wzorów polega na zróżniczkowaniu prawej strony, co powinno dać w wyniku funkcję podcałkową po lewej stronie. Przykładowo sprawdzimy wzór (5). Dla $x > 0$ mamy
$$(\log|x| + C)' = (\log x + C)' = \frac{1}{x}$$

zaś dla $x < 0$ stosując regułę różniczkowania funkcji złożonej dostajemy

$$(\log|x| + C)' = (\log(-x) + C)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Sprawdzenie pozostałych wzorów (3) - (12) pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. Równie łatwo, w oparciu o udowodnione w rozdz. III §4 własności pochodnych, otrzymujemy reguły:

$$\int \Big(f(x) + g(x)\Big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \tag{13}$$

oraz

$$\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx. \tag{14}$$

Dla sprawdzenia (13) wystarczy zauważyć, że różniczkując sumę po prawej stronie otrzymujemy $f(x) + g(x)$ a więc funkcję podcałkową po lewej stronie. Podobnie sprawdzamy (14).

Podamy jeszcze dwie reguły rachunkowe odgrywające ważną rolę w rachunku całkowym.

Twierdzenie 1 (o całkowaniu przez części). *Jeżeli funkcje f, g mają ciągłą pochodną w przedziale $\mathbb{P}$, to*

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx. \tag{15}$$

DOWÓD. Różniczkując prawą stronę otrzymujemy

$$\Big(f(x)g(x)\Big)' - f'(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x),$$

co po redukcji daje funkcję podcałkową po lewej stronie wzoru (15). □

Twierdzenie 2 (o całkowaniu przez podstawienie). *Przy założeniu ciągłości funkcji f, y, y' zachodzi równość*

$$\int f(y(x))y'(x)\, dx = \int f(y)\, dy \qquad \Big(y = y(x)\Big). \tag{16}$$

DOWÓD. Oznaczmy przez $F(y)$ prawą stronę, wówczas zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej dostajemy

$$\frac{d}{dx}F(y(x)) = \frac{d}{dy}F(y)\frac{dy}{dx} = f(y(x))y'(x),$$

a więc funkcję podcałkową po lewej stronie (16). □

Uwaga. Wzór (16) można inaczej zapisać w postaci

$$\int f(y)\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(y)\,dy, \tag{16'}$$

z której widać, że symbol pochodnej zachowuje się jak zwykły ułamek - można "skracać" przez różniczkę dx. Dlatego przy stosowaniu wzoru na całkowanie przez podstawienie wygodnie jest używać zapisu różniczkowego

$$dy = \frac{dy}{dx}dx,$$

co pozwala uniknąć błędu w bardziej skomplikowanych rachunkach.

3. Przykłady obliczania całek nieoznaczonych. Stosowanie reguł (15), (16) wyjaśnimy na przykładach.

Przykład 1. Scałkować funkcję

$$u(x) = x\sin x \qquad \Big(x \in (-\infty,\infty)\Big).$$

Ponieważ funkcja ma postać iloczynu, narzuca się reguła całkowania przez części (15). Powstaje pytanie, który czynnik traktować jako pochodną $g'(x)$. Spróbujmy przyjąc

$$f(x) = \sin x, \qquad g'(x) = x$$

a więc

$$g(x) = \frac{x^2}{2},$$

zgodnie z (15) otrzymujemy

$$\int x\sin x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int x^2\cos x\,dx.$$

Po prawej stronie otrzymaliśmy całkę, której nie potrafimy odgadnąć i która wydaje się trudniejsza do obliczenia, niż całka wyjściowa (wykładnik potęgi podwyższył się!) Wykorzystajmy zatem drugą możliwość, przyjmując

$$f(x) = x, \qquad g'(x) = \sin x,$$

wówczas

$$g(x) = -\cos x$$

i reguła (15) daje

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx.$$

Całkę po prawej stronie można teraz łatwo odgadnąć, mianowicie

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

a stąd

$$\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + C. \tag{17}$$

Całkowanie przez części udało się, wyraziliśmy naszą całkę nieoznaczoną przy pomocy funkcji elementarnych.

Z podanego przykładu widać, że całkowanie przez części wymaga trafnej decyzji, który z czynników pod całką uważać za pochodną $g'(x)$ a który za funkcję $f(x)$. Na marginesie warto zaznaczyć, że przedstawienie jednego z czynników (w naszym rachunku wyrażenia $\sin x$) jako pochodnej wymaga odgadnięcia funkcji $g(x)$ czyli scałkowania "części" wyrażenia podcałkowego - stąd nazwa "całkowanie przez części".

Na zakończenie sprawdźmy, czy otrzymany wynik (17) jest poprawny - wszak nawet najlepszym rachmistrzom zdarzają się omyłki! W tym celu należy pokazać, że pochodna wyrażenia po prawej stronie jest równa funkcji podcałkowej po lewej. Różniczkując dostajemy

$$(\sin x - x \cos x + C)' = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x$$

- zatem wynik (17) jest poprawny.

Przykład 2. Obliczyć całkę

$$P(x) = \int x^2 \cos x \, dx \qquad \Big(x \in (-\infty, \infty)\Big).$$

Funkcja podcałkowa ma postać iloczynu, spróbujmy więc metody całkowania przez części. Nauczeni doświadczeniem z Przykładu 1 przyjmiemy

$$f(x) = x^2, \qquad g'(x) = \cos x,$$

a więc

$$g(x) = \sin x.$$

Wzór (15) daje

$$P(x) = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx$$

- udało się obniżyć wykładnik potęgi! Całka po prawej stronie była liczona w Przykładzie 1, ostatecznie dostajemy

$$P(x) = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C.$$

Proponujemy, by Czytelnik sprawdził przez różniczkowanie poprawność otrzymanego wyniku.

Przykład 3. Obliczyć całkę

$$Q(x) = \int x^3 e^x \, dx \qquad \Big(x \in (-\infty, \infty)\Big).$$

Ponieważ funkcja podcałkowa ma postać iloczynu, spróbujemy metody całkowania przez części. Ze wzoru (15) widać, że należy przyjąć

$$g'(x) = e^x$$

a więc

$$g(x) = e^x,$$

gdyż wówczas po prawej stronie obniżymy wykładnik potęgi. Dostajemy

$$Q(x) = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x \, dx,$$

a stąd, dalej tą samą metodą

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx = x^2 e^x - 2\Big(x e^x - \int e^x \, dx\Big),$$

a więc ostatecznie

$$Q(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C.$$

Proponujemy sprawdzić otrzymany wynik przy pomocy różniczkowania.

Przykład 4. Obliczyć całkę

$$\int \log x \, dx \qquad \Big(x \in (0, \infty)\Big).$$

Aby zastosować metodę całkowania przez części przedstawimy funkcję podcałkową w postaci iloczynu dopisując czynnik 1. Przyjmiemy

$$f(x) = \log x, \qquad g'(x) = 1,$$

zatem

$$g(x) = x$$

i wzór (15) daje

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x(\log x - 1) + C.$$

Przykład 5. Obliczyć całkę

$$A(x) = \int \frac{1}{x} \log x \, dx \qquad \Big(x \in (0, \infty)\Big).$$

Tutaj również zastosujemy całkowanie przez części. Przyjmijmy

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g'(x) = \log x,$$

zatem (por Przykład 4)

$$g(x) = x(\log x - 1),$$

a stąd na podstawie (15)

$$A(x) = \log x - 1 + \int \frac{\log x}{x}\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx,$$

czyli po obliczeniu ostatniej całki (daje się odgadnąć, por. (5)) i redukcji

$$A(x) = A(x) - 1 + C. \tag{18}$$

Z równości (18) nie można wyznaczyć szukanej całki $A(x)$, wynika z niej jedynie, że jest prawdziwa gdy przyjmiemy $C = 1$. Być może niepowodzenie zostało spowodowane niewłaściwym wyborem funkcji $f(x)$ i $g'(x)$. Spróbujmy więc na odwrót, niech

$$f(x) = \log x, \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$$

zatem

$$g(x) = \log x$$

i z (15) otrzymujemy

$$A(x) = (\log x)^2 - A(x).$$

Ostatnią równość można traktować jako równanie z niewiadomą $A(x)$. Rozwiązując je otrzymujemy

$$A(x) = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C.$$

Zastanówmy się na zakończenie, co byłoby, gdyśmy nie uwzględnili w równości (18) stałej całkowania C. Po redukcji dałoby to absurdalny wynik $0 = -1$. O stałej całkowania nie wolno zapominać!

