

§3. Dalsze własności całki oznaczonej funkcji ciągłej.



1. Wzory rachunkowe dla całek oznaczonych. W §1 określiliśmy całkę oznaczoną funkcji ciągłej jako granicę ciągu sum przybliżonych. W przypadku gdy f jest funkcją ciągłą nieujemną w przedziale $[a, b]$, całka oznaczona jest miarą pola zawartego między wykresem funkcji a osią x -ów. Zgodnie z twierdzeniem 5 §1 obliczanie całki oznaczonej sprowadza się do znalezienia funkcji pierwotnej czyli całki nieoznaczonej. Techniki rachunkowe pozwalające wyznaczyć funkcję pierwotną zostały omówione w §2. Obecnie wrócimy do całki oznaczonej w celu omówienia jej dalszych własności oraz zastosowań geometrycznych i fizycznych.

Z podanych w §2 wzorów (15), (16) dla całki nieoznaczonej wynikają w oparciu o twierdzenie 5 §1

Twierdzenie 1 (o całkowaniu przez części dla całek oznaczonych). *Jeżeli funkcje f, g mają ciągłą pochodną, to*

$$(1) \quad \int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

oraz

Twierdzenie 2 (o całkowaniu przez podstawienie dla całek oznaczonych). *Przy założeniu ciągłości funkcji f, y, y' zachodzi równość*

$$(2) \quad \int_a^b f(y(x))y'(x) dx = \int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy.$$

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

Uwaga. Wzór (2) można inaczej zapisać w postaci

$$(2') \quad \int_a^b f(y) \frac{dy}{dx} dx = \int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy,$$

z której widać, że symbol $\frac{dy}{dx}$ zachowuje się jak zwykły ułamek - można "skracać" przez różniczkę dx (por. Uwaga po twierdzeniu 2 §2). Wzór (2') sugeruje stosowanie zapisu różniczkowego

$$dy = \frac{dy}{dx} dx.$$

Zapis ten jest wygodny przy całkowaniu przez podstawienie, podobnie jak dla całek nieoznaczonych - trzeba tylko pamiętać o zmianie granic całkowania.

Stosowanie wzorów (1), (2) wyjaśnimy na przykładach.

Przykład 1. Obliczmy całkę

$$A = \int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx.$$

Ponieważ funkcja podcałkowa ma postać iloczynu, narzuca się metoda całkowania przez części. Zastosujemy wzór (1) przyjmując

$$f(x) = x^2, \quad g'(x) = \sin x,$$

wówczas

$$A = \int_0^{\pi} x^2 (-\cos x)' \, dx = -\left[x^2 \cos x\right]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \cos x \, dx$$

czyli

$$A = \pi^2 + 2 \int_0^{\pi} x \cos x \, dx.$$

Do całki po prawej stronie zastosujemy ponownie całkowanie przez części przyjmując we wzorze (1)

$$f(x) = x, \quad g(x) = \sin x.$$

Otrzymujemy

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = \left[x \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[\cos x\right]_0^{\pi},$$

zatem

$$A = \pi^2 - 4.$$

Przykład 2. Obliczmy całkę oznaczoną

$$A = \int_{-1}^2 x e^{x^2+1} \, dx.$$

Całkę tą możemy zapisać w postaci

$$A = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 y'(x) e^{y(x)} \, dx,$$

gdzie

$$y(x) = x^2 + 1.$$

Ponieważ

$$y(-1) = 2, \quad y(2) = 5$$

zgodnie ze wzorem (2) dostajemy

$$A = \frac{1}{2} \int_2^5 e^y \, dy = \frac{1}{2}(e^5 - e^2).$$

Przykład 3. Obliczmy całkę oznaczoną

$$B = \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \, dy.$$

Przyjmując

$$y = \cos x$$

zastosujemy wzór (2) przeczytany "od prawej do lewej". Aby określić granice całkowania w całce po lewej stronie wystarczy obrać liczby a, b tak, by

$$\cos a = 0, \quad \cos b = 1.$$

Możemy przyjąć

$$a = \frac{\pi}{2}, \quad b = 0,$$

wówczas

$$B = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \cos^2 x} \sin x \, dx$$

czyli zgodnie ze wzorem (29) §1

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} \sin x \, dx.$$

Ponieważ $\sin x \geq 0$ w przedziale całkowania $[0, \frac{\pi}{2}]$, więc

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = \sin x$$

w tym przedziale (przypominamy, że przez pierwiastek rozumiemy dodatnią wartość pierwiastka czyli pierwiastek arytmetyczny - por. rozdz. I §1 punkt 9). Zatem

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx,$$

co po zastosowaniu tożsamości trygonometrycznej

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

daje

$$B = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

□

Przykład 4. Zastosujemy wzór (2) do całki

$$C = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx.$$

Przyjmując

$$x(t) = \sqrt{1-t}$$

mamy

$$x^2 = 1-t, \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{t},$$

wobec tego w zapisie różniczkowym

$$2x dx = -dt.$$

Ponadto

$$x(1) = 0, \quad x(0) = 1,$$

zatem

$$C = -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

a więc

$$C = \frac{1}{3}.$$

Przykład 5. Aby obliczyć całkę

$$D = \int_0^a \sqrt{1+x^2} dx$$

zastosujemy metodę podobną do tej, jaka była stosowana w Przykładzie 21 §2 do całki nieoznaczonej. Ponieważ

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}},$$

po rozbiciu na sumę całek dostajemy

$$(3) \quad D = D_1 + D_2,$$

gdzie

$$D_1 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad D_2 = \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Ze wzoru (11) §2 wynika, że

$$(4) \quad D_1 = \left[\log(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^a = \log(a + \sqrt{1+a^2}).$$

Całkę D_2 przekształcimy metodą całkowania przez części. Ponieważ

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

więc

$$D_2 = \int_0^a x \left(\sqrt{1+x^2}\right)' dx = \left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^a - \int_0^a \sqrt{1+x^2} dx,$$

czyli

$$(5) \quad D_2 = a\sqrt{1+a^2} - D.$$

Ostatecznie z (3), (4), (5) dostajemy

$$D = \log(a + \sqrt{1+a^2}) + a\sqrt{1+a^2} - D$$

skąd

$$D = \frac{1}{2} \log(a + \sqrt{1+a^2}) + \frac{1}{2} a\sqrt{1+a^2}.$$

♡ ♡ ♡

2. Wzory rekurencyjne. W §2 udowodniliśmy wzory rekurencyjne dla całek nieoznaczonych postaci

$$\int \sin^n x dx, \quad \int \cos^n x dx.$$

Łatwo z nich otrzymać wzory rekurencyjne dla całek oznaczonych. Niech

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \quad \text{dla } n \geq 1,$$

$$A_0 = B_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Przyjmując

$$P_n(x) = \int \sin^n x dx \quad \text{dla } n \geq 1, \quad P_0(x) = x + C$$

mamy (por. wzór (35) §2)

$$P_n(x) = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \quad (n \geq 2)$$

i stąd

$$(6) \quad A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Podobnie, oznaczając

$$Q_n(x) = \int \cos^n x \, dx \quad \text{dla } n \geq 1, \quad Q_0(x) = x + C$$

mamy zgodnie ze wzorem (39) §2

$$Q_n(x) = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} Q_{n-2}(x) \quad (n \geq 2),$$

a zatem

$$(7) \quad B_n = \frac{n-1}{n} B_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Ze wzorów rekurencyjnych (6), (7) wynika, że

$$(8) \quad \begin{aligned} A_{2n} = B_{2n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2} \\ A_{2n+1} = B_{2n+1} &= \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

(proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie dowodu indukcyjnego).

Opierając się na wzorach (8) łatwo skonstruować ciąg nieskończony dający w granicy liczbę π . Wynika z nich bowiem, że

$$(9) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{A_{2n}}{A_{2n+1}} \cdot \left(\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Z nierówności

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$$

dostajemy po scałkowaniu

$$A_{2n+1} \leq A_{2n} \leq A_{2n-1},$$

a zatem

$$1 \leq \frac{A_{2n}}{A_{2n+1}} \leq \frac{A_{2n-1}}{A_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}.$$

Z ostatniej nierówności widać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n}}{A_{2n+1}} = 1.$$

Wobec tego mnożąc i dzieląc prawą stronę (9) przez n i przechodząc do granicy otrzymujemy *wzór Wallisa*¹

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right)^2.$$

¹John Wallis (1616 - 1703), od 1649 r. profesor uniwersytetu w Oksfordzie, jeden z organizatorów Londyńskiego Towarzystwa Królewskiego, zajmował się algebrą i jej zastosowaniami w geometrii.



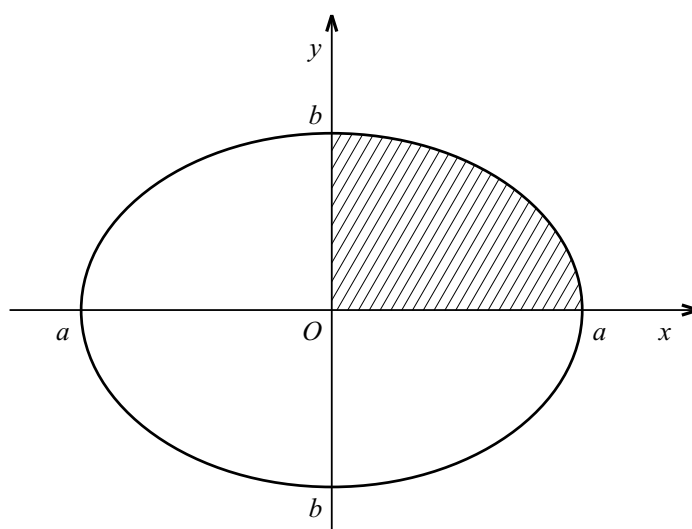
3. Zastosowania geometryczne całki oznaczonej - pole obszaru płaskiego. Jak wspomnieliśmy w §1 całka oznaczona funkcji nieujemnej jest miarą pola obszaru zawartego między wykresem funkcji a osią x -ów. Wykorzystamy ten fakt do obliczenia pola elipsy.

