

## §4. Całka niewłaściwa.

♡ ♡ ♡

**1. Obliczanie pola pod wykresem funkcji nieujemnej i nieograniczonej.** Zacznijmy od prostego zadania: obliczyć pole obszaru płaskiego  $\Omega$  zawartego między wykresem funkcji

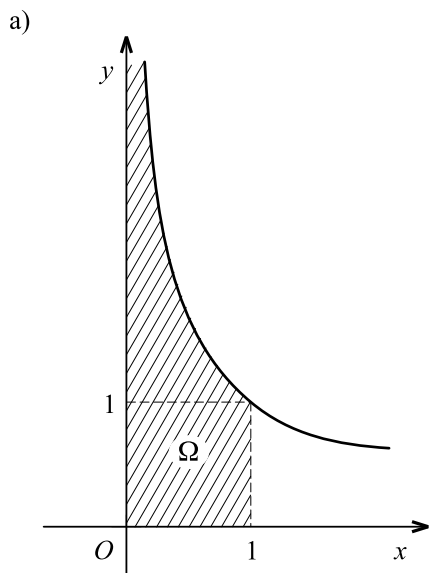
$$(1) \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

a osią  $x$ -ów w przedziale  $(0,1]$ . Ponieważ

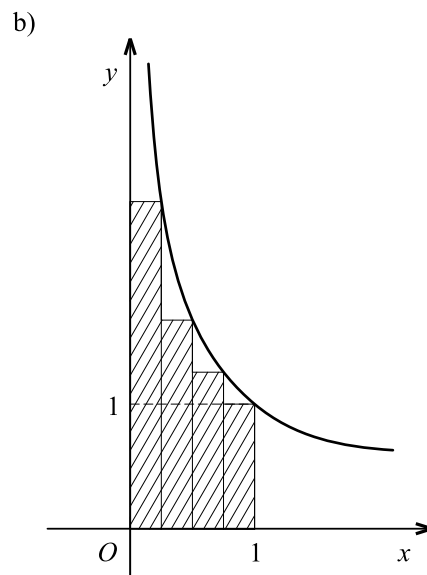
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty,$$

obszar  $\Omega$  jest nieograniczony (rys. 76a). Obszar ten może jednak mieć skończone pole, podobnie jak suma nieskończonej ilości wyrazów czyli szereg nieskończony może mieć skończoną wartość (por. rozdz. IV). W §1 postawiliśmy podobne zadanie dla funkcji  $f$  ciągłej w przedziale domkniętym  $[a, b]$ . Rozwiązaliśmy je konstruując sumy przybliżone, co doprowadziło ostatecznie do pojęcia całki oznaczonej

$$\int_a^b f(x) dx$$



[rys. 76a]



[rys. 76b]

będącej miarą pola obszaru  $\Omega$ . Spróbujemy teraz przenieść opisaną w §1 punkt 1 konstrukcję na przypadek funkcji  $g$  określonej wzorem (1).

Przy ustalonym  $n$  rozważmy podział przedziału  $(0,1]$  na  $n$  równych części - mamy zatem

$$x_j = \frac{j}{n} \quad (j = 0, 1, \dots, n).$$

Wybierając jako punkt pośredni  $\xi_j$  prawy koniec przedziału  $[x_{j-1}, x_j]$  utworzmy sumę przybliżoną

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(x_j).$$

Suma ta jest równa polu obszaru  $\Omega_n$  utworzonego z  $n$  prostokątów, z których każdy ma jako jeden bok odcinek  $[x_{j-1}, x_j]$  a drugi bok ma długość  $g(x_j)$  (na rys. 76b przyjęto  $n = 4$ , obszar  $\Omega_4$  zakreskowany). Oczywiście im większe  $n$  tym obszar  $\Omega_n$  lepiej przybliży obszar  $\Omega$ . Można więc przypuszczać, że

$$(2) \quad |\Omega| = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Aby obliczyć granicę (2) zauważmy najpierw, że

$$(3) \quad S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}}.$$

W celu oszacowania sumy po prawej stronie skorzystamy z nierówności

$$\frac{1}{\sqrt{j+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{j}} \quad (j \leq x \leq j+1),$$

która po scałkowaniu w przedziale  $[j, j+1]$  (por. twierdzenie 4 i Przykład 9 §1) daje