Na zakończenie zauważmy, że całkę $A(x)$ można również obliczyć metodą całkowania przez podstawienie. Przyjmując

$$y = \log x$$

mamy

$$A(x) = \int y(x)y'(x)\, dx,$$

czyli zgodnie z (16)

$$A(x) = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 + C,$$

zatem wracając do zmiennej x dostajemy wynik (otrzymany poprzednio inną metodą)

$$A(x) = \frac{1}{2}\Big(\log x\Big)^2 + C.$$

A teraz kilka dalszych przykładów, w których zastosujemy regułę całkowania przez podstawienie (16).

Przykład 6. Obliczyć całkę

$$B(x) = \int 2xe^{x^2}\,dx \qquad \Big(x \in (-\infty, \infty)\Big).$$

Funkcję podcałkową można zapisać w postaci

$$2xe^{x^2} = y'e^y$$

jeżeli przyjmiemy

$$y = x^2. \tag{19}$$

Stosując regułę (16) dostajemy

$$B(x) = \int e^y\,dy = e^y + C, \tag{20}$$

czyli po wykorzystaniu (19)

$$B(x) = e^{x^2} + C.$$

Używając zapisu różniczkowego możemy przeprowadzony rachunek przedstawić następująco: z (19) wynika, że

$$dy = \frac{dy}{dx}dx = 2x\,dx,$$

a więc

$$2xe^{x^2}\,dx = e^y\,dy$$

co daje (20).

Jak widzimy, regułę całkowania przez podstawienie można stosować z powodzeniem, jeżeli

1^0 funkcja podcałkowa daje się przedstawić w postaci

$$f(y(x))y'(x)$$

oraz

2^0 umiemy obliczyć całkę

$$\int f(y)\, dy.$$

A oto następne przykłady.

Przykład 7. Obliczyć całkę

$$J(x) = \int \frac{e^x + 2}{e^x + 2x + 3}\, dx \qquad \big(x \in (-1, \infty)\big).$$

Przyjmując

(21) $$y = e^x + 2x + 3$$

możemy funkcję podcałkową $f(x)$ zapisać w postaci

$$f(x) = \frac{1}{y(x)} y'(x).$$

W zapisie różniczkowym mamy

$$\frac{e^x + 2}{e^x + 2x + 3}\, dx = \frac{1}{y}\, dy,$$

zatem zgodnie z (16), (5)

$$J(x) = \int \frac{1}{y}\, dy = \log y + C$$

czyli po wykorzystaniu (21)

$$J(x) = \log(e^x + 2x + 3) + C$$

(zauważmy, że w rozważanym przedziale $y(x) > 0$).

Przykład 8. Obliczyć całkę

$$K(x) = \int \mathrm{tg} x\, dx \qquad \left(x \in \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right), \quad k \quad \text{całkowite}\right).$$

Mamy

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(-\sin x)}{\cos x} = -\frac{1}{y} y',$$

jeżeli oznaczymy

(22) $$y = \cos x.$$

Wobec tego stosując reguły (14), (16) oraz wzór (5) otrzymujemy

$$K(x) = -\int \frac{1}{y}\, dy = -\log|y| + C,$$

czyli po wykorzystaniu (22)

$$K(x) = -\log|\cos x| + C. \tag{23}$$

W zapisie różniczkowym mamy uwzględniając (22)

$$-\sin x\, dx = dy,$$

a stąd

$$K(x) = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x)\, dx = -\int \frac{1}{y}\, dy,$$

co również daje (23).

Przykład 9. Obliczyć całkę

$$P(x) = \int \sqrt{1-x^2}\, dx \qquad \Big(x \in [-1,1]\Big).$$

Przyjmijmy

$$x = \sin t \qquad \Big(t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\Big) \tag{24}$$

wówczas w zapisie różniczkowym

$$dx = \cos t\, dt$$

zatem

$$P(x) = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\; \cos t\, dt. \tag{25}$$

Proste przekształcenia trygonometryczne pozwalają funkcję podcałkową $g(t)$ w równości (25)) zapisać w postaci

$$g(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos 2t\Big),$$

wobec tego zgodnie z (13), (14)

$$P(x) = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\, dt.$$

Obie całki po prawej stronie dają się łatwo odgadnąć, co daje

$$P(x) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C.$$

Aby otrzymać ostateczny wynik należy powrócić do zmiennej x. Z (24) wynika, że

$$t = \text{arcsin} x,$$

oprócz tego

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2},$$

zatem

$$P(x) = \frac{1}{2}\text{arcsin} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

W przeprowadzonym rachunku zastosowaliśmy przekształcenie opisane wzorem (16) w przeciwną stronę, niż w Przykładach 6, 7, 8 (jednocześnie zastępując oznaczenia x, y przez t, x) - zgodnie z podstawieniem (24) zastąpiliśmy funkcję

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

występującą pod całką po prawej stronie (16) przez iloczyn

$$f(x(t))x'(t) = \sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t.$$

Czytelnik napewno zauważył, że zapis różniczkowy ułatwia zastosowanie reguły całkowania przez podstawienie.

Przykład 10. Obliczyć całkę

$$Q(x) = \int \frac{dx}{x^2+a^2} \qquad \Big(a > 0,\ x \in (-\infty, \infty)\Big).$$

Podobnie, jak w przykładzie 9, zastosujemy regułę całkowania przez podstawienie odczytując wzór (16) "od prawej do lewej". Przyjmując

$$x = at \tag{26}$$

mamy w zapisie różniczkowym

$$dx = a\ dt,$$

a stąd

$$Q(x) = \int \frac{a}{a^2(1+t^2)}\ dt$$

czyli po zastosowaniu wzorów (14) i (9)

$$Q(x) = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\text{arctg} t + C,$$

a stąd wobec (26)

$$Q(x) = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie rachunku przez różniczkowanie.

Przykład 11. Na zakończenie obliczmy całkę

$$Q(x) = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \right) \, dx \qquad (x > 0),$$

którą można inaczej zapisać w postaci

$$Q(x) = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + 2 \right) \, dx.$$

Stosując wzory (13), (3), (4) dostajemy

$$Q(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 2x + C,$$

czyli

$$Q(x) = \left(\frac{2}{3} x + 2 \right) \sqrt{x} + 2x + C.$$

♡ ♡ ♡

4. Wzory rekurencyjne. Niech

$$J_n(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx \qquad \Big(x \in (-\infty, \infty), \ n \in \mathbb{N} \Big).$$

Ze wzoru (9) wynika, że

$$J_1(x) = \mathrm{arctg} x + C. \tag{27}$$

Dla $n > 1$ mamy

$$J_n(x) = \int \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)^n} \, dx,$$

czyli po wykorzystaniu (13)

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \, dx. \tag{28}$$

Całka po prawej stronie (28) może być obliczona metodą całkowania przez części, bowiem

$$\frac{d}{dx} \, \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} = -2(n-1) \frac{x}{(1+x^2)^n},$$

a stąd

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = -\frac{1}{2(n-1}\int x\left(\frac{d}{dx}\,\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\right)\,dx,$$

co zgodnie z regułą (15) daje

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = -\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}J_{n-1}(x). \tag{29}$$

Ostatecznie z równosci (28) i (29) dostajemy

$$J_n(x) = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1}(x) \tag{30}$$

dla $n > 1$. Otrzymana zależność (30), pozwalająca wyrazić całkę J_n przez całkę J_{n-1}, nosi nazwę *wzoru rekurencyjnego.*

Przykład 12. Obliczyć całkę

$$J_3(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx \qquad \Big(x\in(-\infty,\infty)\Big).$$

Zastosujemy wzór rekurencyjny (30). Wynika z niego, że

$$J_3(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2} - \frac{3}{4}J_2(x)$$

oraz

$$J_2(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}J_1(x),$$

co daje

$$J_3(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^3} - \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{8}J_1(x)$$

i ostatecznie, po wykorzystaniu (27),

$$J_3(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^3} - \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{8}\mathrm{arctg}x + C. \tag{31}$$

□

Wzory rekurencyjne pozwalają również obliczyć całki

$$P_n(x) = \int \sin^n x\,dx, \quad Q_n(x) = \int \cos^n x\,dx \quad \Big(x\in(-\infty,\infty),\ n\in\mathbb{N}\Big). \tag{32}$$