Przykład 6. Równanie elipsy o półosiach a , b i o środku symetrii w początku układu ma postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

co po rozwiązaniu względem y daje

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$



[rys. 63]

przy czym znak $+$ odpowiada górnej połowie elipsy (rys. 63). Ze względu na symetrię pole obszaru leżącego pod wykresem funkcji

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

w przedziale $0 \leq x \leq a$ stanowi czwartą część pola całej elipsy (obszar ten został zakreskowany na rys. 63). Oznaczając szukane pole elipsy przez P mamy

$$P = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Po podstawieniu

$$x = at$$

mamy

$$dx = a dt$$

i stąd zgodnie ze wzorem (2)

$$P = 4ab \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

Całka po prawej stronie była obliczona w przykładzie 3. Zgodnie z otrzymanym wynikiem

$$P = \pi ab.$$

W przypadku gdy elipsa jest kołem o promieniu r dostajemy stąd znany wzór na pole koła

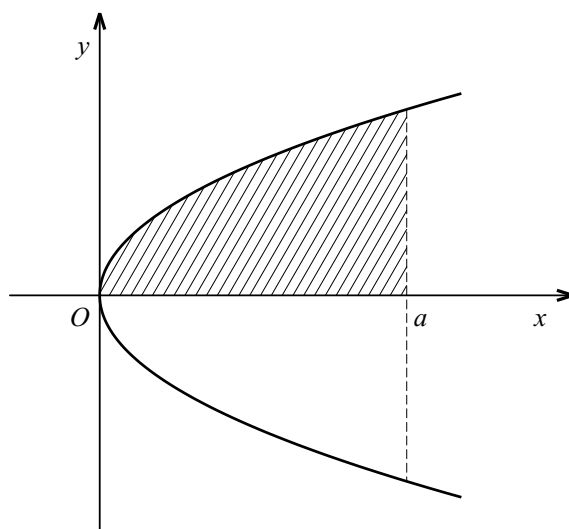
$$P = \pi r^2.$$

Przykład 7. Obliczmy pole P obszaru zawartego we wnętrzu paraboli o równaniu

$$(10) \quad x = y^2$$

dla x należących do przedziału $[0, a]$. Rozważany obszar jest symetryczny względem osi x -ów, wystarczy więc znaleźć pole jego górnej połowy (zakreskowanej na rys. 64). Rozwiązując równanie (10) względem y mamy

$$y = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq a)$$



[rys. 64]

zatem

$$P = 2 \int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{4}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a,$$

czyli

$$P = \frac{4}{3} a \sqrt{a}.$$

4. Zastosowania geometryczne całki oznaczonej - długość krzywej płaskiej.
 Będziemy zakładali, że rozważana krzywa K jest wykresem funkcji mającej ciągłą pochodną tzn. jest określona równaniem

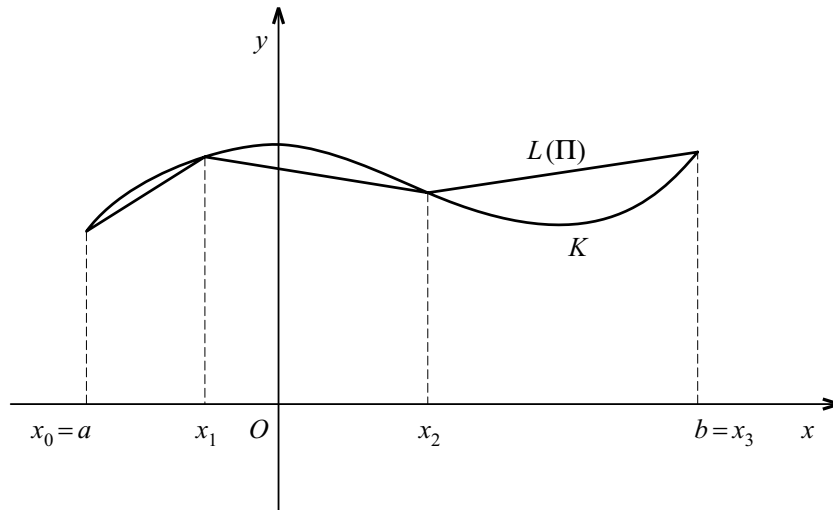
$$y = f(x) \quad \left(x \in \mathbb{P} = [a, b] \right)$$

przy czym $f \in C^1(\mathbb{P})$. Podziałowi Π odcinka $[a, b]$ opisanemu nierównościami

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

możemy przyporządkować łamaną $L(\Pi)$ utworzoną z odcinków o końcach

$$(x_{j-1}, f(x_{j-1})), \quad (x_j, f(x_j)) \quad (j = 1, \dots, k).$$



[rys. 65]

Długość tej łamanej wynosi

$$(11) \quad |L(\Pi)| = \sum_{j=1}^k \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_j)^2},$$

gdzie

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}, \quad \Delta y_j = f(x_j) - f(x_{j-1}).$$

Z rys. 65 widać, że im drobniejszy jest podział Π tym lepiej łamana $L(\Pi)$ przybliża krzywą K . Wobec tego będzie rzeczą naturalną wprowadzenie następującej definicji długości krzywej K : Niech $\{\Pi_n\}$ będzie ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$. Wówczas przez *długość krzywej K* rozumiemy granicę

$$(12) \quad |K| = \lim_{n \rightarrow \infty} |L(\Pi_n)|.$$

Wyrażenie po prawej stronie (11) możemy przekształcić korzystając z twierdzenia o wartości średniej. Mianowicie

$$\Delta y_j = f'(\xi_j) \Delta x_j,$$

gdzie $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$, a zatem

$$(13) \quad |L(\Pi)| = \sum_{j=1}^k \sqrt{1 + (f'(\xi_j))^2} \Delta x_j.$$

Wyrażenie po prawej stronie (13) jest sumą przybliżoną całki

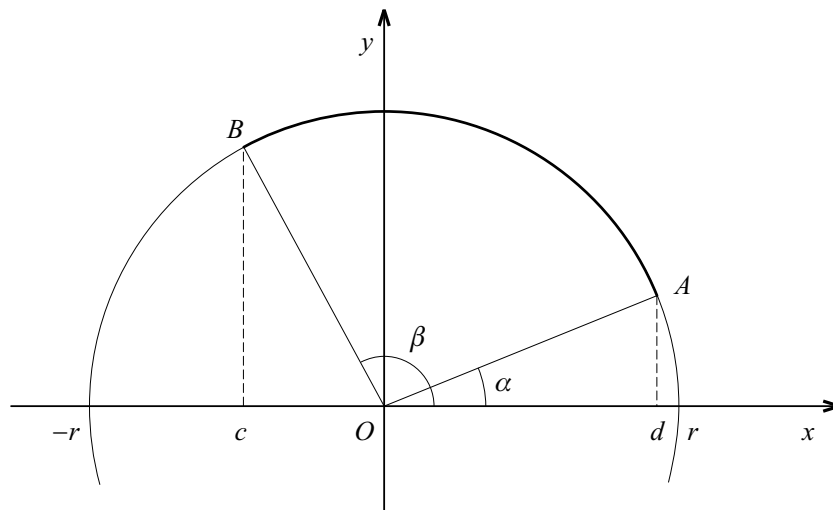
$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

odpowiadającą podziałowi Π . Wobec tego zgodnie z twierdzeniem 1 §1 granica w równości (12) nie zależy od sposobu, w jaki obierzemy ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ i równość ta może być zapisana w postaci

$$(14) \quad |K| = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (y = f(x)).$$

Przykład 8. Obliczyć długość łuku K_{AB} okręgu o promieniu r (rys. 66). Zakładamy, że środek okręgu znajduje się w początku układu współrzędnych i że promienie OA , OB tworzą z dodatnią półosią x -ów kąty α , β odpowiednio ($0 < \alpha < \beta < \pi$). Równanie górnej połowy okręgu ma postać

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r < x < r),$$



[rys. 66]

zatem

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

i stąd

$$1 + (y')^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

Wobec tego zgodnie z (14)

$$|K_{AB}| = \int_c^d \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx,$$

gdzie

$$c = r \cos \beta, \quad d = r \cos \alpha.$$

Podstawiając

$$x = r \cos t \quad (0 < t < \pi)$$

dostajemy

$$dx = -r \sin t \, dt$$

oraz

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r \sqrt{\sin^2 t},$$

czyli

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r \sin t,$$

gdyż $\sin t > 0$ w rozważanym przedziale. Wobec tego

$$|K_{AB}| = -r \int_{\beta}^{\alpha} dt = r(\beta - \alpha)$$

zgodnie ze wzorem znanym z kursu szkolnego. □

Niech teraz K będzie dowolną krzywą o równaniu

$$y = f(t) \quad \left(t \in \mathbb{P} = [a, b] \right)$$

gdzie $f \in C^1(\mathbb{P})$ i niech x będzie dowolnie ustaloną liczbą z przedziału $[a, b]$. Część krzywej K odpowiadająca wartościom parametru $t \in [a, x]$ ma długość zależną od x określoną wzorem

$$(15) \quad s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt.$$

Zgodnie z twierdzeniem 6 §1

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2},$$

co można zapisać w postaci różniczkowej

$$(16) \quad ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (y = f(x)).$$

Wyrażenie po prawej stronie (16) nazywamy *różniczką długości łuku*. Ponieważ $\frac{ds}{dx} > 0$, funkcja $s(x)$ jest ściśle rosnąca w przedziale $[a, b]$. Zgodnie z oznaczeniem (15) możemy wzór (14) zapisać w postaci

$$|K| = \int_a^b \frac{ds}{dx} dx,$$

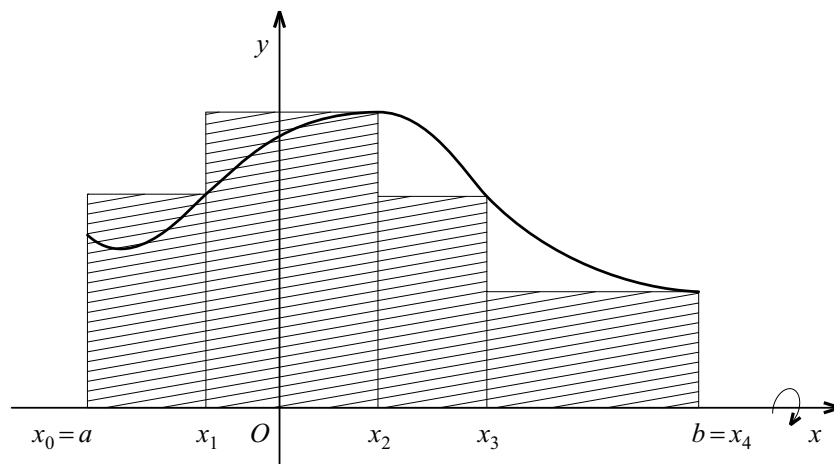
czyli w oparciu o (2')

$$|K| = \int_{s(a)}^{s(b)} ds = \int_0^{|K|} ds.$$

5. Zastosowania geometryczne całki oznaczonej - objętość i powierzchnia boczna bryły obrotowej. Niech f będzie funkcją ciągłą nieujemną w przedziale $[a, b]$, niech D oznacza obszar zawarty w tym przedziale między wykresem a osią x -ów zaś V - bryłę obrotową zakresloną przez obszar D przy obrocie dookoła osi x -ów. Naszym celem jest obliczenie objętości bryły V .