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{j+1}} \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{j}}$$

dla dowolnego  $j \in \mathbb{N}$ . Sumując względem  $j$  dostajemy stąd

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

czyli, po obliczeniu całek,

$$2\sqrt{n+1} - 1 \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}} \leq 2\sqrt{n} - 1,$$

skąd wobec (3) wynika oszacowanie

$$(5) \quad a_n \leq S_n \leq b_n,$$

gdzie

$$a_n = 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad b_n = 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

z nierówności (5) wynika na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2.$$

Powtórzmy teraz opisany przed chwilą rachunek dzieląc, ponownie jak poprzednio, przedział  $(0,1]$  na  $n$  równych części ale obierając w inny sposób punkty pośrednie. Przyjmiemy mianowicie dla ustalonego  $c > 0$

$$(7) \quad \xi_1 = \frac{1}{c^2 n^2}, \quad \xi_j = x_j = \frac{j}{n} \quad \text{dla } j = 2, \dots, n.$$

Dla  $n > \frac{1}{c^2}$  mamy  $\xi_1 \in (0, x_1]$  i możemy utworzyć sumę przybliżoną

$$\bar{S}_n = \frac{1}{n}g(\xi_1) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n g(\xi_j),$$

która również jest równa polu figury złożonej z prostokątów (proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku). Zgodnie z (1), (7)

$$\bar{S}_n = c + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=2}^n \frac{1}{\sqrt{j}}.$$

Opierając się na nierówności (4) dostajemy oszacowanie

$$\int_2^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \sum_{j=2}^n \frac{1}{\sqrt{j}} \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

z którego po obliczeniu całek wynika nierówność

$$(8) \quad \bar{a}_n \leq \bar{S}_n \leq \bar{b}_n,$$

gdzie

$$\bar{a}_n = c + 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \quad \bar{b}_n = c + 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Ponieważ

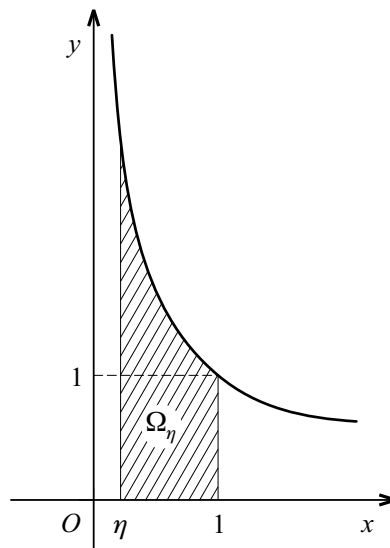
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{b}_n = c + 2$$

stosując ponownie twierdzenie o trzech ciągach otrzymujemy z (8)

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = c + 2.$$

Porównując wyniki (6), (9) stwierdzamy, że granica ciągu sum przybliżonych zależy od sposobu, w jaki obieramy punkty pośrednie  $\xi_j$ : ustalając dowolnie liczbę  $a \geq 2$  możemy je obrać w taki sposób, by ciąg sum przybliżonych był zbieżny do  $a$ . Widzimy więc, że konstrukcja prowadząca do obliczenia pola pod wykresem funkcji opisana w §1 zawodzi w przypadku gdy funkcja ta jest nieograniczona (a więc i nieciągła) w jednym z punktów końcowych przedziału. Możemy jednak postąpić inaczej, obliczając najpierw pole obszaru  $\Omega_\eta$  zawartego między wykresem funkcji  $g$  a osią  $x$ -ów w przedziale domkniętym  $[\eta, 1]$  a następnie przechodząc do granicy przy  $\eta \rightarrow 0+$  (rys. 77) Ponieważ jak wiemy (por. §1)