Dla $n = 1$ mamy zgodnie z (7)

$$P_1(x) = -\cos x + C, \qquad Q_1(x) = \sin x + C. \tag{33}$$

Przyjmijmy dodatkowo

$$P_0(x) = Q_0(x) = \int dx = x + C. \tag{34}$$

Dla $n > 2$ możemy całkę $P_n(x)$ zapisać w postaci

$$P_n(x) = -\int (\sin^{n-1} x)(\cos x)'\, dx,$$

co po zastosowaniu reguły całkowania przez części (15) daje

$$P_n(x) = -\sin^{n-1} x\ \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\ \cos^2 x\, dx,$$

czyli po uwzględnieniu tożsamości $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$P_n(x) = -\sin^{n-1} x\ \cos x + (n-1)P_{n-2}(x) - (n-1)P_n(x).$$

Taki sam rachunek wykazuje, że ostatnia równość jest prawdziwa również dla $n = 2$. Traktując ją jako równanie z niewiadomą $P_n(x)$ otrzymujemy po rozwiązaniu

$$P_n(x) = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\ \cos x + \frac{n-1}{n}P_{n-2}(x) \quad (n \geq 2). \tag{35}$$

Podobne postępowanie możemy zastosować do całki $Q_n(x)$. Można jednak postąpić prościej korzystając z wyprowadzonego już wzoru (35). Zastosujmy w całce $Q_n(x)$ dla $n \geq 1$ podstawienie

$$x = \frac{\pi}{2} - t, \tag{36}$$

wówczas

$$dx = -dt$$

i zgodnie z regułą (16)

$$Q_n(x) = -\int \cos^n(\frac{\pi}{2} - t)\, dt.$$

Ponieważ

$$\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t, \qquad \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$$

dostajemy

$$Q_n(x) = -P_n(t), \tag{37}$$

a stąd po uwzględnieniu (35), (36)

$$Q_n(x) = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(t)$$

dla $n > 2$. Dla $n = 2$ tożsamość trygonometryczna

$$\cos^2\ x = 1 - \sin^2\ x$$

daje

$$Q_2(x) = x - P_2(x).$$

Korzystając z (37), (38) oraz (35) dla $n = 2$ dostajemy ostatecznie

$$Q_n(x) = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} Q_{n-2}(x) \quad (n \geq 2). \tag{39}$$

Równości (35), (39) dają szukane wzory rekurencyjne dla całek (32).

Przykład 13. Całki

$$P_2(x) = \int \sin^2 x\, dx, \qquad Q_2(x) = \int \cos^2 x\, dx$$

można obliczyć bezpośrednio korzystając z tożsamości trygonometrycznej

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

z której wynika, że

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x, \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x. \tag{40}$$

Obustronne scałkowanie równości (40) daje

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C, \qquad Q_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

czyli

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C, \qquad Q_2(x) = \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C.$$

Ten sam wynik otrzymujemy ze wzorów rekurencyjnych (35), (39) po uwzględnieniu (34).

Przykład 14. Ze wzorów (35), (39), po uwzględnieniu (33), dostajemy natychmiast

$$\int \sin^3 x\, dx = -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x + C, \qquad \int \cos^3 x\, dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C.$$

5. Całkowanie ułamków prostych. *Ułamkami prostymi* nazywamy funkcje wymierne postaci

$$u_k(x) = \frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{oraz} \quad v_m(x) = \frac{Bx + D}{(x^2 + bx + c)^m} \qquad (k, m \in \mathbb{N}), \tag{41}$$

gdzie A, B, D, a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, zaś trójmian kwadratowy

$$t(x) = x^2 + bx + c$$

nie ma pierwiastków rzeczywistych. Funkcje te możemy scałkować korzystając z podanych poprzednio reguł. Całkując $u_k(x)$ zastosujemy podstawienie

$$x - a = t,$$

wówczas w zapisie różniczkowym

$$dx = dt,$$

zatem

$$\int u_k(x)\, dx = A \int t^{-k}\, dt,$$

a stąd na mocy (4), (5)

$$\int u_k(x)\, dx = \begin{cases} A \log|x-a| + C & \text{dla} \quad k = 1, \\ \frac{A}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C & \text{dla} \quad k \neq 1. \end{cases} \tag{42}$$

Aby scałkować funkcję $v_m(x)$ wygodnie jest najpierw sprowadzić trójmian $t(x)$ do *postaci kanonicznej.* Mamy mianowicie

$$t(x) = \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot x + \frac{b^2}{4}\right) + c - \frac{b^2}{4}$$

czyli

$$t(x) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 \tag{43}$$

gdzie

$$\alpha = -\frac{1}{2}b, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}, \quad \Delta = b^2 - 4c$$

(z założenia wyróżnik trójmianu Δ jest liczbą ujemną, zatem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Postać (43) trójmianu można również otrzymać w inny sposób. Pierwiastkami wielomianu $t(x)$ są liczby zespolone sprzężone

$$x_1 = \alpha + i\beta, \qquad x_2 = \alpha - i\beta \qquad (i^2 = -1),$$

zatem (por. twierdzenie C w następnym punkcie) wielomian $t(x)$ ma rozkład na czynniki liniowe

$$t(x) = (x - x_1)(x - x_2) = \Big((x-\alpha) - i\beta\Big)\Big((x-\alpha) + i\beta\Big),$$

co po wykonaniu mnożenia daje (43).

Uwzględniając (43) możemy funkcję $v_m(x)$ zapisać w postaci

(44) $$v_m(x) = \frac{Bx + D}{\Big[(x-\alpha)^2 + \beta^2\Big]^m} \qquad (B, D, \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Całkowanie funkcji $v_m(x)$ zilustrujemy przykładem.

Przykład 15. Obliczyć całkę

$$v_3(x) = \int \frac{2x+1}{(x^2-2x+3)^3}\, dx.$$

Trójmian kwadratowy w mianowniku ma wyróżnik

$$\Delta = -8 < 0$$

nie ma więc pierwiastków rzeczywistych, zatem wyrażenie podcałkowe jest ułamkiem prostym. Doprowadzimy je do postaci (44). Pierwiastkami trójmianu są liczby

$$x_1 = 1 + i\sqrt{2}, \qquad x_2 = 1 - i\sqrt{2},$$

zatem

$$\alpha = 1, \qquad \beta = \sqrt{2}$$

i ostatecznie całkę można zapisać w postaci

$$v_3(x) = \int \frac{2x+1}{\Big[(x-1)^2 + 2\Big]^3}\, dx.$$

Wyrażenie podcałkowe możemy dalej przekształcić tak, by drugi składnik w mianowniku był równy 1, co daje

$$v_3(x) = \frac{2x+1}{8\Big[\frac{(x-1)^2}{2} + 1\Big]^3}.$$

Sugeruje to zastosowanie pod całką podstawienia

(45) $$\frac{x-1}{\sqrt{2}} = t.$$

W zapisie różniczkowym otrzymujemy

$$dx = \sqrt{2}\, dt,$$

zatem po prostym rachunku

$$v_3(x) = \int \frac{4t + 3\sqrt{2}}{8(t^2+1)^3}\, dt,$$

co po rozbiciu na sumę całek daje

$$v_3(x) = \frac{1}{2}\int \frac{t}{(t^2+1)^3}\,dt + \frac{3\sqrt{2}}{8}\int \frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt. \tag{46}$$

Druga całka po prawej stronie jest całką $J_3(t)$ rozważaną w punkcie 4, pierwszą zaś możemy łatwo obliczyć, jeżeli zauważymy, że

$$(t^2+1)' = 2t,$$

co sugeruje zastosowanie podstawienia

$$y = t^2 + 1. \tag{47}$$

Podstawienie (47) daje w zapisie różniczkowym

$$dy = 2t\,dt,$$

a stąd otrzymujemy zgodnie z (4)

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^3}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^3} = -\frac{1}{4y^2} + C. \tag{48}$$

Ostatecznie uwzględniając (45) - (48) otrzymujemy

$$v_3(x) = -\frac{1}{2\left[(x-1)^2+2\right]^2} + \frac{3\sqrt{2}}{8}J_3\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

gdzie funkcja J_3 określona jest wzorem (31). □

Proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie analogicznego rachunku w ogólnym przypadku tj. dla funkcji $v_m(x)$ określonej wzorem (44).