Dokonajmy podziału Π przedziału $[a, b]$ określonego nierównościami

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$



[rys. 67]

i niech P_j ($j = 1, \dots, k$) będzie prostokątem o podstawie $[x_{j-1}, x_j]$ i wysokości $f(x_j)$ (rys. 67, $k = 4$, prostokąty P_j zakreskowane), który przy obrocie zakresła walec kołowy W_j o wysokości $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ i promieniu podstawy $f(x_j)$. Bryła obrotowa $W(\Pi) = \bigcup_{j=1}^k W_j$ ma objętość

$$(17) \quad |W(\Pi)| = \pi \sum_{j=1}^k [f(x_j)]^2 \Delta x_j.$$

Oczywiście im drobniejszy jest podział Π tym lepiej bryła $W(\Pi)$ przybliża bryłę obrotową V . Wobec tego, oznaczając przez $|V|$ objętość bryły V , można przyjąć, że

$$(18) \quad |V| = \lim_{n \rightarrow \infty} |W(\Pi_n)|$$

gdzie $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$. Ze wzoru (17) widać, że wyrażenie $|W(\Pi)|$ jest sumą przybliżoną całki

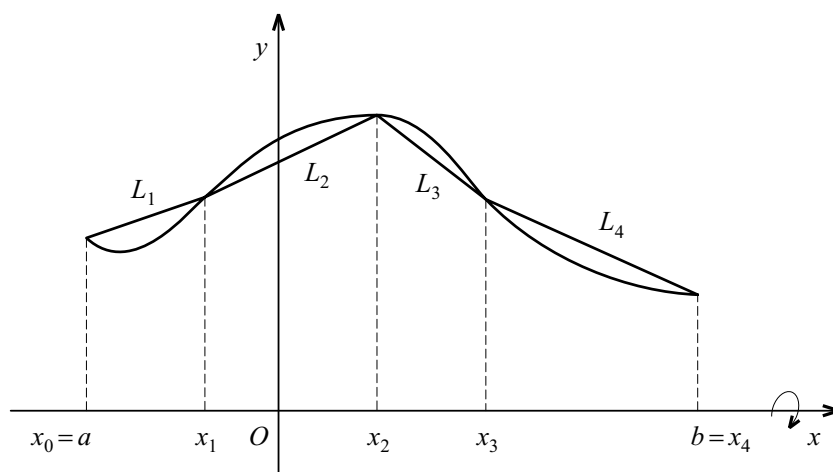
$$(19) \quad \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

Zgodnie z twierdzeniem 1 §1 granica we wzorze (18) nie zależy od sposobu, w jaki został obrany ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ i jest równa całce (19). Zatem wzór na *objętość bryły obrotowej* V można zapisać w postaci

$$(20) \quad |V| = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (y = f(x)).$$

Przechodząc do obliczenia powierzchni bocznej bryły V założymy, że funkcja f ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$. Z kursu szkolnego wiadomo, że powierzchnia boczna B stożka ściętego o promieniach podstaw r , R i tworzącej l wyraża się wzorem

$$(21) \quad B = \pi(r + R)l.$$



[rys. 68]

Rozważmy (przy danym podziale Π przedziału $[a, b]$) odcinek L_j łączący punkty wykresu $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$ i $(x_j, f(x_j))$ (rys. 68). Przy obrocie odcinek L_j zakresła powierzchnię boczną B_j stożka ściętego o promieniach podstaw $f(x_{j-1})$, $f(x_j)$ i tworzącej

$$(22) \quad l_j = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2},$$

zatem zgodnie ze wzorem (21)

$$|B_j| = \pi [f(x_{j-1}) + f(x_j)] l_j.$$

Lamana $L(\Pi)$ utworzona ze wszystkich odcinków L_j zakreśla przy obrocie powierzchnię $\Sigma(\Pi) = \bigcup_{j=1}^k B_j$, której pole $T(\Pi)$ wyraża się wzorem

$$(23) \quad T(\Pi) = \pi \sum_{j=1}^k [f(x_{j-1}) + f(x_j)] l_j.$$

Z twierdzenia o wartości średniej wynika, że

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

gdzie $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$. Wobec tego (22) możemy zapisać w postaci

$$l_j = \sqrt{1 + [f'(\xi_j)]^2} \Delta x_j \quad \left(\Delta x_j = x_j - x_{j-1} \right),$$

skąd wobec (23) wynika, że

$$T(\Pi) = \pi \sum_{j=1}^k [f(x_{j-1}) + f(x_j)] \sqrt{1 + [f'(\xi_j)]^2} \Delta x_j.$$

Utwórzmy teraz sumę

$$S(\Pi) = 2\pi \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \sqrt{1 + [f'(\xi_j)]^2} \Delta x_j.$$

Udowodnimy

Lemat. *Do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla każdego podziału Π o średnicy $d(\Pi)$ spełniającej warunek*

$$(24) \quad d(\Pi) < \delta$$

zachodziła nierówność

$$(25) \quad |T(\Pi) - S(\Pi)| < \varepsilon.$$

DOWÓD. Z ciągłości pochodnej $f'(x)$ wynika, że funkcja

$$g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

jest również ciągła a więc ograniczona w przedziale $[a, b]$. Istnieje zatem stała $M > 0$ taka, że

$$(26) \quad \sqrt{1 + [f'(x)]^2} < M$$

dla $x \in [a, b]$. Natomiast funkcja f jako ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest w tym przedziale jednostajnie ciągła, zatem do dowolnej liczby $\eta > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by z (24) wynikały nierówności

$$(27) \quad |f(x_j) - f(\xi_j)| < \eta, \quad |f(x_{j-1}) - f(\xi_j)| < \eta \quad (j = 1, \dots, k).$$

Zakładając, że spełniony jest warunek (24) dostajemy zatem z nierówności (26), (27)

$$|T(\Pi) - S(\Pi)| < 2\pi M \eta \sum_{j=1}^k \Delta x_j = 2\pi M \eta (b - a).$$

Wobec tego nierówność (25) będzie spełniona, jeżeli przyjmiemy

$$\eta = \varepsilon [2\pi M (b - a)]^{-1}$$

i do tak określonej liczby η dobierzemy δ . □

Łatwo zauważyć, że im drobniejszy jest podział Π , tym lepiej powierzchnia $\Sigma(\Pi)$ przybliża powierzchnię boczną B_V bryły obrotowej V . Wobec tego możemy przyjąć, że pole tej powierzchni wyraża się wzorem

$$(28) \quad |B_V| = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\Pi_n)$$

gdzie $\{\Pi_n\}$ jest dowolnym ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$. Z drugiej strony suma $S(\Pi)$ jest sumą przybliżoną całki

$$(29) \quad 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

odpowiadającą podziałowi Π , zatem zgodnie z twierdzeniem 1 §1 granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\Pi_n)$$

nie zależy od sposobu w jaki został obrany ciąg $\{\Pi_n\}$ i jest równa całce (29). Z udowodnionego lematu wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\Pi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\Pi_n),$$

zatem ostatecznie z (28) dostajemy wzór określający *pole powierzchni bocznej bryły obrotowej* w postaci

$$(30) \quad |B_V| = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (y = f(x)).$$

Wróćmy teraz do funkcji $s(x)$ określonej wzorem (15) (jak wiemy, określa ona długość wykresu funkcji f w przedziale $[a, x]$, gdzie $x \in [a, b]$). Ponieważ funkcja ta jest ściśle rosnąca, istnieje funkcja odwrotna do niej $x = x(s)$ i wobec tego we wzorze (30) można przyjąć

$$(31) \quad y(s) = f(x(s)) \quad (0 \leq s \leq S)$$

jeżeli przez S oznaczymy długość wykresu funkcji f w całym przedziale $[a, b]$. Stosując do całki w (30) podstawienie

$$x = x(s)$$

dostajemy zgodnie z (2), (16) inną postać wzoru na *pole powierzchni bocznej bryły obrotowej*

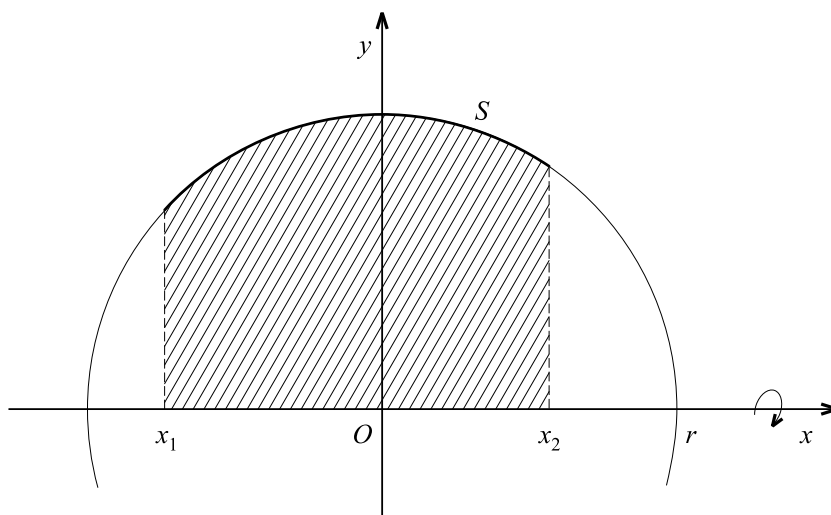
$$(32) \quad |B_V| = 2\pi \int_0^S y \, ds,$$

gdzie funkcja $y(s)$ jest określona wzorem (31).

Przykład 9. Kulę K o promieniu r przecinamy dwoma równoległymi płaszczyznami. Znaleźć objętość i powierzchnię otrzymanego plastra P .

Obierzmy układ współrzędnych w taki sposób, by środek kuli znajdował się w początku układu a płaszczyzny przecinające miały równania $x = x_1$, $x = x_2$ ($x_1 < x_2$). Plaster P powstaje przez obrót dookoła osi x -ów części koła o środku w początku układu i promieniu r ograniczonej przez łuk okręgu S oraz oś x -ów i odcinki prostych $x = x_1$, $x = x_2$ (rys. 69). Równanie okręgu ma postać

$$x^2 + y^2 = r^2$$



[rys. 69]

stąd zgodnie ze wzorem (20) objętość plastra wynosi

$$|P| = \pi \int_{x_1}^{x_2} (r^2 - x^2) \, dx$$

czyli po obliczeniu całki

$$(34) \quad |P| = \pi r^2(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}\pi(x_2^3 - x_1^3).$$

W przypadku, gdy $x_1 = -r$, $x_2 = r$, plaster P jest całą kulą i z (34) dostajemy znany wzór na objętość kuli o promieniu r

$$|P| = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Przechodząc do obliczenia powierzchni bocznej plastra P założymy, że $-r < x_1 < x_2 < r$. Po rozwiązaniu (33) względem y dostajemy równanie

$$(35) \quad y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (x_1 < x < x_2)$$

opisujące łuk S . Po zróżniczkowaniu (35) otrzymujemy

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Otrzymana pochodna jest ciągła w przedziale $[x_1, x_2]$, można więc zastosować wzór (30). Funkcja podcałkowa ma postać

$$y\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r$$

zatem pole powierzchni bocznej B_P wyraża się wzorem

$$(36) \quad |B_P| = 2\pi(x_2 - x_1)r.$$

Ze wzoru (36) widać, że pole powierzchni bocznej plastra P zależy tylko od jego grubości tj. różnicy $x_2 - x_1$, nie zależy zaś od położenia odcinka $[x_1, x_2]$ w przedziale $(-r, r)$. Przy danej grubości plastra pole to będzie takie samo w pobliżu bieguna jak w pobliżu równika kuli K .