$$|\Omega_\eta| = \int_\eta^1 g(x) dx = 2 - 2\sqrt{\eta}$$



[rys. 77]

więc

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+} |\Omega_\eta| = 2.$$

Znalezioną granicę możemy uważać za pole obszaru  $\Omega$ . Zauważmy, że tą samą wartość otrzymaliśmy aproksymując obszar  $\Omega$  przez obszary  $\Omega_n$  złożone z prostokątów, gdy jako punkt pośredni w sumie przybliżonej został obrany prawy koniec przedziału  $[x_{j-1}, x_j]$ .

**2. Całka niewłaściwa po przedziale ograniczonym.** W §1 określiliśmy całkę funkcji ciągłej w przedziale domkniętym jako granicę ciągu sum przybliżonych. W przypadku funkcji nieujemnej całka ta stanowi miarę pola zawartego między wykresem funkcji a osią  $x$ -ów. Jak widać z przykładu podanego w punkcie 1, metoda ta zawodzi w przypadku funkcji nieciągłej w jednym z końców przedziału, gdyż granica ciągu sum przybliżonych może zależeć od sposobu, w jaki zostały one skonstruowane - na przykład od wyboru

punktów pośrednich  $\xi_j$ . Jako punkt wyjścia do definicji całki takiej funkcji przyjmiemy przedstawiony w końcu punktu 1 sposób obliczania pola pod wykresem funkcji  $g$  określonej wzorem (1).

Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą w przedziale  $(a, b]$  i niech

$$G(\eta) = \int_{a+\eta}^b f(x) dx.$$

Jeżeli istnieje skończona granica

$$(10) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0^+} G(\eta)$$

to mówimy, że *całka niewłaściwa*

$$(11) \quad \int_a^b f(x) dx$$

jest zbieżna i przyjmujemy

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{a+\eta}^b f(x) dx.$$

Jeżeli granica (10) nie istnieje lub jest granicą niewłaściwą, to mówimy, że *całka niewłaściwa* (11) *jest rozbieżna*.

**Przykład 1.** Zbadamy całkę

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Funkcja podcałkowa

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

jest ciągła w przedziale  $(0, 1]$ , natomiast nie jest określona dla  $x = 0$ . Wobec tego całka  $I(\alpha)$  jest całką niewłaściwą. Zakładając, że  $\alpha \neq 1$  dostajemy przy ustalonym  $0 < \eta < 1$

$$(12) \quad \int_\eta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_\eta^1 = \frac{1}{1-\alpha} (1 - \eta^{1-\alpha})$$

natomiast dla  $\alpha = 1$  mamy

$$(13) \quad \int_\eta^1 \frac{dx}{x} = \left[ \log x \right]_\eta^1 = -\log \eta.$$

Ze wzorów (12), (13) widać, że skończona granica

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

istnieje tylko wtedy gdy  $\alpha < 1$  i wówczas

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Zatem całka niewłaściwa  $I(\alpha)$  jest zbieżna dla  $0 < \alpha < 1$  i rozbieżna dla  $\alpha \geq 1$ , przy tym

$$I(\alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \quad \text{dla} \quad 0 < \alpha < 1.$$

W podobny sposób można rozważać całkę niewłaściwą przy założeniu, że funkcja podcałkowa jest ciągła w przedziale  $[a, b)$ . Przyjmujemy wówczas

$$(14) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x) dx.$$

Jeżeli funkcja podcałkowa jest ciągła tylko w przedziale otwartym  $(a, b)$ , to jej całkę niewłaściwą określamy jako sumę całek niewłaściwych poprzednio zdefiniowanych czyli

$$(15) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

gdzie  $c$  jest dowolnie ustaloną liczbą z przedziału  $(a, b)$  (proponujemy, by Czytelnik udowodnił, że prawa strona wzoru (15) nie zależy od wyboru liczby  $c$ ).