6. Całkowanie funkcji wymiernych. Rozważmy funkcję wymierną

$$w(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

gdzie

$$p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0, \qquad q(x) = b_s x^s + \cdots + b_0 \qquad (a_k \neq 0,\ b_s \neq 0,\ k \geq s).$$

Dzieląc wyrazy z najwyższą potęgą x możemy funkcję w przedstawić w postaci

$$w(x) = \frac{a_k}{b_s}x^{k-s} + \frac{r(x)}{q(x)},$$

gdzie $r(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $k-1$. Powtarzając to postępowanie (conajwyżej $k-s+1$ razy) dochodzimy do przedstawienia

$$w(x) = t(x) + w_1(x) \tag{49}$$

gdzie $t(x)$ jest wielomianem stopnia $k-s$, zaś w funkcji wymiernej $w_1(x)$ stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika. Funkcję taką będziemy nazywali *funkcją wymierną właściwą.* Opisany tu w skrócie algorytm, prowadzący do przedstawienia funkcji $w(x)$ w postaci (49) nazywamy *dzieleniem wielomianów.* Ponieważ wielomian $t(x)$ można łatwo scałkować opierając się na wzorach (4), (13), (14), całkowanie funkcji wymiernej $w(x)$ sprowadza się do całkowania funkcji wymiernej właściwej $w_1(x)$. Metoda całkowania oparta jest na twierdzeniu z algebry o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste. Zanim przejdziemy do jego sformułowania i dowodu przypomnimy kilka prostych twierdzeń dotyczących wielomianów o współczynnikach zespolonych.[1]

Twierdzenie A (Bézout). [2] *Niech a będzie rzeczywistym lub zespolonym pierwiastkiem wielomianu $q(z)$. Wówczas $q(z)$ jest podzielny przez $z-a$ tzn. istnieje wielomian $v(z)$ taki, że*

$$w(z) = (z-a)\, v(z).$$

DOWÓD. Prosty rachunek wykazuje, że

$$z^k - a^k = (z-a) \sum_{j=0}^{k-1} a^j\, z^{k-j-1},$$

zatem dla każdego $k \in \mathbb{N}$ wielomian $z^k - a^k$ jest podzielny przez $z-a$. Niech

$$q(z) = d_n z^n + d_{n-1} z^{n-1} + \cdots + d_1 z + c_0.$$

Jeżeli

$$q(a) = 0,$$

to

$$q(z) = q(z) - q(a) = d_n(z^n - a^n) + d_{n-1}(z^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + d_1(z-a).$$

Z ostatniej równości widać, że wielomian $q(z)$ jest podzielny przez $z-a$ jako suma wielomianów mających tą własność. □

Twierdzenie B (zasadnicze twierdzenie algebry). *Każdy wielomian ma w ciele liczb zespolonych co najmniej jeden pierwiastek.*

Jako wniosek z twierdzeń A, B otrzymujemy

---

[1] Podstawowe wiadomości dotyczące liczb zespolonych i dowód twierdzenia B można znaleźć w podręcznikach: B. Gleichgewicht, Algebra, Warszawa 1983 oraz A. Mostowski, M. Stark, Elementy algebry wyższej, Warszawa 1975.

[2] Étienne Bézout (1730 - 1783), matematyk francuski, od 1758 członek Paryskiej Akademii Nauk. Autor prac z algery, poświęconych wielomianom i ich pierwiastkom oraz układom równań algebraicznych.

Twierdzenie C. *Każdy wielomian stopnia n daje się w ciele liczb zespolonych rozłożyć na czynniki liniowe*

$$q(z) = d_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n), \tag{50}$$

gdzie liczby z_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ są pierwiastkami wielomianu $q(z)$ zaś d_n oznacza współczynnik przy najwyższej potędze z.

W dalszym ciągu będziemy rozważali *wyłącznie wielomiany o współczynnikach rzeczywistych.*

Twierdzenie D. *Jeżeli a jest pierwiastkiem zespolonym wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to liczba sprzężona $\bar{a}$ jest również pierwiastkiem tego wielomianu.*

DOWÓD. Mamy

$$\overline{q(a)} = \bar{d}_n\bar{a}^n + \bar{d}_{n-1}\bar{a}^{n-1} + \cdots + \bar{d}_1\bar{a} + \bar{d}_0.$$

Ponieważ współczynniki d_j $(j = 0, \ldots, n-1)$ są rzeczywiste, wynika stąd równość

$$\overline{q(a)} = d_n\bar{a}^n + d_{n-1}\bar{a}^{n-1} + \cdots + d_1\bar{a} + d_0$$

czyli

$$q(\bar{a}) = \overline{q(a)} = 0.$$

$\square$

Pierwiastki z_j $(j = 1, \ldots, n)$ wielomianu q nie muszą być różne, jednak jeżeli w rozkładzie (50) czynnik $(z - a)$ występuje m razy, to tyle samo razy występuje czynnik $(z - \bar{a})$ (mówimy, że oba pierwiastki a, $\bar{a}$ mają tą samą *krotność* m). Aby to stwierdzić, wystarczy dla $m = 2$ zastosować twierdzenie D do wielomianu

$$\frac{q(z)}{(z-a)(z-\bar{a})} = \frac{q(z)}{z^2 - (a+\bar{a})z + |a|^2},$$

który ma współczynniki rzeczywiste jako iloraz wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, zaś dla $m > 2$ powtórzyć to samo rozumowanie. Po odpowiednim przegrupowaniu czynników możemy więc rozkład (50) dla $x \in \mathbb{R}$ zapisać w postaci

$$\begin{aligned} q(x) = d_n&(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_s)^{k_r} \cdot \\ &\cdot (x - \alpha_1 - i\beta_1)^{m_1}\,(x - \alpha_1 + i\beta_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_s - i\beta_s)^{m_s}\,(x - \alpha_s + i\beta_s)^{m_s}, \end{aligned}$$

gdzie liczby rzeczywiste a_j $(j = 1, \ldots, r)$ oraz zespolone $\alpha_l + i\beta_l$ $(\beta_l \neq 0,\ l = 1, \ldots, s)$ są różnymi pierwiastkami wielomianu $q(x)$. Ponieważ

$$(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

rozkład (50) dla wielomianu o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje postać

$$q(x) = d_n(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_s)^{k_r} \cdot ((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{m_1} \cdots ((x - \alpha_s)^2 + \beta_s)^{m_s}. \tag{51}$$

Przyjmując

$$(x - \alpha_l)^2 + \beta_l^2 = x^2 + b_l x + c_l$$

i zakładając, że $d_n = 1$ otrzymujemy inną postać rozkładu

$$q(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_r)^{k_r} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1} \cdots (x^2 + b_s x + c_s)^{m_s}, \tag{52}$$

przy czym wielomiany $x^2 + b_l x + c_l$ $(l = 1, \ldots, s)$ nie mają pierwiastków rzeczywistych. Możemy teraz sformułować twierdzenie, na którym oparta jest metoda całkowania funkcji wymiernych.

Twierdzenie 3 (o rozkładzie na ułamki proste). *Każda funkcja wymierna właściwa*

$$w(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

jest skończoną sumą ułamków prostych, przy czym

(i) *każdemu z czynników* $(x - a_j)^{k_j}$ *w rozkładzie* (52) *odpowiada suma*

$$\frac{A_1}{x - a_j} + \frac{A_2}{(x - a_j)^2} + \cdots + \frac{A_{k_j}}{(x - a_j)^{k_j}},$$

(ii) *każdemu z czynników* $(x^2 + b_k x + c_k)^{m_k}$ *w rozkładzie* (52) *odpowiada suma*

$$\frac{B_1 x + D_1}{x^2 + b_k x + c_k} + \frac{B_2 x + D_2}{(x^2 + b_k x + c_k)^2} + \cdots + \frac{B_{m_k} x + D_{m_k}}{x^2 + b_k x + c_k)^{m_k}}.$$

DOWÓD. Licznik i mianownik funkcji w_1 można podzielić przez współczynnik przy najwyższej potędze x w wielomianie $q(x)$. Zatem nie zmniejszając ogólności można założyć, że współczynnik ten jest równy 1 i że wobec tego rozkład na czynniki wielomianu $q(x)$ jest dany wzorem (52). Funkcja $w(x)$ może być zapisana w postaci

$$w(x) = \frac{p(x)}{(x - a_1)^{k_1}\, q_1(x)},$$

gdzie wielomian $q_1(x)$ nie dzieli się przez $x - a_1$. Okażemy, że można dobrać stałą A oraz wielomian $p_1(x)$ tak, by

$$w(x) = \frac{A}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{p_1(x)}{(x - a_1)^{k_1 - 1}\, q_1(x)}.$$