Przekroje kuli K płaszczyznami $x = x_1$, $x = x_2$ są kołami o promieniach $y(x_1)$, $y(x_2)$ odpowiednio, zatem ich łączne pole wynosi

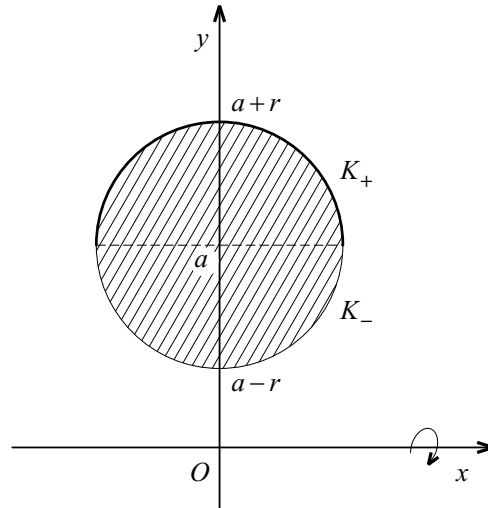
$$(37) \quad \pi(2r^2 - x_1^2 - x_2^2).$$

Pole całkowitej powierzchni plastra P otrzymujemy dodając (36), (37). Zauważmy, że we wzorze (36) możemy przejść do granicy przy $x_2 \rightarrow r$, $x_1 \rightarrow -r$. Otrzymujemy wówczas znany wzór na pole powierzchni Σ_r kuli o promieniu r

$$|\Sigma_r| = 4\pi r^2.$$

Przykład 10. Koło o środku $(0, a)$ i promieniu r ($a > r$) obraca się dookoła osi x -ów tworząc bryłę T zwaną *torusem*. Zastosujemy wzór (20) do obliczenia objętości tej bryły. Okrąg K ograniczający koło opisany jest równaniem

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2 \quad (-r \leq x \leq r)$$



[rys. 70]

skąd po rozwiązaniu względem y dostajemy

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

a zatem

$$y^2 = a^2 + r^2 - x^2 \pm 2a\sqrt{r^2 - x^2},$$

gdzie znak $+$ odpowiada górnej części K_+ okręgu K a znak $-$ dolnej części K_- tego okręgu (rys. 70). Oznaczmy przez T_+ (T_-) bryłę przestrzenną otrzymaną przez obrót dookoła osi x -ów obszaru zawartego między półokręgiem K_+ (K_-) a osią x -ów. Wówczas

$$(38) \quad |T| = |T_+| - |T_-|.$$

Zgodnie ze wzorem (20)

$$|T_+| = \pi \int_{-r}^r \left(a^2 + r^2 - x^2 + 2a\sqrt{r^2 - x^2} \right) dx$$

oraz

$$|T_-| = \pi \int_{-r}^r \left(a^2 + r^2 - x^2 - 2a\sqrt{r^2 - x^2} \right) dx$$

zatem wobec (38)

$$(39) \quad |T| = 4\pi a \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Całkę J we wzorze (39) przekształcimy następująco: podstawienie $x = rt$ daje

$$J = r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt,$$

skąd po rozbiciu przedziału całkowania

$$J = r^2 \left(\int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt + \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \right).$$

Podstawiając dalej $t = -s$ w pierwszej całce otrzymujemy

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt = - \int_1^0 \sqrt{1-s^2} ds = \int_0^1 \sqrt{1-s^2} ds$$

zatem

$$J = 2r^2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

Ostatnia całka była liczona w Przykładzie 3. Ostatecznie wzór (39) daje objętość torusa

$$|T| = 2\pi^2 r^2 a.$$

♡ ♡ ♡

6. Zastosowania fizyczne całki oznaczonej - momenty statyczne i środek masy. *Momentem statycznym punktu materialnego względem prostej l nazywamy iloczyn $m \cdot d$ gdzie m oznacza masę punktu zaś d odległość punktu od tej prostej. W przypadku układu punktów materialnych o masie m_j i odległości d_j od prostej l ($j = 1, \dots, k$) przez *moment statyczny tego układu względem prostej l* rozumiemy sumę momentów poszczególnych punktów tzn. wyrażenie*

$$M = \sum_{j=1}^k m_j d_j.$$

Pojęcie momentu statycznego łatwo przenieść na przypadek masy rozłożonej w sposób ciągły na krzywej lub w obszarze płaskim. Dla uproszczenia rachunków będziemy zakładali, że rozważana krzywa względnie obszar leży w pierwszej ćwiartce płaszczyzny xy i że masa rozłożona jest w sposób ciągły z gęstością 1. Wobec tego masa każdego fragmentu krzywej jest równa jego długości a masa każdej części obszaru równa jej polu. Zaczniemy od przypadku krzywej K określonej równaniem

$$(40) \quad y = f(t) \quad \left(t \in \mathbb{P} = [a, b] \right)$$

gdzie $f \in C^1(\mathbb{I})$. Krzywa K jest więc wykresem funkcji f , przy czym $0 \leq a < b$, $f(t) \geq 0$. Przy danym podziale Π przedziału $[a, b]$ określonym nierównościami

$$(41) \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

część K_j krzywej K określona równaniem (40) dla $t \in [x_{j-1}, x_j]$ możemy przy dostatecznie małej średnicy podziału Π uważać za punkt materialny $(\xi_j, f(\xi_j))$ o masie $\Delta s_j = s(x_j) - s(x_{j-1})$, gdzie $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ zaś funkcja $s(x)$ określona jest wzorem (15) (przypomnijmy, że $s(x)$ oznacza długość części krzywej K opisanej równaniem (40) dla $t \in [a, x]$, zatem Δs_j jest długością części K_j krzywej). Zastępując krzywą K przez tak określony układ punktów materialnych znajdujemy jego momenty statyczne:

względem osi x -ów

$$M_x(\Pi) = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta s_j,$$

względem osi y -ów

$$M_y(\Pi) = \sum_{j=1}^k \xi_j \Delta s_j.$$

Oczywiście układ punktów materialnych $\{K_j\}$ tym lepiej przybliża krzywą K z masą rozłożoną na niej w sposób ciągły im drobniejszy jest podział Π tzn. im mniejsza jest średnica $d(\Pi)$. Można więc w naturalny sposób przyjąć następującą definicję *momentów statycznych krzywej K względem osi układu*:

względem osi x -ów jako

$$M_x(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_x(\Pi_n),$$

względem osi y -ów jako

$$M_y(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_y(\Pi_n)$$

gdzie $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$. Zauważmy, że wyrażenia $M_x(\Pi)$, $M_y(\Pi)$ stanowią sumy przybliżone całek

$$\int_0^S y \, ds, \quad \int_0^S x \, ds,$$

gdzie S oznacza długość krzywej K , $x = x(s)$ jest funkcją odwrotną do funkcji $s(x)$ zaś $y = f(x(s))$. Wobec tego zgodnie z twierdzeniem 1 §1 z przyjętej definicji wynikają wzory

$$(42) \quad M_x(K) = \int_0^S y(s) \, ds, \quad M_y(K) = \int_0^S x(s) \, ds,$$

co po uwzględnieniu równania (40) krzywej K i wzoru (16) można zapisać w postaci

$$(43) \quad M_x(K) = \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} \, dx, \quad M_y(K) = \int_a^b x \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \quad (y = f(x)).$$

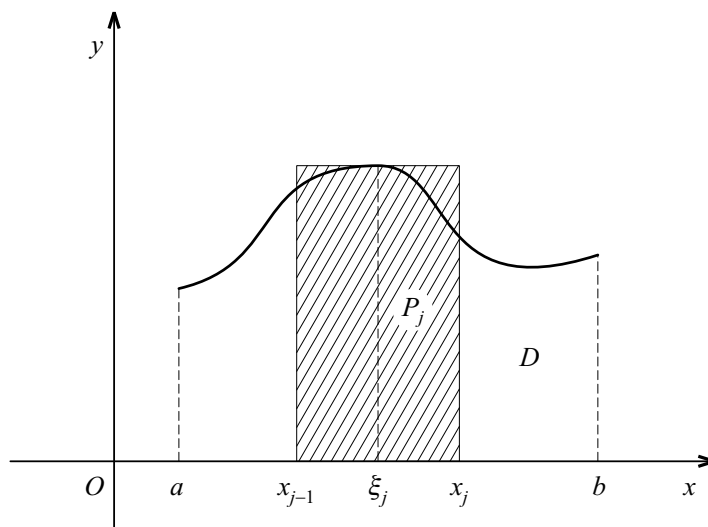
Przejdźmy teraz do obszaru płaskiego D zawartego między wykresem funkcji f w przedziale $[a, b]$ ($0 \leq a < b$) i osią x -ów, przy czym f jest funkcją ciągłą nieujemną. Rozważając podział Π przedziału $[a, b]$ określony nierównościami (41) zastąpimy obszar D przez układ prostokątów P_j ($j = 1, \dots, k$) (rys.71) o podstawie $[x_{j-1}, x_j]$ i wysokości $f(\xi_j)$, gdzie ξ_j jest środkiem odcinka $[x_{j-1}, x_j]$. Prostokąt P_j będziemy uważali za punkt materialny umieszczony w środku geometrycznym prostokąta i o masie równej jego polu. Punkt ten ma zatem współrzędne $(\xi_j, \frac{1}{2}f(\xi_j))$ i masę $f(\xi_j)\Delta x_j$ gdzie $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$. Momenty statyczne tak określonego układu punktów materialnych mają postać:

względem osi x -ów

$$\tilde{M}_x(\Pi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (f(\xi_j))^2 \Delta x_j,$$

względem osi y -ów

$$\tilde{M}_y(\Pi) = \sum_{j=1}^k \xi_j f(\xi_j) \Delta x_j.$$



[rys. 71]

Oczywiście układ punktów materialnych $\{P_j\}$ tym lepiej przybliża obszar D z rozłożoną w nim masą im mniejszą średnicę ma podział Π , wobec tego przyjmujemy następującą definicję *momentów statycznych obszaru D względem osi układu*:

momentu statycznego względem osi x -ów jako granicy

$$M_x(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{M}_x(\Pi_n),$$

momentu statycznego względem osi y -ów jako granicy

$$M_y(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{M}_y(\Pi_n),$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$. Ponieważ wyrażenia $\tilde{M}_x(\Pi)$, $\tilde{M}_y(\Pi)$ są sumami przybliżonymi całek

$$\frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx, \quad \int_a^b x f(x) dx,$$

z przyjętej definicji wynikają w oparciu o twierdzenie 1 §1 wzory

$$(44) \quad M_x(D) = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y(D) = \int_a^b xy dx \quad (y = f(x)).$$

Przez *środek masy* układu punktów materialnych (x_j, y_j) o masie m_j ($x_j, y_j > 0$ $j = 1, \dots, k$) rozumiemy punkt (ξ, η) o współrzędnych określonych wzorami

$$\xi = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^k m_j x_j, \quad \eta = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^k m_j y_j \quad (M = \sum_{j=1}^k m_j).$$

Ze wzorów tych widać, że jeżeli w środku masy umieścimy całkowitą masę M układu, to jego momenty statyczne względem obu osi są równe odpowiednim momentom statycznym układu.

Pojęcie środka masy można łatwo przenieść na przypadek, gdy masa rozłożona jest w sposób ciągły na krzywej lub w obszarze płaskim. Podobnie, jak przy rozważaniu momentów statycznych, będziemy zakładali, że krzywa względnie obszar leży w pierwszej ćwiartce płaszczyzny xy i że masa rozłożona jest z gęstością 1.

Środkiem masy krzywej K określonej równaniem (40) nazywamy punkt (ξ, η) o współrzędnych określonych wzorami

$$(45) \quad \xi = \frac{1}{S} M_y(K), \quad \eta = \frac{1}{S} M_x(K)$$

które po uwzględnieniu (42) można zapisać w postaci

$$(46) \quad \xi = \frac{1}{S} \int_0^S x ds, \quad \eta = \frac{1}{S} \int_0^S y ds.$$

Ze wzoru (45) widać, że jeżeli środek masy potraktujemy jako punkt materialny o masie równej długości krzywej, to jego momenty statyczne względem osi układu współrzędnych są równe odpowiednim momentom tej krzywej.