Wzory rachunkowe, podane poprzednio dla całek oznaczonych, przenoszą się łatwo na całki niewłaściwe zbieżne. W szczególności pozostają prawdziwe: wzór (25) §1 (wyrażający związek między całką a funkcją pierwotną) oraz wzory (1), (2) §3 (na całkowanie przez części i przez podstawienie) - z tym, że wartość funkcji w punkcie należy zastąpić przez jej granicę.

**Przykład 2.** Zbadajmy całkę

$$J(\beta) = \int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^{\beta}} \quad (\beta > 0).$$

Funkcja podcałkowa

$$f(x) = \frac{1}{(2-x)^{\beta}}$$

jest ciągła w przedziale  $[0, 2)$  i nieokreślona dla  $x = 2$ , zatem całka  $J(\beta)$  jest całką niewłaściwą. Ponieważ funkcja pierwotna ma postać

$$F_{\beta}(x) = \begin{cases} \frac{(2-x)^{1-\beta}}{\beta-1} & \text{dla } \beta \neq 1, \\ -\log(2-x) & \text{dla } \beta = 1, \end{cases}$$

więc

$$(16) \quad \int_0^{2-\eta} \frac{dx}{(2-x)^\beta} = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} (\eta^{1-\beta} - 2^{1-\beta}) & \text{dla } \beta \neq 1, \\ -\log \eta + \log 2 & \text{dla } \beta = 1. \end{cases}$$

Prawa strona (16) ma skończoną granicę przy  $\eta \rightarrow 0+$  tylko wtedy, gdy  $\beta < 1$ . Zatem całka niewłaściwa  $J(\beta)$  jest zbieżna dla  $0 < \beta < 1$  i rozbieżna dla  $\beta \geq 1$ , przy tym

$$J(\beta) = \frac{2^{1-\beta}}{1-\beta} \quad \text{dla } 0 < \beta < 1.$$

Niech  $K$  będzie krzywą o równaniu

$$y = f(x) \quad (x \in [a, b]),$$

gdzie  $f$  jest funkcją ciągłą w przedziale  $[a, b]$ . Przy założeniu, że  $f$  ma ciągłą pochodną w przedziale  $[a, b]$ , zostały uzasadnione w §3 następujące wzory całkowe:

wzór (14) określający długość krzywej  $K$ ,

wzór (30) określający pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej  $K$  dokoła osi  $x$ -ów,

wzory (43) określające momenty statyczne krzywej  $K$  względem obu osi układu współrzędnych

(we wzorach (43) zakładaliśmy dodatkowo, że krzywa  $K$  leży w pierwszej ćwiartce płaszczyzny  $xy$  tzn. że  $0 \leq a < b$  oraz że  $f(x) \geq 0$ ). Jeżeli osłabimy nieco założenia przyjmując, że pochodna  $f'$  jest ciągła tylko w przedziale otwartym  $(a, b)$ , to całkę występującą w każdym ze wspomnianych wzorów należy rozumieć jako całkę niewłaściwą. Wzory te, jak również wynikające z nich reguły Guldina (§3 punkt 6) pozostają prawdziwe, jeżeli występujące w nich całki niewłaściwe są zbieżne.

**Przykład 3.** W przykładzie 10 §3 rozważaliśmy bryłę zwaną *torusem* utworzoną przez obrót koła o środku  $(0, a)$  i promieniu  $r$  ( $a > r$ ) dokoła osi  $x$ -ów (rys. 70) i obliczyliśmy jej objętość. Obecnie przejdziemy do obliczenia jej powierzchni. Powierzchnia torusa  $S$  składa się z dwóch części  $S_+$ ,  $S_-$  otrzymanych przez obrót półokręgów  $K_+$ ,  $K_-$  odpowiednio, zatem

$$|S| = |S_+| + |S_-|.$$

Po rozwiązaniu względem  $y$  równania okręgu  $K$  ograniczającego koło otrzymujemy