Ostatnia równość po pomnożeniu obu stron przez wspólny mianownik daje

$$p(x) - A q_1(x) = (x - a_1)\, p_1(x).$$

Zgodnie z twierdzeniem A lewa strona jest podzielna przez $x - a_1$, jeżeli

$$p(a_1) - A q_1(a_1) = 0$$

czyli

$$A = \frac{p(a_1)}{q_1(a_1)} \tag{53}$$

(z założenia wynika, że $q_1(a_1) \neq 0$). Możemy teraz przyjąć

$$p_1(x) = \frac{p(x) - Aq_1(x)}{x - a_1} \tag{54}$$

- jest to wielomian, gdyż licznik po prawe stronie jest podzielny przez $x - a_1$. Ostatecznie widzimy, że określając stałą A oraz wielomian $p_1(x)$ wzorami (53), (54) otrzymujemy rozkład

$$w(x) = \frac{A}{(x - a_1)^{k_1}} + w_1(x),$$

gdzie

$$w_1(x) = \frac{p_1(x)}{(x - a_1)^{k_1 - 1}\, q_1(x)}.$$

Jak widać, w mianowniku funkcji wymiernej $w_1(x)$ czynnik $x - a_1$ występuje w potędze niższej niż w mianowniku funkcji $w(x)$. Powtarzając k_1 razy opisane postępowanie dochodzimy do przedstawienia

$$w(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + w_{k_1}(x),$$

gdzie

$$w_{k_1}(x) = \frac{p_{k_1}(x)}{q_1(x)}$$

przy czym zgodnie z (52)

$$\begin{aligned} q_1(x) &= (x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_r)^{k_r} t_1(x) \cdots t_s(x), \\ t_l(x) &= (x^2 + b_l x + c_l)^{m_l} \qquad (l = 1, 2, \ldots, s). \end{aligned}$$

Opisane postępowanie możemy zastosować kolejno do czynników $(x - a_2)^{k_2}, \ldots, (x - a_r)^{k_r}$. Daje to rozkład funkcji $w(x)$ na sumę wyrażeń wymienionych w punkcie (i) i funkcji wymiernej postaci

$$W(x) = \frac{P(x)}{[t_1(x)]^{m_1}\, Q(x)},$$

gdzie wielomian $Q(x)$ nie jest podzielny przez $t_1(x)$. Okażemy, że można dobrać stałe B, D i wielomian $P_1(x)$ w taki sposób, by

$$W(x) = \frac{Bx + D}{[t_1(x)]^{m_1}} + \frac{P_1(x)}{[t_1(x)]^{m_1 - 1}\, Q(x)}. \tag{55}$$

Po pomnożeniu obu stron przez wspólny mianownik dostajemy równość

$$P(x) - (Bx + D)(Q(x) = t_1(x)P_1(x) \tag{56}$$

równoważną (55). Stałe B, D winny być tak dobrane, by lewa strona (56) była podzielna przez $t_1(x)$. Dzieląc wielomiany P, Q przez $t_1(x)$ dostajemy

$$P(x) = t_1(x)\mu(x) + \alpha x + \beta, \qquad Q(x) = t_1(x)\nu(x) + \gamma x + \delta,$$

gdzie μ, ν są wielomianami oraz przynajmniej jedna z liczb γ, δ jest różna od zera. Zatem lewa strona (56) jest podzielna przez $t_1(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy wyrażenie

$$\sigma(x) = \alpha x + \beta - (Bx + D)(\gamma x + \delta)$$

jest podzielne przez $t_1(x)$. Reszta z dzielenia $\sigma(x) : t_1(x)$ ma postać

$$(\alpha - B\delta - D\gamma + B\gamma b_1)x + \beta - D\delta + B\gamma c_1.$$

Reszta ta jest zerem wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest układ równań

$$\begin{aligned} (\gamma b_1 - \delta)B - \gamma D &= -\alpha, \\ \gamma c_1 B - \delta D &= -\beta. \end{aligned} \tag{57}$$

Układ (57) jest układem liniowym z niewiadomymi B, D o wyznaczniku

$$d = \delta^2 + c_1\gamma^2 - b_1\gamma\delta.$$

Jeżeli $\gamma = 0$, to

$$d = \delta^2 \neq 0,$$

jeżeli zaś $\gamma \neq 0$, to

$$d = \gamma^2\left(\frac{\delta^2}{\gamma^2} - b_1\frac{\delta}{\gamma} + c_1\right) = \gamma^2 t_1\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

a więc i w tym przypadku $d \neq 0$, gdyż wielomian $t_1(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych. Zatem układ (57) ma dokładnie jedno rozwiązanie . Mając wyznaczone stałe B, D określamy wielomian $P_1(x)$ z równości (56) dzieląc obie strony przez $t_1(x)$. Okazaliśmy w ten sposób, że funkcja $W(x)$ ma przedstawienie (55). Drugi wyraz po prawej stronie zawiera w mianowniku czynnik $t_1(x)$ w potędze obniżonej o 1. Postępując w podobny sposób m_1 razy dochodzimy do przedstawienia

$$W(x) = \frac{B_1x + D_1}{t_1(x)} + \frac{B_2x + D_2}{[t_1(x)]^2} + \cdots + \frac{B_{m_1}x + D_{m_1}}{[t_1(x)]^{m_1}} + V(x),$$

gdzie

$$V(x) = \frac{P_{m_1}(x)}{t_2(x)\cdots t_s(x)}.$$

Opisane postępowanie możemy powtórzyć zastępując kolejno trójmian kwadratowy $t_1(x)$ przez $t_2(x), \ldots, t_s(x)$. Dochodzimy ostatecznie do rozkładu funkcji $W(x)$ na sumę wyrażeń wymienionych w punkcie (ii), co daje pełny rozkład funkcji $w(x)$ na ułamki proste. $\square$

Całkowanie funkcji wymiernych wyjaśnimy na przykładach.

Przykład 16. Scałkować funkcję wymierną

$$w(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Jest to funkcja wymierna właściwa, przy czym mianownik ma już podany rozkład postaci (52) (mamy $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ k_1 = 2,\ k_2 = 1$, pierwiastków zespolonych brak). Zgodnie z twierdzeniem 3 mamy rozkład na ułamki proste postaci

$$\frac{3x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}. \tag{58}$$

Aby wyznaczyć stałe A, B, C pomnożymy obie strony przez wspólny mianownik. Otrzymujemy

$$3x+5 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$$

co po wykonaniu mnożenia i redukcji daje

$$3x+5 = (A+C)x^2 + (A+B-2C)x - 2A + 2B + C. \tag{59}$$

Równość (59) (a więc i równoważna jej równość (58)) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy współczynniki przy jednakowych potęgach x po obu stronach są równe. Otrzymujemy w ten sposób układ równań

$$\begin{aligned} A + C &= 0, \\ A + B - 2C &= 3, \\ -2A + 2B + C &= 5, \end{aligned} \tag{60}$$

z którego wyznaczamy niewiadome A, B, C. Rozwiązaniem układu (60) jest

$$A = \frac{1}{9}, \quad B = \frac{8}{3}, \quad C = -\frac{1}{9},$$

zatem szukany rozkład (58) ma postać

$$w(x) = \frac{1}{9(x-1)} + \frac{8}{3(x-1)^2} - \frac{1}{9(x+2)}$$

i po scałkowaniu (por. punkt 5) dostajemy

$$\int w(x)\, dx = \frac{1}{9} \log \left| \frac{x-1}{x+2} \right| - \frac{8}{3(x-1)} + C.$$