Środkiem masy obszaru D zawartego między wykresem funkcji ciągłej nieujemnej f w przedziale $[a, b]$ ($0 \leq a < b$) a osią x -ów nazywamy punkt (ξ, η) którego współrzędne dane są wzorami

$$(47) \quad \xi = \frac{1}{|D|} M_y(D), \quad \eta = \frac{1}{|D|} M_x(D),$$

gdzie $|D|$ oznacza pole obszaru D . Po uwzględnieniu (44) wzory te przyjmują postać

$$(48) \quad \xi = \frac{1}{|D|} \int_a^b xy \, dx, \quad \eta = \frac{1}{2|D|} \int_a^b y^2 \, dx.$$

Podobnie, jak w przypadku krzywej, środek masy traktowany jako punkt materialny o masie równej polu obszaru ma momenty statyczne względem osi układu współrzędnych równe odpowiednim momentom tego obszaru. Mnożąc drugi ze wzorów (46) przez $2\pi S$ otrzymujemy

$$(49) \quad 2\pi\eta S = 2\pi \int_0^S y \, ds,$$

gdzie zgodnie ze wzorem (32) prawa strona jest równa polu powierzchni powstałej przez obrót krzywej K dookoła osi x -ów. Podobnie, mnożąc przez $2\pi |D|$ drugi ze wzorów (48) dostajemy

$$(50) \quad 2\pi\eta |D| = \pi \int_a^b y^2 \, dx,$$

gdzie wobec (20) prawa strona jest równa objętości bryły powstałej przez obrót obszaru D dookoła osi x -ów. Wzory (49), (50) stanowią matematyczny zapis *reguł Guldina*:²

Pierwsza reguła Guldina. *Pole powierzchni powstałej przy obrocie krzywej płaskiej dookoła osi leżącej w płaszczyźnie krzywej i nie przecinającej jej jest równe iloczynowi długości tej krzywej przez długość drogi, jaką przebył przy obrocie jej środek masy.*

Druga reguła Guldina. *Objętość bryły powstałej przy obrocie obszaru płaskiego dookoła osi leżącej w płaszczyźnie obszaru i nie mającej z nim punktów wspólnych jest równa iloczynowi pola tego obszaru przez długość drogi, jaką przebył przy obrocie jego środek masy.*

Przykład 11. Znaleźć momenty statyczne względem osi układu współrzędnych i środek masy łuku K paraboli

$$y = x^2 \quad (0 \leq x \leq b)$$

zakładając, że masa jest rozłożona na nim ze stałą gęstością 1.

Zacniemy od obliczenia długości S łuku. Mamy

$$y' = 2x,$$

zatem ze wzoru (14) wynika, że

$$S = \int_0^b \sqrt{1 + 4x^2} \, dx,$$

²Poul Guldin (1577 - 1643), pochodził ze Szwajcarii, wykładał w kolegiach jezuickich w Rzymie, Wiedniu i Gruz, w 1641 r. opublikował twierdzenia dotyczące brył obrotowych.

co po podstawieniu

$$2x = t$$

daje

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2b} \sqrt{1+t^2} dt.$$

Opierając się na rachunkach przeprowadzonych w Przykładzie 5 dostajemy ostatecznie

$$(51) \quad S = \frac{1}{4} \log \left(2b + \sqrt{1+4b^2} \right) + \frac{1}{2} b \sqrt{1+4b^2}.$$

Zgodnie z wzorami (43) mamy

$$M_x(K) = \int_0^b x^2 \sqrt{1+4x^2} dx, \quad M_y(K) = \int_0^b x \sqrt{1+4x^2} dx.$$

W całce M_y zastosujemy podstawienie

$$4x^2 = z,$$

wówczas

$$8x dx = dz$$

zatem

$$M_y(K) = \frac{1}{8} \int_0^{4b^2} \sqrt{1+z} dz = \frac{1}{12} \left[(1+z)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{4b^2},$$

czyli

$$(52) \quad M_y(K) = \frac{1}{12} (1+4b^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}.$$

Całkę M_x obliczymy stosując podstawienie Eulera (por. punkt 8 §2)

$$(53) \quad \sqrt{1+4x^2} = t - 2x.$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu i redukcji otrzymujemy z (53)

$$(54) \quad x = \frac{t^2 - 1}{4t}$$

oraz

$$(55) \quad \sqrt{1+4x^2} = \frac{t^2 + 1}{2t},$$

ponadto z (54)

$$(56) \quad dx = \frac{t^2 + 1}{4t^2} dt.$$

Z (53) - (56) wynika, że całka m_x przyjmuje po podstawieniu (53) postać

$$(57) \quad M_x(K) = \int_1^a \frac{(t^2 - 1)^2}{16t^2} \cdot \frac{(t^2 + 1)^2}{8t^3} dt$$

gdzie

$$(58) \quad a = \sqrt{1 + 4b^2} + 2b.$$

Po prostych rachunkach stwierdzamy, że funkcja podcałkowa $g(t)$ we wzorze (57) jest równa

$$g(t) = \frac{1}{128t^5}(t^4 - 1)^2 = \frac{1}{128}\left(t^3 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^5}\right),$$

zatem

$$M_x(K) = \frac{1}{128} \left[\frac{t^4}{4} - \frac{1}{4t^4} - 2 \log t \right]_1^a,$$

a więc

$$(59) \quad M_x(K) = \frac{1}{128} \left(\frac{a^4}{4} - \frac{1}{4a^4} - 2 \log a \right).$$

Współrzędne (ξ, η) środka masy znajdujemy stosując wzory (45) i korzystając z otrzymanych wyników (51), (52), (59).

Przykład 12. Znaleźć momenty statyczne względem osi układu i środek masy obszaru D zawartego między elipsą o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$

i przedziałem $[0, a]$ na osi x -ów (rys. 63) (zakładamy, że masa jest rozłożona w sposób ciągły z gęstością 1).

Z rachunków przeprowadzonych w Przykładzie 6 wynika, że

$$(60) \quad |D| = \frac{1}{4}\pi ab.$$

Rozwiązując równanie elipsy względem y dostajemy (dla $y \geq 0$)

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

skąd wobec wzorów (44)

$$(61) \quad M_x(D) = \frac{b^2}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

oraz

$$M_y(D) = b \int_0^a x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Z (61) dostajemy

$$M_x(D) = \frac{b^2}{2} \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a,$$

co daje po prostym rachunku

$$(62) \quad M_x(D) = \frac{1}{3} ab^2.$$

W całce $M_y(D)$ zastosujemy podstawienie

$$\frac{x^2}{a^2} = t,$$

skąd wynika w zapisie różniczkowym

$$x dx = \frac{a^2}{2} dt$$

zatem

$$(63) \quad M_y(D) = \frac{ba^2}{2} \int_0^1 \sqrt{1-t} dt.$$

Ponieważ

$$\int_0^1 \sqrt{1-t} dt = \left[-\frac{2}{3} (1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

więc z (63) otrzymujemy

$$(64) \quad M_y(D) = \frac{1}{3} a^2 b.$$

Korzystając ze wzorów (47) i opierając się na wynikach (60), (62), (64) znajdujemy środek masy. Ma on współrzędne

$$\xi = \frac{4}{3\pi} a, \quad \eta = \frac{4}{3\pi} b.$$

□

Przykład 13. Znaleźć objętość elipsoidy obrotowej E powstałej przez obrót elipsy o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$

dokoła osi x -ów.

Ze względu na symetrię wystarczy założyć, że obraca się ćwiartka elipsy D rozważana w Przykładzie 12 (zakreskowana na rys. 63) - objętość otrzymanej bryły obrotowej V będzie wówczas równa połowie objętości elipsoidy. W celu znalezienia objętości bryły V wykorzystamy drugą regułę Guldina. Wiemy, że (por. Przykład 6)

$$|D| = \frac{1}{4}\pi ab,$$

natomiast środek masy obszaru D zakreśla przy obrocie okrąg o promieniu η (por. Przykład 12), wobec tego

$$|V| = \frac{1}{4}\pi ab \cdot 2\pi\eta,$$

co po prostym rachunku daje

$$|V| = \frac{2}{3}\pi ab^2,$$

zatem

$$|E| = 2|V| = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

W przypadku, gdy obracająca się elipsa jest kołem o promieniu r ($a = b = r$), otrzymujemy stąd znany wzór na objętość kuli. $\square$

Uwaga. Przy wyprowadzaniu wzorów (49), (50) zakładaliśmy, że funkcja f , której wykresem jest krzywa K ograniczająca obszar D , przyjmuje wartości nieujemne i jest określona w przedziale $[a, b]$, gdzie $0 \leq a < b$. W związku z tym reguły Guldina pozostają słuszne w przypadku, gdy końce krzywej względnie część brzegu obszaru leżą na osi obrotu - fakt ten wykorzystaliśmy w Przykładzie 13.

♡ ♡ ♡

7. Twierdzenia o wartości średniej rachunku całkowego. Udowodnimy dwie własności całki oznaczonej, które noszą nazwę twierdzeń o wartości średniej.

Twierdzenie 3 (pierwsze twierdzenie o wartości średniej). *Założmy, że funkcje f, g są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i że funkcja g ma stały znak. Wówczas istnieje punkt $\xi \in [a, b]$ taki, że*

$$(65) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g dx.$$

DOWÓD. Niech m, M oznaczają kres dolny i górny funkcji f w przedziale $[a, b]$, wówczas

$$(66) \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Założmy, że

$$g(x) \geq 0 \quad (x \in [a, b])$$

(w przypadku nierówności przeciwnej dowód przebiega podobnie i proponujemy Czytelnikowi samodzielne przeprowadzenie go). Z nierówności (66) wynika, że

$$(67) \quad mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

co po scałkowaniu (por. twierdzenie 4 §1) daje

$$(68) \quad m \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x)g(x) \, dx \leq M \int_a^b g(x) \, dx.$$

Jeżeli

$$A = \int_a^b g(x) \, dx = 0$$

to na mocy (68) również

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = 0$$

i równość (65) jest spełniona dla dowolnego $\xi \in [a, b]$. Jeżeli zaś $A \neq 0$, to (68) możemy zapisać w postaci

$$m \leq B \leq M$$

gdzie

$$B = \frac{1}{A} \int_a^b f(x)g(x) \, dx.$$

Z twierdzenia Wierstrassa (twierdzenie 12 rozdz. III §3) wynika, że liczby m, M są wartościami funkcji f w pewnych punktach $c_1, c_2 \in [a, b]$. Ponieważ na mocy twierdzenia Bolzano Cauchy'ego (twierdzenie 13 rozdz. III §3) funkcja f ma w przedziale $[a, b]$ własność Darboux, przyjmuje ona w przedziale $\mathbb{P}$ o końcach c_1, c_2 każdą wartość pośrednią między m, M ; w szczególności istnieje punkt $\xi \in \mathbb{P}$ taki, że

$$f(\xi) = B.$$

Ostatnia równość jest równoważna (65), co kończy dowód. □

Przyjmując w twierdzeniu 3

$$g(x) = 1$$

otrzymujemy natychmiast

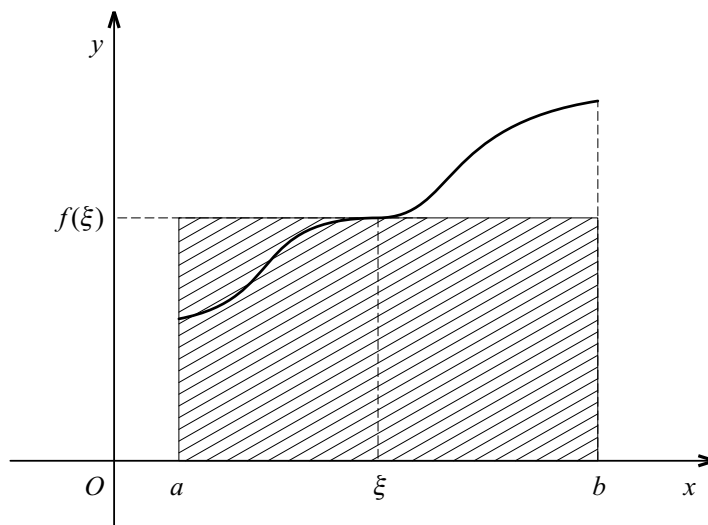
Twierdzenie 4. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to istnieje punkt $\xi \in [a, b]$ taki, że*

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi)(b - a).$$

□

W przypadku funkcji f nieujemnej twierdzenie to ma prosty sens geometryczny: pole obszaru zawartego między wykresem funkcji a osią x -ów jest równe polu prostokąta o

podstawie $[a, b]$ i wysokości $f(\xi)$, gdzie ξ jest odpowiednio dobranym punktem przedziału $[a, b]$ (rys. 72).