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

stąd

$$(y')^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2},$$

zatem

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

niezależnie od znaku stojącego przed pierwiastkiem i zgodnie ze wzorem (30) §3

$$(17) \quad |S_+| = 2\pi \int_{-r}^r \frac{ar}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx + 2\pi \int_{-r}^r r dx$$

oraz

$$(18) \quad |S_-| = 2\pi \int_{-r}^r \frac{ar}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx - 2\pi \int_{-r}^r r dx.$$

Po dodaniu (17), (18) dostajemy

$$(19) \quad |S| = 4\pi ar \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

przy czym całka po prawej stronie jest całką niewłaściwą (funkcja podcałkowa nie jest określona dla  $x = \pm r$ ). W celu obliczenia całki zastosujemy podstawienie

$$\frac{x}{r} = t$$

skąd

$$dx = r dt.$$

Wobec tego

$$\int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \left[ \arcsin t \right]_{-1}^1$$

i podstawiając do (19) otrzymujemy pole powierzchni torusa

$$|S| = 4\pi^2 ar.$$

**3. Warunki zapewniające zbieżność całki niewłaściwej.** Z warunku Cauchy'ego istnienia granicy funkcji omówionego w rozdz. III §2 łatwo wyprowadzić warunek konieczny i dostateczny zbieżności całki niewłaściwej. Dla ustalenia uwagi zajmiemy się przypadkiem, gdy funkcja podcałkowa jest nieciągła (lub nawet nieokreślona) w lewym końcu przedziału. Twierdzenie 13 (rozdz. III §2) można łatwo przeformułować zastępując granicę przez granicę prawostronną i sąsiedztwo deltowe przez sąsiedztwo prawostronne. Jako wniosek otrzymujemy

**Twierdzenie 1.** *Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą w przedziale  $(a, b]$ . Wówczas całka niewłaściwa (11) jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy do dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  można dobrać liczbę  $\delta > 0$  tak, by dla dowolnych  $a < a' < a'' < a + \delta$  zachodziła nierówność*

$$(20) \quad \left| \int_{a'}^{a''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$



DOWÓD. Niech

$$G(\eta) = \int_{a+\eta}^b f(x) dx.$$

Skończona granica

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} G(\eta)$$

istnieje wtedy i tylko wtedy gdy do dowolnego  $\varepsilon > 0$  można dobrać  $\delta > 0$  tak, by dla dowolnych  $0 < \eta' < \eta'' < \delta$  zachodziła nierówność

$$(21) \quad |G(\eta') - G(\eta'')| < \varepsilon.$$

Na podstawie twierdzenia o podziale przedziału całkowania

$$\int_{a+\eta'}^b f(x) dx = \int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x) dx + \int_{a+\eta''}^b f(x) dx$$

wobec tego

$$G(\eta') - G(\eta'') = \int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x) dx$$

i nierówność (21) przyjmuje postać (20), jeżeli położymy  $a' = a + \eta'$ ,  $a'' = a + \eta''$ .  $\square$

Prostym wnioskiem z udowodnionego twierdzenia jest następujące *kryterium porównawcze zbieżności całki niewłaściwej*:

**Twierdzenie 2.** Niech  $f, g$  będą funkcjami ciągłymi w przedziale  $(a, b]$ . Jeżeli w pewnym przedziale  $(a, c)$  (gdzie  $a < c \leq b$ ) zachodzi nierówność

$$|f(x)| \leq g(x)$$

i całka niewłaściwa

$$\int_a^c g(x) dx$$

jest zbieżna, to całka niewłaściwa

$$\int_a^b f(x) dx$$

również jest zbieżna.

DOWÓD wynika natychmiast z nierówności

$$\left| \int_{a'}^{a''} f(x) dx \right| \leq \int_{a'}^{a''} |f(x)| dx \leq \int_{a'}^{a''} g(x) dx$$

i z twierdzenia 1.