Przykład 17. Scałkować funkcję wymierną

$$w(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 5}.$$

Stopień licznika jest większy od stopnia mianownika, wobec tego zaczniemy od dzielenia wielomianów. Po wykonaniu dzielenia otrzymujemy

$$w(x) = x - 3 - w_1(x),$$

gdzie

$$w_1(x) = \frac{10x - 16}{x^2 - 2x + 5}.$$

Funkcja w_1 jest funkcją wymierną właściwą. Całkując obustronnie dostajemy

$$\int w(x)\, dx = \frac{x^2}{2} - 3x - \int w_1(x)\, dx. \tag{61}$$

Aby obliczyć całkę po prawej stronie (61) zbadamy mianownik wyrażenia $w_1(x)$. Jest to trójmian kwadratowy o wyróżniku $\Delta = -16$, a więc nie mający pierwiastków rzeczywistych, zatem funkcja $w_1(x)$ jest ułamkiem prostym. Pierwiastkami mianownika są liczby zespolone sprzężone

$$x_1 = 1 + 2i, \qquad x_2 = 1 - 2i,$$

zatem we wzorze (43) mamy $\alpha = 1$, $\beta = 2$ i stąd

$$w_1(x) = \frac{10x - 16}{(x-1)^2 + 4}.$$

Aby scałkować funkcję $w_1(x)$ zastosujemy metodę podaną w Przykładzie 15. Przekształcenie mianownika daje

$$w_2(x) = \frac{10x - 16}{4\left[\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1\right]},$$

wobec tego zastosujemy podstawienie

$$t = \frac{x-1}{2},$$

skąd w zapisie różniczkowym

$$2\, dt = dx,$$

zatem, po przejściu do zmiennej t i rozbiciu na różnicę całek,

$$\int w_1(x)\, dx = \int \frac{10t}{t^2 + 1}\, dt - 3\int \frac{dt}{t^2 + 1}. \tag{63}$$

Podstawienie

$$y = t^2 + 1$$

daje

$$dy = 2t\ dt,$$

a stąd

$$\int \frac{10t}{t^2+1}\ dt = 5\int \frac{1}{y}\ dy = 5\log(t^2+1) + C_1.$$

Po powrocie do zmiennej x dostajemy

(64)
$$\int \frac{10t}{t^2+1}\ dt = 5\log(x^2-2x+5) + C$$

gdzie $C = 5\log\frac{1}{4} + C_1$. Z równości (61), (63), (64) otrzymujemy końcowy wynik rachunku

$$\int w(x)\ dx = \frac{x^2}{2} - 3x - 5\log(x^2-2x+5) + 3\mathrm{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$$

Proponujemy, by Czytelnik sprawdził go przez różniczkowanie.

7. Całkowanie pewnych wyrażeń trygonometrycznych. Niech $w(t,s)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych (tzn. ilorazem wielomianów dwóch zmiennych, przy czym mianownik nie redukuje się do stałej). Wówczas całkowanie wyrażeń postaci $w(\sin x,\ \cos x)$ można sprowadzić do całkowania funkcji wymiernej stosując podstawienie

(65)
$$y = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \qquad \Big(x \in (-\pi,\pi)\Big).$$

Równość (65) jest bowiem równoważna równości

$$x = 2\mathrm{arctg}y,$$

skąd w zapisie różniczkowym

(66)
$$dx = \frac{2}{1+y^2}\ dy.$$

Oprócz tego z tożsamości

(67)
$$1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

wynika

(68)
$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2},$$

ponadto na mocy (67)

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+y^2},\qquad \sin^2\frac{x}{2}=\frac{y^2}{1+y^2},$$

przy czym w rozważanym przedziale wyrażenie $\cos\frac{x}{2}$ jest nieujemne, zaś $\sin\frac{x}{2}$ ma taki sam znak jak y. Wobec tego

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}},\qquad \sin\frac{x}{2}=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

i stąd

$$\sin x=\frac{2y}{1+y^2}. \tag{69}$$

Z (66), (68), (69) otrzymujemy ostatecznie

$$\int w(\sin x,\cos x)\,dx=\int r(y)\,dy, \tag{70}$$

gdzie

$$r(y)=\frac{2w\left(\frac{2y}{1+y^2},\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)}{1+y^2}$$

jest funkcją wymierną zmiennej y.

Przykład 18. Obliczyć całkę

$$I(x)=\int\frac{dx}{\cos x}.$$

Mamy

$$w(t,s)=\frac{1}{s}.$$

Po podstawieniu (65) dostajemy zgodnie z (70)

$$I(x)=\frac{2}{1-y^2}\,dy.$$

Mianownik funkcji podcałkowej rozkłada się na czynniki liniowe

$$1-y^2=(1+y)(1-y),$$

wobec tego (por. twierdzenie 3)

$$\frac{2}{1-y^2}=\frac{A}{1+y}+\frac{B}{1-y}, \tag{71}$$

gdzie stałe A, B należy wyznaczyć tak, by zachodziła tożsamość (71). Po sprowadzeniu prawej strony do wspólnego mianownika dostajemy

$$\frac{A}{1+y} + \frac{B}{1-y} = \frac{(A-B)y + A + B}{(1+y)(1-y)},$$

wobec tego (71) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy

$$A - B = 0, \qquad A + B = 2.$$

Z ostatnich dwóch równości wynika

$$A = B = 1,$$

co daje wobec (71)

$$\int \frac{2}{1-y^2}\, dy = \int \frac{dy}{1+y} + \int \frac{dy}{1-y},$$

a stąd

$$I(x) = \log|1+y| - \log|1-y| + C = \log\left|\frac{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

Otrzymany wynik można zapisać inaczej korzystając z przekształcenia trygonometrycznego

$$\mathrm{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha},$$

i przyjmując $\alpha = \frac{x}{2}$, co daje ostatecznie

(72)
$$I(x) = \log\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

□

Przykład 19. Obliczyć całkę

$$K(x) = \int \frac{dx}{\sin x} \qquad \Big(x \in (0,\pi)\Big).$$

Podstawienie (65) daje

$$K(x) = \int \frac{1+y^2}{2y} \cdot \frac{2}{1+y^2}\, dy = \int \frac{dy}{y}$$

zatem

(73)
$$K(x) = \log|y| + C = \log|\mathrm{tg}\frac{x}{2}| + C.$$

Uwaga. Między całkami $I(x)$, $K(x)$ zachodzi prosty związek. Ponieważ

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

więc

$$K(x) = \int \frac{dx}{\cos(x - \frac{\pi}{2})}.$$

Stosując podstawienie liniowe

$$x - \frac{\pi}{2} = t$$

mamy

$$dx = dt,$$

a więc

$$K(x) = \int \frac{dt}{\cos t} = I(t),$$

czyli po powrocie do zmiennej x

$$K(x) = I(x - \frac{\pi}{2}).$$

Zależność tą można odczytać również ze wzorów (72), (73).

8. Całkowanie wyrażeń niewymiernych. Zaczniemy od przykładów.
Przykład 20. Obliczyć całkę

$$Q(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad (a > 0).$$

Dzieląc licznik i mianownik funkcji podcałkowej przez a możemy całkę $Q(x)$ zapisać w postaci

$$Q(x) = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + (\frac{x}{a})^2}}.$$

Porównanie ze wzorem (11) sugeruje podstawienie liniowe

$$\frac{x}{a} = t$$

skąd

$$dx = a\, dt.$$

Wobec tego

$$Q(x) = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \log\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right) + C.$$

Wracając do zmiennej x otrzymujemy po wykonaniu prostych przekształceń

$$Q(x) = \log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C_1$$

gdzie $C_1 = C - \log a$ jest nową stałą całkowania. □

Przykład 21. Obliczyć całkę (por. Przykład 9)

$$P(x) = \int \sqrt{1-x^2}\, dx \qquad \Big(x \in (-1,1)\Big).$$

Przekształcimy wyrażenie podcałkowe mnożąc je i dzieląc przez $\sqrt{1-x^2}$. Po rozbiciu na różnicę całek otrzymujemy

$$P(x) = P_1(x) - P_2(x), \tag{74}$$

gdzie

$$P_1(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad P_2(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Zauważmy, że

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

całkę P_2 możemy więc przedstawić w postaci

$$P_2(x) = -\int x \left(\sqrt{1-x^2}\right)'\, dx$$

skąd po zastosowaniu wzoru (15) na całkowanie przez części dostajemy

$$-P_2(x) = x\sqrt{1-x^2} - P(x). \tag{75}$$

Ponieważ (por. wzór (10))

$$P_1(x) = \arcsin x + C,$$

uwzględniając (74), (75) otrzymujemy

$$P(x) = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - P(x) + C.$$

Ostatnią równość możemy traktować jako równanie z niewiadomą $P(x)$. Po rozwiązaniu go mamy

$$P(x) = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C_1$$

gdzie $C_1 = \frac{1}{2}C$ jest nową stałą całkowania. □

Rozważmy teraz całkę postaci

$$\int w\left(x, \sqrt{p(x)}\right)\, dx \tag{76}$$

gdzie $w(t,s)$ jest funkcją wymierną dwóch zmiennych zaś

$$p(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

(całki tego typu występowały w Przykładach 20, 21). Istnieją różne podstawienia pozwalające całkę (76) sprowadzić do całki z funkcji wymiernej. Pokażemy dwa z nich.