[rys. 72]

Twierdzenie 5 (drugie twierdzenie o wartości średniej). Załóżmy, że funkcja f jest ciągła zaś funkcja g jest monotoniczna i ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$. Wówczas istnieje punkt $\xi \in [a, b]$ taki, że

$$(69) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

DOWÓD. Przyjmijmy

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

wówczas zgodnie z twierdzeniem 6 §1 funkcja F jest różniczkowalna w przedziale $[a, b]$ i przy tym

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Wobec tego

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b F'(x)g(x) dx,$$

co po zastosowaniu wzoru (1) na całkowanie przez części daje

$$(70) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = \left[F(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx.$$

Na mocy twierdzenia 13 rozdz. III §4 pochodna $g'(x)$ ma stały znak, możemy więc do całki po prawej stronie (70) zastosować twierdzenie 3, co daje

$$\int_a^b F(x)g'(x) dx = F(\xi) \int_a^b g'(x) dx$$

czyli

$$(71) \quad \int_a^b F(x)g'(x) dx = F(\xi)(g(b) - g(a))$$

dla pewnego $\xi \in [a, b]$. Z (70), (71) dostajemy

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a)(F(\xi) - F(a)) + g(b)(F(b) - F(\xi)),$$

co jest równoważne z równością (69). □

Przykład 14. Udowodnimy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\sin nx}{x} dx = 0 \quad (0 < a < b).$$

Zastosujemy drugie twierdzenie o wartości średniej przyjmując

$$f(x) = \sin nx, \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Otrzymujemy dla pewnego $\xi \in [a, b]$

$$u_n = \int_a^b \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{1}{a} \int_a^\xi \sin nx dx + \frac{1}{b} \int_\xi^b \sin nx dx,$$

czyli po obliczeniu całek po prawej stronie

$$u_n = \frac{1}{na}(\cos na - \cos n\xi) + \frac{1}{nb}(\cos n\xi - \cos nb),$$

a stąd

$$(72) \quad |u_n| \leq \frac{2}{n} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) < \frac{4}{na}.$$

Z (72) wynika, że nierówność ε -owa

$$|u_n| < \varepsilon$$

jest spełniona, jeżeli $n \geq N = \frac{4}{a\varepsilon}$. □

♡ ♡ ♡

8*. Całkowanie przybliżone. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i niech Π_n będzie podziałem przedziału $[a, b]$ na n równych części określonym nierównościami

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

gdzie

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Obierając jako punkt pośredni ξ_j środek przedziału $[x_{j-1}, x_j]$ możemy utworzyć sumę przybliżoną

$$(73) \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \quad \left(\xi_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j) \right).$$

Zgodnie ze wzorem (17) §1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx,$$

zatem sumę S_n możemy uważać za przybliżoną wartość całki

$$(74) \quad \int_a^b f(x) dx.$$

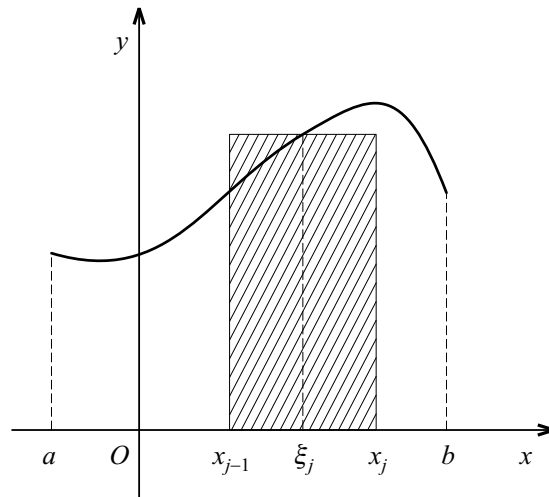
Do obliczenia jej wystarczy znać wartość funkcji w skończonej ilości punktów ξ_j ($j = 1, \dots, n$) (gdy funkcja opisuje jakąś wielkość fizyczną, wartości te wyznaczamy z pomiarów). Przejście od funkcji f do układu liczb $\{f(\xi_j)\}$ nazywamy *dyskretyzacją funkcji*, zaś różnicę $h = \xi_j - \xi_{j-1}$ *krokiem dyskretyzacji*. Równość (73) możemy zapisać inaczej w postaci

$$(75) \quad P(h) = h \sum_{j=1}^n f(\xi_j),$$

gdzie

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_j = a + jh, \quad \xi_j = a + \left(j - \frac{1}{2}\right)h \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

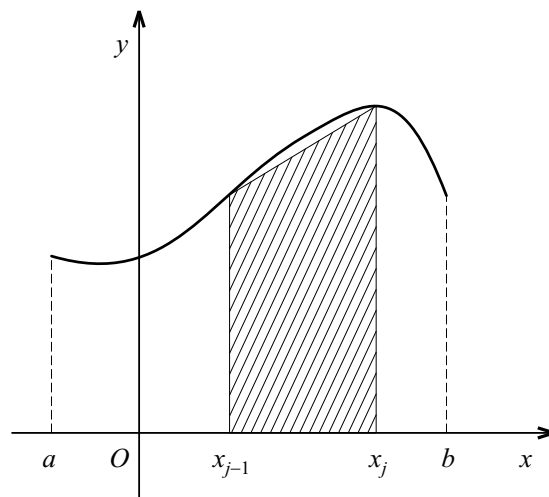
Przybliżoną metodę obliczania całki (74) polegającą na zastąpieniu jej przez sumę $P(h)$ nazywamy *metodą prostokątów*. Nazwa wynika z jej sensu geometrycznego: w przypadku dodatniej funkcji f pole pod jej wykresem w każdym przedziale $[x_{j-1}, x_j]$ zastępujemy przez pole prostokąta o bokach h , $f(\xi_j)$ (rys.73), gdzie $h = x_j - x_{j-1}$ zaś ξ_j jest środkiem odcinka $[x_{j-1}, x_j]$.



[rys. 73]

Przybliżoną wartość całki (74) możemy również obliczyć w inny sposób, zastępując (w przypadku funkcji f dodatniej) pole pod wykresem funkcji w przedziale $[x_{j-1}, x_j]$ przez pole trapezu o podstawach $f(x_{j-1})$, $f(x_j)$ i wysokości $\Delta x_j = \frac{b-a}{n}$ (rys. 74). Dodając pola tych trapezów otrzymujemy sumę

$$(76) \quad \bar{S}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j)).$$



[rys. 74]

W dalszym ciągu nie będziemy robili żadnych założeń o znaku funkcji f . Ponieważ liczba

$$\bar{y}_j = \frac{1}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j))$$

leży między liczbami $f(x_{j-1})$, $f(x_j)$, z twierdzenia Bolzano - Cauchy'ego (twierdzenie 13 rozdz. III §3) wynika istnienie punktu $\bar{x}_j \in [x_{j-1}, x_j]$ takiego, że

$$\bar{y}_j = f(\bar{x}_j).$$

Wobec tego suma $\bar{S}_n$ może być zapisana w postaci

$$\bar{S}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_j),$$

jest to więc suma przybliżona całki (74) i wobec (17) §1 mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Zatem suma $\bar{S}_n$ również może być uważana za przybliżoną wartość całki (74). Przy użyciu wprowadzonych wcześniej oznaczeń możemy (76) zapisać inaczej w postaci

$$(77) \quad T(h) = h \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j))$$

gdzie

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_j = a + jh \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Metodę przybliżonego obliczania całki (74) polegającą na zastąpieniu jej przez sumę $T(h)$ nazywamy *metodą trapezów*.

Trzecia metoda przybliżonego obliczania całki (74) zwana *metodą Simpsona*³ polega na zastąpieniu funkcji f w przedziale $[x_{j-1}, x_j]$ przez wielomian w stopnia ≤ 2 spełniający warunki

$$(78) \quad w(x_{j-1}) = y_{j-1}, \quad w(x_j) = y_j, \quad w(\xi_j) = \eta_j,$$

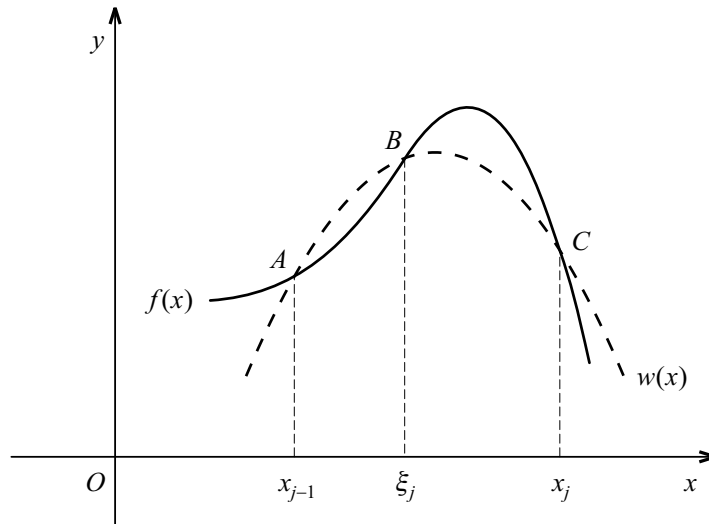
gdzie

$$y_{j-1} = f(x_{j-1}), \quad y_j = f(x_j), \quad \xi_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j), \quad \eta_j = f(\xi_j).$$

Wykresem wielomianu w jest linia prosta, jeżeli punkty $A = (x_{j-1}, y_{j-1})$, $B = (\xi_j, \eta_j)$, $C = (x_j, y_j)$ są współliniowe, w przeciwnym wypadku jest to parabola przechodząca przez te punkty (rys. 75). Łatwo wykazać, że taki wielomian istnieje. Niech bowiem

$$w(x) = ax^2 + bx + c,$$

³Thomas Simpson (1710 - 1761), matematyk angielski, profesor Akademii Wojskowej w Woolwich, zajmował się teorią błędów i metodami przybliżonego całkowania.



[rys. 75]

wówczas warunki (78) są równoważne układowi równań liniowych

$$(79) \quad \begin{aligned} ax_{j-1}^2 + bx_{j-1} + c &= y_{j-1} \\ ax_j^2 + bx_j + c &= y_j \\ a\xi_j^2 + b\xi_j + c &= \eta_j \end{aligned}$$

z niewiadomymi a, b, c . Wyznacznik tego układu jest wyznacznikiem Vandermonde'a⁴ a więc jest różny od zera, gdyż liczby x_{j-1} , x_j , ξ_j są różne. Wobec tego układ (79) ma dokładnie jedno rozwiązanie przy dowolnie danych y_{j-1}, y_j, η_j .