♡ ♡ ♡

**Przykład 4.** Funkcją Beta nazywamy całkę

$$(22) \quad B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

gdzie  $a, b > 0$ . Rozważana całka jest całką niewłaściwą gdy przynajmniej jedna z liczb  $a, b$  należy do przedziału  $(0, 1)$ , gdyż wówczas odpowiedni wykładnik potęgi jest ujemny i w konsekwencji funkcja podcałkowa nie jest określona w jednym z końców przedziału. Udowodnimy, że jest to całka niewłaściwa zbieżna. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że  $0 < a < 1, b \geq 1$ , wówczas pierwszy czynnik pod całką jest nieokreślony dla  $x = 0$ . Drugi czynnik jest funkcją ciągłą w przedziale domkniętym  $[0, 1]$ , jest więc funkcją ograniczoną na mocy twierdzenia Weierstrassa (twierdzenie 12, rozdz. III §3). Istnieje zatem liczba  $M > 0$  taka, że dla  $x \in [0, 1]$

$$0 \leq (1-x)^{b-1} \leq M,$$

a stąd wynika nierówność

$$(23) \quad x^{a-1} (1-x)^{b-1} \leq Mx^{a-1}$$

dla  $0 < x \leq 1$ . W Przykładzie 1 pokazaliśmy, że całka niewłaściwa

$$\int_0^1 x^{a-1} dx$$

jest zbieżna dla  $0 < a < 1$ . Z twierdzenia 1 wynika natychmiast, że pomnożenie funkcji podcałkowej przez stałą różną od zera nie wpływa na zbieżność całki niewłaściwej, wobec tego całka

$$\int_0^1 Mx^{a-1} dx$$

również jest zbieżna, a stąd i z nierówności (23) wynika na mocy Twierdzenia 2 zbieżność całki (22). Dowód zbieżności w przypadkach, gdy  $a \geq 1, 0 < b < 1$  lub  $0 < a, b < 1$  przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie.  $\square$

♡ ♡ ♡

**4. Całka niewłaściwa po przedziale nieograniczonym.** Dotąd rozważaliśmy wyłącznie całki rozciągnięte na przedział ograniczony dopuszczając sytuację, gdy funkcja podcałkowa jest nieograniczona w jednym z końców przedziału. Teraz zajmiemy się przypadkiem, gdy przedział całkowania jest nieograniczony tzn. jest półprostą lub całą osią  $x$ -ów. Takie całki również nazywamy *całkami niewłaściwymi*.

Zakładając, że  $f$  jest funkcją ciągłą w przedziale  $[a, \infty)$  przyjmiemy jako definicję

$$(24) \quad \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx,$$

o ile istnieje skończona granica po prawej stronie. Mówimy wówczas, że całka niewłaściwa (24) jest *zbieżna*. Jeżeli  $f$  jest funkcją nieujemną, to całka ta wyraża pole nieograniczonego obszaru zawartego między wykresem funkcji a osią  $x$ -ów. Jeżeli granica po prawej stronie (24) nie istnieje lub jest granicą niewłaściwą, to mówimy, że całka niewłaściwa (24) jest *rozbieżna*.

W podobny sposób przyjmujemy dla funkcji ciągłej w przedziale  $(-\infty, b]$

$$(25) \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^b f(x) dx.$$

Jeżeli  $f$  jest funkcją ciągłą na całej osi rzeczywistej lub w jednym z przedziałów otwartych  $(-\infty, a)$ ,  $(a, \infty)$ , to przyjmujemy jako definicję

$$(26) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^a f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx \quad (c < a), \\ \int_a^{\infty} f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \quad (a < c), \end{aligned}$$

przy czym całkę po lewej stronie uważamy za zbieżną jeżeli zbieżne są obie całki po prawej stronie (proponujemy, by Czytelnik przeprowadził prosty dowód, że prawe strony we wzorach (26) nie zależą od wyboru liczby  $c$ ).