(i) $a > 0$. Wprowadzamy nową zmienną t przyjmując

$$\sqrt{p(x)} = t - \sqrt{a}x. \tag{77}$$

Podnosząc (77) obustronnie do kwadratu dostajemy po redukcji równanie liniowe względem x, które po rozwiązaniu daje

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}. \tag{78}$$

Ze wzorów (77), (78) widać, że wyrażenia $\sqrt{p(x)}$ i $\frac{dx}{dt}$ można przedstawić jako funkcje wymierne zmiennej t.

(ii) $a < 0$. Ponieważ

$$p(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

wyrażenie $\sqrt{p(x)}$ może przyjmować w pewnym przedziale wartości rzeczywiste tylko wtedy gdy $\Delta > 0$. Trójmian kwadratowy $p(x)$ ma wówczas dwa różne pierwiastki rzeczywiste α, β i daje się rozłożyć na czynniki liniowe

$$p(x) = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Stosujemy podstawienie

$$\sqrt{p(x)} = t(x - \alpha) \tag{79}$$

skąd po podniesieniu do kwadratu i podzieleniu obu stron przez $x - \alpha$ wynika

$$a(x - \beta) = t^2(x - \alpha).$$

Z ostatniej równości można x oraz $\frac{dx}{dt}$ wyrazić jako funkcje wymierne zmiennej t. Podstawienia (77), (79) noszą nazwę *podstawień Eulera.*

Przykład 22. Obliczyć całkę

$$I(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Ponieważ $a = 1 > 0$, można zastosować podstawienie (77), czyli

$$\sqrt{x^2 - 2x} = t - x, \tag{80}$$

co po obustronnym podniesieniu do kwadratu i redukcji daje

$$-2x = t^2 - 2tx.$$

Z ostatniej równości dostajemy

$$x = \frac{t^2}{2(t-1)}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{t^2 - 2t}{2(t-1)^2}. \tag{81}$$

Z (80), (81) otrzymujemy

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \frac{t^2 - 2t}{2(t-1)},$$

wobec tego po zastosowaniu podstawienia (80) całka przybiera postać

$$I(x) = \int \frac{2}{t^2}\, dt = -\frac{2}{t} + C,$$

czyli po przejściu do zmiennej x

$$I(x) = -\frac{2}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} + C$$

lub w innej postaci

$$I(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} + C_1,$$

gdzie $C_1 = C - 1$ jest nową stałą całkowania.

Przykład 23. Obliczyć całkę

$$K(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt{4x - x^2}}.$$

Ponieważ $a = -1 < 0$, zastosujemy podstawienie (79). Trójmian kwadratowy ma pierwiastki $\alpha = 0$, $\beta = 4$, zatem podstawienie (79) przybiera postać

$$\sqrt{x(4-x)} = tx, \tag{82}$$

co po podniesieniu do kwadratu i podzieleniu obu stron przez x daje

$$4 - x = t^2 x.$$

Wobec tego

$$x = \frac{4}{1+t^2}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{-8t}{(1+t^2)^2}, \qquad \sqrt{4x - x^2} = \frac{4t}{1+t^2}$$

i całka $K(x)$ po zastosowaniu podstawienia (82) przybiera postać

$$J(t) = -2 \int \frac{5+t^2}{(1+t^2)^2}\, dt.$$

Wyrażenie podcałkowe jest funkcją wymierną właściwą, zatem zgodnie z twierdzeniem 3 ma rozkład na ułamki proste

$$\frac{5+t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Mt+N}{(1+t^2)^2}. \tag{83}$$

Stałe A, B, M, N możemy obliczyć mnożąc obie strony (83) przez wspólny mianownik i przyrównując współczynniki przy jednakowych potęgach t (por. Przykład 16). Można jednak postąpić prościej. Zauważmy, że

$$\frac{5+t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{4}{(1+t^2)^2}$$

a stąd po skróceniu otrzymujemy rozkład (83) w postaci

$$\frac{5+t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{4}{(1+t^2)^2} \tag{84}$$

(jak widać $A = M = 0,\ B = 1,\ N = 4$). Wobec tego

$$J(t) = -2 \int \frac{dt}{1+t^2} - 8 \int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

i korzystając ze wzorów (27), (30) otrzymujemy

$$J(t) = -6 \operatorname{arctg} t - \frac{4t}{1+t^2} + C.$$

Wracając do zmiennej x mamy wobec (82)

$$t = \frac{\sqrt{4x - x^2}}{x}$$

i stąd

$$\frac{4t}{1+t^2} = \sqrt{4x - x^2},$$

wobec czego

$$K(x) = -6 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4x - x^2}}{x} - \sqrt{4x - x^2} + C.$$

Proponujemy, by Czytelnik sprawdził otrzymany wynik przez różniczkowanie. □

♡ ♡ ♡

9. Jeszcze kilka całek. Zgodnie z wzorami (38) rozdz.III §1

$$\begin{aligned}\sin mx\ \sin nx &= \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right],\\ \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right],\\ \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right].\end{aligned}$$

Widać stąd, że wyrażenia po lewej stronie dadzą się łatwo scałkować przy pomocy wzorów (7) i odpowiedniego podstawienia liniowego. Otrzymujemy

$$(85)\qquad \int \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right] + C & \text{dla} \quad m \neq n,\\ \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right) + C & \text{dla} \quad m = n,\end{cases}$$

$$(86)\qquad \int \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right] + C & \text{dla} \quad m \neq n,\\ \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2mx}{2m}\right) + C & \text{dla} \quad m = n,\end{cases}$$

$$(87)\qquad \int \sin mx \cos nx\, dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right] + C & \text{dla} \quad m \neq n,\\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2mx}{2m} + C & \text{dla} \quad m = n.\end{cases}$$

Obliczymy jeszcze dwie całki

$$P = \int e^{ax}\ \cos bx\, dx, \qquad Q = \int e^{ax}\ \sin bx\, dx \qquad (a \neq 0).$$

Ponieważ

$$\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' = e^{ax}$$

możemy do obu całek zastosować wzór (15) na całkowanie przez części. Otrzymujemy układ dwu równań liniowych z niewiadomymi P, Q

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{a}e^{ax}\ \cos bx + \frac{b}{a}Q,\\ Q &= \frac{1}{a}e^{ax}\ \sin bx - \frac{b}{a}P,\end{aligned}$$

który po rozwiązaniu daje

$$(88)\qquad P = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C, \qquad Q = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

Całki P, Q noszą nazwę *całek stowarzyszonych.*
♡ ♡ ♡

10. Całki niewyrażalne przez funkcje elementarne. Omówiliśmy klasy funkcji, których pierwotna daje się wyrazić przez funkcje elementarne. Istnieją jednak całki nieoznaczone nie mające tej własności, przykładem jest *całka eliptyczna*

$$E(x) = \int \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 x}\, dx \qquad (0 < \lambda < 1)$$

(nazwa pochodzi stąd, że przy pomocy całki $E(x)$ można wyrazić obwód elipsy).[3] Inny przykład stanowi całka

$$\int e^{-x^2}\, dx$$

występująca w rachunku prawdopodobieństwa. Również całki typu

$$\int w(x, \sqrt{p(x)})\, dx$$

gdzie w jest funkcją wymierną dwóch zmiennych a $p(x)$ wielomianem stopnia > 2 nie dają się naogół wyrazić przez funkcje elementarne.

Zadania.

1. Znaleźć całki nieoznaczone funkcji

(i) $(2x^2+1)^3$, (ii) $(1+\sqrt{x})^4 \quad (x > 0)$,

(iii) $\dfrac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} \quad \Big(x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)\Big)$, (iv) $\dfrac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} \quad (x > 0)$.

Wskazówka. Zastosować wzory (3) - (5), (13), (14).