Okażemy teraz, że całka

$$p_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} w(x) dx$$

daje się wyrazić przez wartości funkcji f w punktach x_{j-1} , x_j , ξ_j . Całkując otrzymujemy

$$p_j = \frac{1}{3}a(x_j^3 - x_{j-1}^3) + \frac{1}{2}b(x_j^2 - x_{j-1}^2) + c(x_j - x_{j-1}),$$

co po rozłożeniu na czynniki wyrażeń w nawiasach daje

$$p_j = \frac{1}{3} q_j \Delta x_j$$

gdzie

$$q_j = a(x_{j-1}^2 + x_{j-1}x_j + x_j^2) + \frac{3}{2}b(x_{j-1} + x_j) + 3c.$$

⁴Wyznacznik Vandermonde'a jest omówiony w podręcznikach: B. Gleichgewicht, Algebra, Warszawa 1983 oraz A. Mostowski, M. Stark, Elementy algebry wyższej, Warszawa 1975.

Łatwy rachunek wykazuje, że

$$q_j = \frac{1}{2}w(x_{j-1}) + \frac{1}{2}w(x_j) + 2w(\xi_j)$$

wobec tego po uwzględnieniu (79) otrzymujemy

$$(80) \quad p_j = \frac{1}{6}(y_{j-1} + y_j + 4\eta_j)\Delta x_j.$$

Na mocy twierdzenia o podziale przedziału całkowania (twierdzenie 3 §1)

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx.$$

Zastępując całkę po przedziale $[x_{j-1}, x_j]$ przez wyrażenie p_j otrzymujemy przybliżoną wartość całki (74) w postaci sumy

$$Q_n = \frac{b-a}{6n} \sum_{j=1}^n (y_{j-1} + y_j + 4\eta_j),$$

co przy użyciu wcześniej wprowadzonych oznaczeń można zapisać jako

$$(81) \quad S(h) = \frac{h}{3} \sum_{j=1}^n \left(f(x_{j-1}) + f(x_j) + 4f(\xi_j) \right),$$

gdzie

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_j = a + 2jh, \quad \xi_j = a + (2j+1)h \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(h oznacza tu *krok dyskretyzacji* czyli odległość dwóch sąsiednich punktów, w których wyznaczamy wartość funkcji f).

9*. Oszacowanie błędu całkowania przybliżonego. Aby oszacować błąd jaki popełniamy zastępując całkę (74) przez jej przybliżoną wartość obliczoną według jednej z metod podanych w poprzednim punkcie posłużymy się wzorem Taylora (twierdzenie 2 rozdz. III §5). Załóżmy, że funkcja f określona w przedziale $\mathbb{P} = [c - \delta, c + \delta]$ jest klasy $C^2(\mathbb{P})$, wówczas przyjmując we wzorze Taylora $n = 2$ mamy dla $x \in \mathbb{P}$

$$(82) \quad f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + r_2(x),$$

gdzie

$$(83) \quad r_2(x) = \frac{(x-c)^2}{2} f''(\bar{x}),$$

zaś $\bar{x}$ jest punktem leżącym między c, x . Ze wzoru (82) wynika, że funkcja r_2 jest ciągła w przedziale IP jako różnica funkcji ciągłej f i funkcji liniowej. Całkując obustronnie (82) dostajemy

$$(84) \quad \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) \, dx = 2\delta f(c) + \int_{c-\delta}^{c+\delta} r_2(x) \, dx$$

a stąd

$$(85) \quad \left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) \, dx - 2\delta f(c) \right| \leq \frac{1}{2} m_2 \int_{c-\delta}^{c+\delta} (x-c)^2 \, dx = \frac{1}{3} m_2 \delta^3,$$

gdzie

$$m_2 = \sup_{IP} |f''(x)|.$$

Teraz już możemy łatwo oszacować **błąd metody prostokątów**. Niech dla ustalonego j

$$(86) \quad c = \xi_j, \quad \delta = \frac{h}{2}$$

zatem

$$(87) \quad c - \delta = x_{j-1}, \quad c + \delta = x_j.$$

Zakładając, że $f \in C^2([a, b])$ mamy wobec (85)

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \, dx - hf(\xi_j) \right| \leq \frac{1}{24} M_2 h^3 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

gdzie

$$M_2 = \sup_{[a, b]} |f''|$$

i wobec tego po rozbiciu przedziału całkowania $[a, b]$ na sumę przedziałów $[x_{j-1}, x_j]$ dostajemy

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - P(h) \right| \leq \frac{n}{24} M_2 h^3$$

skąd wobec

$$(88) \quad h = \frac{b-a}{n}$$

wynika oszacowanie

$$(89) \quad \left| \int_a^b f(x) \, dx - P(h) \right| \leq ch^2 \quad \left(c = \frac{M_2(b-a)}{24} \right).$$

Wracając do wzoru (82) zauważmy, że wynikają z niego równości

$$\begin{aligned} f(c + \delta) &= f(c) + \delta f'(c) + \frac{\delta^2}{2} f''(c_1) \\ f(c - \delta) &= f(c) - \delta f'(c) + \frac{\delta^2}{2} f''(c_2) \end{aligned}$$

gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{P}$, a z nich po dodaniu otrzymujemy

$$(90) \quad f(c + \delta) + f(c - \delta) = 2f(c) + \frac{\delta^2}{2} (f''(c_1) + f''(c_2)).$$

Z (84), (90) dostajemy

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx - \delta (f(c + \delta) + f(c - \delta)) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} r_2(x) dx - \frac{\delta^3}{2} (f''(c_1) + f''(c_2)),$$

skąd wynika nierówność

$$(91) \quad \left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx - \delta (f(c + \delta) + f(c - \delta)) \right| \leq \frac{4}{3} m_2 \delta^3.$$

Aby oszacować **błąd metody trapezów** założymy, że $f \in C^2([a, b])$ i przyjmiemy dla ustalonego j oznaczenia (86), (87), wówczas wobec (91)

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx - \frac{1}{2} h (f(x_{j-1}) + f(x_j)) \right| \leq \frac{1}{6} M_2 h^3,$$

skąd po rozbiciu przedziału $[a, b]$ na sumę przedziałów $[x_{j-1}, x_j]$ otrzymujemy po uwzględnieniu (88)

$$(92) \quad \left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| \leq ch^2 \quad \left(c = \frac{M_2(b-a)}{6} \right).$$

Przejdziemy teraz do oszacowania **błędu metody Simpsona**. Założmy, że $f \in C^4(\mathbb{P})$, wówczas ze wzoru Taylora przy $n = 4$ mamy dla $x \in \mathbb{P}$

$$(93) \quad f(x) = f(c) + (x - c)f'(c) + \frac{(x - c)^2}{2} f''(c) + \frac{(x - c)^3}{6} f'''(c) + r_4(x)$$

gdzie

$$(94) \quad r_4(x) = \frac{(x - c)^4}{24} f^{(4)}(\bar{x})$$

zaś $\bar{x}$ leży między c, x . Z (93) wynika, że funkcja r_4 jest ciągła w przedziale $\mathbb{P}$ jako różnica funkcji ciągłej f i wielomianu trzeciego stopnia. Wobec tego możemy równość (93) scałkować obustronnie, co daje

$$(95) \quad \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx = 2\delta f(c) + \frac{1}{3}\delta^3 f''(c) + \int_{c-\delta}^{c+\delta} r_4(x) dx.$$

Przyjmując jako x we wzorze (93) jeden z punktów końcowych przedziału $\mathbb{P}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(c+\delta) &= f(c) + \delta f'(c) + \frac{\delta^2}{2} f''(c) + \frac{\delta^3}{6} f'''(c) + \frac{\delta^4}{24} f^{(4)}(d_1), \\ f(c-\delta) &= f(c) - \delta f'(c) + \frac{\delta^2}{2} f''(c) - \frac{\delta^3}{6} f'''(c) + \frac{\delta^4}{24} f^{(4)}(d_2), \end{aligned}$$

gdzie $d_1, d_2 \in \mathbb{P}$. Po dodaniu stronami mamy

$$(96) \quad f(c+\delta) + f(c-\delta) = 2f(c) + \delta^2 f''(c) + b_1(\delta)$$

jeżeli przyjmiemy oznaczenie

$$(97) \quad b_1(\delta) = \frac{\delta^4}{24} (f^{(4)}(d_1) + f^{(4)}(d_2)).$$

Z równości (96) wynika, że

$$\delta^2 f''(c) = f(c+\delta) + f(c-\delta) - 2f(c) - b_1(\delta),$$

co po wstawieniu do (95) daje po prostym rachunku

$$(98) \quad \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx = \frac{1}{3}\delta (f(c+\delta) + f(c-\delta) + 4f(c)) + b_2(\delta)$$

gdzie

$$(99) \quad b_2(\delta) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} r_4(x) dx - \frac{1}{3}\delta b_1(\delta).$$

Aby zastosować przeprowadzone rachunki do oszacowania błędu metody Simpsona założymy, że $f \in C^4([a, b])$ i przyjmiemy dla ustalonego j

$$(100) \quad c = \xi_j, \quad \delta = h = \frac{b-a}{2n}$$

wówczas

$$c - \delta = x_{j-1}, \quad c + \delta = x_{j+1}$$

i z (98) otrzymujemy

$$(101) \quad \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \, dx - \frac{1}{3}h \left(f(x_{j-1}) + f(x_j) + 4f(\xi_j) \right) = b_2(h).$$

Z (94), (97), (99) po prostych rachunkach wynika oszacowanie

$$(102) \quad |b_2(h)| \leq \frac{2}{45} M_4 h^5,$$

gdzie

$$M_4 = \sup_{[a,b]} |f^{(4)}|.$$

Po rozbiciu przedziału $[a, b]$ na sumę przedziałów $[x_{j-1}, x_j]$ i uwzględnieniu (100) - (102) dostajemy ostatecznie

$$(103) \quad \left| \int_a^b f(x) \, dx - S(h) \right| \leq ch^4 \quad \left(c = \frac{M_4(b-a)}{45} \right).$$

Otrzymane oszacowania błędu (89), (92), (103) można zapisać krócej przy użyciu symboli Landau'a (rozdz. III §4 punkt 10). Zakładając, że $f \in C^2([a, b])$ mamy przy $h \rightarrow 0$

$$\int_a^b f(x) \, dx = P(h) + O(h^2)$$

oraz

$$\int_a^b f(x) \, dx = T(h) + O(h^2).$$

Jeżeli natomiast $f \in C^4([a, b])$, to

$$\int_a^b f(x) \, dx = S(h) + O(h^4)$$

przy $h \rightarrow 0$.

Zadania.

1. Obliczyć całki oznaczone

$$(i) \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx, \quad (ii) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx,$$

$$(iii) \int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx, \quad (iv) \int_0^1 x^3 e^{-x} \, dx.$$

Wskazówka. Zastosować całkowanie przez części.

2. Obliczyć całki oznaczone

$$(i) \int_0^1 (3x - 2)^5 \, dx, \quad (ii) \int_0^5 \frac{dx}{2x + 1},$$

$$(iii) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1 + \sin x}}, \quad (iv) \int_0^{\log 2} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \, dx.$$

Wskazówka. Zastosować odpowiednie podstawienie.