Podobnie, jak w przypadku całek niewłaściwych po przedziale ograniczonym, wzory rachunkowe udowodnione poprzednio dla całek oznaczonych przenoszą się na całki niewłaściwe zbieżne postaci (24), (25), (26) z tym, że przez wartość funkcji w punkcie  $\infty$  ( $-\infty$ ) należy rozumieć jej granicę.

W dalszym ciągu zajmijmy się całką niewłaściwą postaci (24). Wszystkie udowodnione dalej twierdzenia dadzą się łatwo przenieść na przypadek całek niewłaściwych postaci (25) i (26).

**Przykład 5.** Zbadajmy całkę niewłaściwą

$$(27) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

w której funkcja podcałkowa

$$(28) \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

jest ciągła na całej osi rzeczywistej. Mamy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} x]_0^t = \frac{\pi}{2},$$

zatem całka niewłaściwa (27) jest zbieżna i przy tym

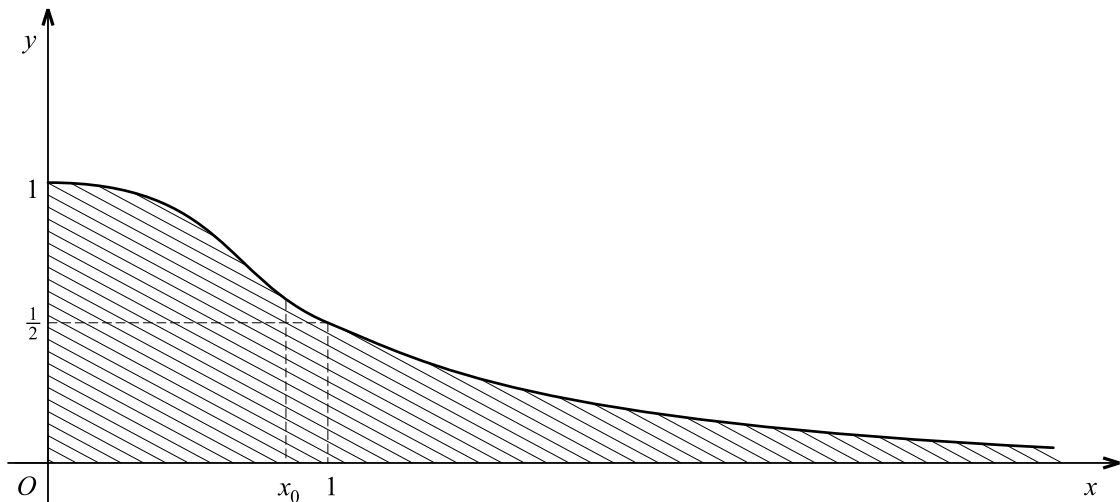
$$(29) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Wykres funkcji podcałkowej można łatwo narysować. Różniczkując (28) dostajemy

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3},$$

zatem  $f$  maleje w przedziale  $[0, \infty)$  i ma punkt przegięcia  $x_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , ponadto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$



[rys. 78]

Szkic wykresu podajemy na rys. 78. Pole obszaru zakreskowanego wynosi  $\frac{\pi}{2}$ .

**Przykład 6.** Zbadamy zbieżność całki niewłaściwej

$$K(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{gdzie } \alpha > 0.$$

Funkcja podcałkowa jest ciągła w przedziale  $[1, \infty)$ . Przy ustalonym  $t > 1$  mamy

$$\int_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (t^{1-\alpha} - 1) & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \log t & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$$

Granica po prawej stronie przy  $t \rightarrow \infty$  istnieje tylko dla  $\alpha > 1$ . Wobec tego całka  $K(\alpha)$  jest zbieżna dla  $\alpha > 1$  i rozbieżna dla  $0 < \alpha \leq 1$  i przy tym

$$K(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{dla } \alpha > 1.$$

Podobnie, jak w przypadku całki niewłaściwej po przedziale ograniczonym, można łatwo otrzymać warunek konieczny i dostateczny zbieżności całki (24) opierając się na twierdzeniu 14 rozdz. III §2.