2. Niech $w(x)$ będzie wielomianem stopnia k. Udowodnić, że całka nieoznaczona

$$\int w(x)\, dx$$

jest również wielomianem (jakiego stopnia?).

3. Przyjmijmy

$$v(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^{\alpha_j} \qquad (x > 0; a_j,\ \alpha_j \in \mathbb{R}; a_k \neq 0). \tag{87}$$

[3]Więcej szczegółów dotyczących całek eliptycznych można znaleźć w podręczniku G.M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy, t.II rozdz.VIII §5, PWN 1994.

Czy całka nieoznaczona

$$\int v(x)\,dx$$

jest również funkcją postaci (87)? Porównać z zadaniem 2.

4. Znaleźć całki nieoznaczone funkcji

$$\text{(i)}\quad e^{x+2}, \qquad \text{(ii)}\quad \sin(x+5),$$
$$\text{(iii)}\quad \cos(2-x), \qquad \text{(iv)}\quad \frac{1}{\cos^2 3x}, \qquad \text{(v)}\quad \frac{5}{1+x^2}.$$

W jakich przedziałach całkujemy funkcję podaną w punkcie (iv)?
Wskazówka. Zastosować wzory (6) - (9), (14).

5. Znaleźć całki nieoznaczone funkcji

$$\text{a.)}\quad x^3\ \cos x, \qquad \text{b.)}\quad x^2\ \sin x, \qquad \text{c.)}\quad x^3 \log x,$$
$$\text{d.)}\quad \frac{\log x}{x^2}, \qquad \text{e.)}\quad x^\alpha \log x \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \qquad \text{f.)}\quad \frac{\log\ \cos x}{\sin^2 x}.$$

W jakich przedziałach całkujemy funkcje podane w punktach c.), d.), e.), f.) ?
Wskazówka. Zastosować całkowanie przez części.

6. Podać wzór rekurencyjny dla całki nieoznaczonej

$$\text{a.)}\quad A_n = \int \log^n x\,dx \qquad (x>0), \qquad \text{b.)}\quad B_n = \int t^n e^t\,dt \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Stosując otrzymany wzór znaleźć całki A_3, B_3.
Wskazówka. Zastosować całkowanie przez części.

7. Znaleźć całki nieoznaczone

$$A = \int \sin(\log x)\,dx, \qquad B = \int \cos(\log x)\,dx \qquad (x>0).$$

Wskazówka. Zastosować całkowanie przez części traktując całki A, B jako całki stowarzyszone.

8. Znaleźć wzór rekurencyjny dla całek nieoznaczonych

$$P_n = \int x^n\ \sin x\,dx, \qquad Q_n = \int x^n\ \cos x\,dx.$$

Stosując ten wzór znaleźć całki P_3, Q_3.

9. Znaleźć całkę nieoznaczoną

$$\int (\sqrt{x})^p \, e^{\sqrt{x}} \, dx \qquad\qquad (x > 0, \;\; p \in \mathbb{N}).$$

Wskazówka. Przez odpowiednie podstawienie sprowadzić do całki rozważanej w zadaniu 6 b.)

10. Znaleźć całki nieoznaczone

$$\int e^x \; \sin^2 x \, dx, \qquad\qquad \int e^x \; \cos^2 x \, dx.$$

Wskazówka. Przez odpowiednie przekształcenie trygonometryczne dojść do całki rozważanej w punkcie 9.

11. Stosując odpowiednie podstawienie wyrazić przez funkcje elementarne całki nieoznaczone funkcji

a.) $e^{\sin x} \; \cos x$, b.) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$, c.) $\dfrac{1 - \sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,

d.) xe^{x^2}, e.) $\int \operatorname{tg} x \, dx$, f.) $\int \operatorname{ctg} x \, dx$

W jakich przedziałach całkujemy podane funkcje?

12. Stosując całkowanie przez części i odpowiednie podstawienie znaleźć całki nieoznaczone funkcji

a.) $\operatorname{arctg} x$, b.) $e^{-\sqrt{x}}$, c.) $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, d.) $\dfrac{x}{\sin^2 x}$, e.) $\dfrac{x}{\cos^2 x}$.

13. Wyrazić przez funkcje elementarne całkę nieoznaczoną

$$\int \sin x \; \cos x \, dx$$

a.) całkując przez części,
b.) całkując przez podstawienie (jakie?),
c.) przekształcając najpierw funkcję podcałkową przy pomocy tożsamości

$$\sin \, 2x = 2 \sin x \; \cos x.$$

Wyjaśnić, dlaczego metoda c.) daje pozornie inny wynik niż metody a.), b.).

14. Znaleźć całki nieoznaczone

$$\int \sin^3 x \; \cos^3 x \, dx, \qquad \int \sin^3 x \; \cos^2 x \, dx.$$

Wskazówka. Najpierw przekształcić trygonometrycznie wyrażenie podcałkowe, następnie zastosować odpowiedni wzór rekurencyjny.

15. Sprawdzić, że podane funkcje są ułamkami prostymi i znaleźć ich całki nieoznaczone:

$$\text{a.)}\quad \frac{1}{x^2-2x+5}, \qquad \text{b.)}\quad \frac{2x}{(x^2-4x+5)^2},$$
$$\text{c.)}\quad \frac{3x+1}{(4x^2-4x+2)^3}, \qquad \text{d.)}\frac{2}{x^2-6x+9}.$$

16. Znaleźć całki nieoznaczone następujących funkcji wymiernych:

$$(1)\quad \frac{3x-5}{x^2-3x+2}, \qquad (2)\quad \frac{x^4+2x^3-3x^2+2x+2}{x^2+2x-3},$$
$$(3)\quad \frac{2x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}, \qquad (4)\quad \frac{2x^2+4}{x^4+4x+3},$$
$$(5)\quad \frac{3x-4}{x^2-4}, \qquad (6)\quad \frac{x^2}{x^2+1},$$
$$(7)\quad \frac{x^4}{x^2-3}, \qquad (8)\quad \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x},$$
$$(9)\quad \frac{x-a}{x^3+a^2x}, \qquad (10)\quad \frac{1}{x^3+x^2+2x+2}.$$

17. Wyrazić przez funkcje elementarne całkę nieoznaczoną

$$\text{a.)}\quad \int \frac{\log(x+1)}{x^2}\,dx, \qquad \text{b.)}\quad \int \frac{\log(x^2+1)}{x^3}\,dx.$$

Wskazówka. Całkując przez części sprowadzić do całki z funkcji wymiernej. W jakich przedziałach wykonujemy całkowanie?

18. Wyrazić przez funkcje elementarne całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{a\ \sin x + b\ \cos x} \qquad (a^2+b^2>0).$$

Wskazówka. Przekształcić mianownik opierając się na zadaniu 27 rozdz. II §3, następnie skorzystać z Przykładów 19, 20.

19. Scałkować funkcję

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

stosując podstawienie

$$x = \mathrm{tg} t$$

i wzór rekurencyjny (38). Wynik porównać ze wzorem (30).

20. Okazać, że całka

$$\int w(e^x)\,dx$$

(gdzie w jest funkcją wymierną) daje się przez odpowiednie podstawienie sprowadzić do całki z funkcji wymiernej.

21. Opierając się na zadaniu 20 scałkować funkcje

$$\text{a.)}\quad \frac{e^x+1}{e^x-1}, \qquad\qquad \text{b.)}\quad \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-2}.$$

W jakich przedziałach można wykonać całkowanie?

22. Znaleźć całki nieoznaczone funkcji

$$\text{a.)}\quad \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}, \qquad\qquad \text{b.)}\quad \frac{1}{\sin^3 x},$$

$$\text{c.)}\quad \frac{1}{\cos^3 x}, \qquad\qquad \text{d.)}\,\frac{1}{1+\mathrm{tg} x}.$$

Wskazówka. W punktach a.), b.), c.) przekształcić trygonometrycznie funkcję podcałkową i zastosować odpowiednie podstawienie. W punkcie d.) skorzystać z podstawienia uniwersalnego

$$y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$$

(por. punkt 7). W jakich przedziałach wykonujemy całkowanie?

23. Znaleźć całkę nieoznaczoną funkcji

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}, \qquad \text{(ii)}\quad \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+3}}, \qquad \text{(iii)}\quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x},$$

$$\text{(iv)}\quad \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^3}, \qquad \text{(v)}\quad \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

Wskazówka. Zastosować podstawienie Eulera (punkt 8).