3. Okazać, że całka oznaczona

$$\int_0^a \frac{a \, dx}{a^2 + x^2}$$

nie zależy od a . Znaleźć jej wartość.

4. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \, dx}{3 - \cos x}.$$

Wskazówka. Zastosować podstawienie (omówione w §2 punkt 7)

$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

5. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$$

dwoma sposobami:

- a.) zastosować całkowanie przez części a następnie przez podstawienie;
- b.) zauważyć, że suma całek

$$\int_0^1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} y \, dy$$

jest równa polu pewnego prostokąta, następnie obliczyć drugą z całek stosując odpowiednie podstawienie.

6. Obliczyć całkę

$$\int_{-2}^0 |2x + |x + 1|| \, dx.$$

Wskazówka. Rozbić przedział całkowania.

7. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[-a, a]$ (gdzie $a > 0$). Okazać, że
(i) jeżeli f jest funkcją parzystą, to

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx;$$

(ii) jeżeli f jest funkcją nieparzystą, to

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

Podać sens geometryczny.

8. Zakładając ciągłość funkcji f udowodnić równości

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a f(a-t) \, dt, \\ \text{(ii)} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \, dx, \\ \text{(iii)} \quad & \int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx. \end{aligned}$$

Wskazówka. Punkt (ii) sprowadzić do punktu (i). W punkcie (iii) zastosować podstawienie $x = \pi - t$.

9. Mówimy, że funkcja f określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest T -okresowa jeżeli równość

$$f(x+T) = f(x)$$

zachodzi dla każdego x (liczbę T nazywamy *okresem* funkcji f). Zakładając ciągłość i T -okresowość funkcji f udowodnić, że

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx$$

dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

10. Zakładając ciągłość funkcji f na całej osi rzeczywistej udowodnić równość

$$\int_0^{2\pi} f(a \cos \theta + b \sin \theta) d\theta = 2 \int_0^\pi f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos \lambda) d\lambda$$

dla dowolnych rzeczywistych a, b .

Wskazówka. Opierając się na zadaniu 27 rozdz. III §3 przedstawić argument funkcji f w postaci $\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \alpha)$, gdzie α jest odpowiednio dobranym kątem. Następnie zastosować zadania 9 i 7.

11. Oznaczmy

$$A_n = \int_0^\pi \sin^n x dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Opierając się na wzorze rekurencyjnym podanym w §2 punkt 4 udowodnić zależność

$$A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}.$$

Wynioskować z niej, że

$$A_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \pi, \quad A_{2n+1} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}.$$

12. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\text{a.) } \int_0^\pi x \sin^n x dx, \quad \text{b.) } \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Wskazówka. Oprzeć się na zadaniu 8 (iii). W punkcie a.) skorzystać z zadania 11.

13. Znaleźć granice ciągów

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}, \quad v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 + k^2}.$$

Wskazówka. Zauważyć, że n -ty wyraz ciągu jest sumą przybliżoną pewnej całki oznaczonej. Obliczyć tę całkę i zastosować wzór (17) §1.

14. Znaleźć granicę ciągu

$$u_n = \frac{1}{n} \left(\log(2n)! - n \log n - \log n! \right).$$

Wskazówka. Skorzystać z równości

$$\frac{(2n)!}{n! n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right),$$

następnie zauważyć, że u_n jest sumą przybliżoną pewnej całki. Obliczyć tę całkę i zastosować wzór (17) §1.

15. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez parabolę $y = x^2$ i część okręgu o środku w początku układu i promieniu r leżącą w półpłaszczyźnie $y > 0$.

16. Obliczyć pole obszaru zawartego między parabolą $y = 4x^2$ i prostą $y = x + 1$.

17. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez prostą $y = x + 2$ i krzywą o równaniu

$$y = x^2 + 6x + 8$$

(co to za krzywa?).

18. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez parabole o równaniach

$$y^2 = x + 4, \quad y^2 = 4 - x.$$

19. Obliczyć pole wycinka AOB koła o promieniu r (rys. 66). Zakładamy, że środek okręgu znajduje się w początku układu współrzędnych i że promienie OA , OB tworzą z dodatnią półosią x -ów kąty α , β odpowiednio ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$). Porównać otrzymany wynik ze wzorem znanym z kursu szkolnego.

Wskazówka. Wykorzystać Przykład 8.

20. Naskicować wykres funkcji

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

i obliczyć pole zawarte między tym wykresem a osią x -ów w przedziale $[-1, 2]$.

21. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$ i prostymi $x = 0$, $x = 1$, $y = -2$.

22. Obliczyć pole figury płaskiej określonej w prostokątnym układzie współrzędnych nierównościami

$$1 \leq x \leq 2, \quad y \leq x, \quad xy \geq 1.$$

23. Obliczyć pole części wspólnej wnętrza elipsy o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < a < b)$$

i koła o środku w początku układu i promieniu r .

Wskazówka. Zauważyć najpierw, że elipsa i okrąg koła nie mają punktów wspólnych gdy $r < a$ lub $r > b$. Przy obliczaniu całki wykorzystać Przykład 21 §2.

24. Obliczyć długość odcinka o końcach $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ stosując wzór całkowy (punkt 4). Porównać ze znanym wzorem z geometrii elementarnej.

25. Znaleźć funkcję $s(x)$ określoną wzorem (15), jeżeli krzywa K dana jest równaniem

- a.) $y = x^2 \quad (x \geq 0)$,
- b.) $x^2 + y^2 = r^2 \quad (y \geq 0, r > 0)$,
- c.) $x = y^2 \quad (y \geq 0, x \geq 1)$,
- d.) $y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (x \geq 0)$.

Wskazówka. W punkcie a.) wykorzystać Przykład 5. W punkcie c.) całkować przez podstawienie przyjmując funkcję podcałkową jako nową zmienną. W punkcie d.) oprzeć się na wzorach (25), (26) rozdz. III §5.

Uwaga. Krzywa określona w punkcie d.) nosi nazwę *krzywej łańcuchowej*. W mechanice dowodzi się, że opisuje ona kształt łańcucha zaczepionego w dwóch punktach i zwisającego swobodnie pod własnym ciężarem.

26. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi x -ów obszaru określonego nierównościami

$$0 < x < \pi, \quad 0 < y < \sin x.$$

27. Jaka bryła powstanie przez obrót dookoła osi x -ów obszaru płaskiego ograniczonego prostymi $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ ($a < b$, $0 < c < d$)? Stosując wzory całkowe obliczyć objętość i powierzchnię boczną tej bryły. Porównać ze wzorami znanymi z geometrii elementarnej.

28. Obliczyć objętość i powierzchnię boczną bryły powstałej przez obrót dookoła osi x -ów obszaru ograniczonego wykresem funkcji

$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

i prostymi $x = 0$, $x = b > 0$, $y = 0$.

Wskazówka. Wykorzystać Przykład 5.

29. Udowodnić uogólniony wzór na całkowanie przez części

a.) dla całek nieoznaczonych

$$\int uv^{(n)} dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}v dx,$$

b.) dla całek oznaczonych

$$\int_a^b uv^{(n)} dx = \left[uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots + (-1)^{(n-1)}u^{(n-1)}v \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}v dx.$$

Zakładamy, że funkcje u, v mają ciągłe pochodne do rzędu n włącznie.
Wskazówka. Zastosować indukcję względem n .

30. Przyjmując w zadaniu 29 b.)

$$u(x) = (b - x)^{n-1}, \quad v(x) = f(x)$$

wyprowadzić wzór Taylora z resztą w postaci całkowej

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + r_n$$

gdzie

$$r_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n)}(x) (b-x)^{n-1} dx$$

(zakładamy, że $f \in C^n([a, b])$).

31. Korzystając z pierwszego twierdzenia o wartości średniej (twierdzenie 3) przedstawić resztę r_n określoną w zadaniu 30 jako resztę w postaci Lagrange'a (por. (4) rozdz. III §5).

32. Znaleźć momenty statyczne względem osi układu i współrzędne środka masy odcinka o końcach $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ (zakładamy, że punkty A , B leżą w pierwszej ćwiartce płaszczyzny xy oraz że $x_1 \neq x_2$).

33. Znaleźć momenty statyczne względem osi układu i współrzędne środka masy figury płaskiej zawartej między wykresem funkcji f a osią x -ów, jeżeli

$$(i) \quad f(x) = x|\sin x|, \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi,$$

$$(ii) \quad f(x) = x^\alpha, \quad 0 \leq x \leq a \quad (\alpha > 0),$$

$$(iii) \quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq r.$$

Podać rysunek.

Wskazówka. W punkcie (i) zastosować całkowanie przez części, w punkcie (iii) wykorzystać Przykład 3.

34. Niech f, g będą funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$ spełniającymi warunek

$$0 \leq g(x) < f(x) \quad \text{dla} \quad x \in (a, b) \quad (0 \leq a < b)$$

i niech D oznacza obszar zawarty między wykresami tych funkcji. Przeprowadzając rozumowanie podobne jak w punkcie 6 uzasadnić następującą definicję momentów statycznych obszaru D względem osi układu

$$M_x(D) = \frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx, \quad M_y(D) = \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx.$$

Stosując wzory (47) podać współrzędne (ξ, η) środka masy obszaru D i uzasadnić drugą regułę Guldina.

35. Opierając się na zadaniu 34 znaleźć momenty statyczne względem osi układu oraz środek masy obszaru D , jeżeli

- a.) $f(x) = 2, \quad g(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi,$
 b.) $f(x) = 3x, \quad g(x) = x, \quad 1 \leq x \leq 2.$

36. Udowodnić, że środkiem masy koła jest jego środek geometryczny.

Wskazówka. Zakładając, że koło o promieniu r ma środek w punkcie (b, a) ($a > r, b > r$), oprzeć się na wzorach (47) i na zadaniu 34. Przy obliczaniu całek wykorzystać rachunki przeprowadzone w Przykładzie 10 oraz zadanie 7.

37. Znaleźć objętość torusa powstałego przez obrót koła o środku (b, a) i promieniu r ($a > r, b > r$) dokoła osi x -ów

- (i) stosując wzór (20) na objętość bryły obrotowej,
 (ii) opierając się na drugiej regule Guldina (por. zadanie 34).

Wskazówka. W punkcie (i) wykorzystać rachunki przeprowadzone w Przykładzie 10, w punkcie (ii) oprzeć się na zadaniu 36.

38. Niech D oznacza część koła o środku $(r, 0)$ i promieniu r łączącą w pierwszej ćwiartce płaszczyzny xy (proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku).

(i) Znaleźć momenty statyczne względem obu osi oraz współrzędne (ξ, η) środka masy obszaru D korzystając ze wzorów (44), (47).

(ii) Znaleźć współrzędną η środka masy opierając się na drugiej regule Guldina (por. Uwaga po Przykładzie 13).

Wskazówka. W punkcie (i) wykorzystać rachunki przeprowadzone w Przykładzie 10 oraz zadanie 7.

39*. Opierając się na rachunkach przeprowadzonych w punkcie 8 wykazać, że metoda Simpsona daje dokładną wartość całki gdy f jest wielomianem stopnia ≤ 3 .

40*. Obliczyć liczbę π z dokładnością do czterech miejsc po przecinku stosując do całki

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

metody przybliżone opisane w punktach 7, 8.