**Twierdzenie 3.** Zakładamy, że funkcja  $f$  jest ciągła w przedziale  $[a, \infty)$ . Wówczas całka niewłaściwa (24) jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy do dowolnego  $\varepsilon > 0$  można dobrać taką liczbę  $M > 0$ , że dla dowolnych  $M < t' < t''$  zachodzi nierówność

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

DOWÓD. Wystarczy zauważyć, że przyjmując

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

mamy

$$F(t'') - F(t') = \int_{t'}^{t''} f(x) dx.$$

□

Z udowodnionego twierdzenia wynika natychmiast następujące kryterium porównawcze zbieżności:

**Twierdzenie 4.** Niech  $f, g$  będą funkcjami ciągłymi w przedziale  $[a, \infty)$ . Jeżeli istnieje liczba  $A > 0$  taka, że dla  $x \geq A$  zachodzi nierówność

$$|f(x)| \leq g(x)$$

i całka niewłaściwa

$$\int_A^\infty g(x) dx$$

jest zbieżna, to całka niewłaściwa (24) również jest zbieżna.

DOWÓD wynika natychmiast z nierówności

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| \leq \int_{t'}^{t''} |f(x)| dx \leq \int_{t'}^{t''} g(x) dx$$

i z twierdzenia 3.

□

♡ ♡ ♡

**Przykład 7.** Wykażemy zbieżność całki niewłaściwej

$$(30) \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Wprawdzie wyrażenie podcałkowe nie jest określone w lewym końcu przedziału, jednak zgodnie z (11) rozdz. III §2 istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Jeżeli więc określimy funkcję podcałkową jako

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x > 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

to otrzymamy funkcję ciągłą w przedziale  $[0, \infty)$  i możemy rozważać całkę niewłaściwą (30).

Przechodząc do dowodu zbieżności całki zauważmy najpierw, że

$$(31) \quad \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \quad \text{dla } x > \frac{\pi}{2},$$

jednakże, jak wykazaliśmy w Przykładzie 6, całka

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

jest rozbieżna i wobec tego nie możemy zastosować kryterium porównawczego opierając się na nierówności (31). Spóbjemy udowodnić zbieżność całki (30) opierając się na twierdzeniu 3. Zastosujemy drugie twierdzenie o wartości średniej (twierdzenie 5 §3) przyjmując

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x},$$

co dla  $0 < M < t' < t''$  daje

$$(32) \quad \int_{t'}^{t''} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{t'} \int_{t'}^{\tau} \sin x dx + \frac{1}{t''} \int_{\tau}^{t''} \sin x dx,$$

gdzie  $\tau \in [t', t'']$ . Ponieważ dla dowolnych  $a, b$

$$\left| \int_a^b \sin x dx \right| = |\cos a - \cos b| \leq 2,$$

z (32) dostajemy oszacowanie

$$\left| \int_{t'}^{t''} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq 2 \left( \frac{1}{t'} + \frac{1}{t''} \right) < \frac{4}{M},$$

zatem nierówność epsilonowa

$$\left| \int_{t'}^{t''} \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon$$

będzie spełniona, jeżeli przyjmiemy  $M = \frac{4}{\varepsilon}$ .

**Przykład 8.** Zbadamy całkę niewłaściwą

$$D_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Całka  $D_1$  była badana w Przykładzie 5. Stwierdziliśmy, że jest zbieżna i przy tym

$$D_1 = \frac{\pi}{2},$$

wobec tego możemy w dalszym ciągu założyć, że  $n \geq 2$ . Ponieważ

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

dla dowolnego  $x$ , na mocy kryterium porównawczego (twierdzenie 4) całka  $D_n$  jest również zbieżna. Aby ją obliczyć zastosujemy podstawienie

$$x = \operatorname{tg} t,$$

z którego wynika, że

$$1+x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}, \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} t = \infty.$$

Otrzymujemy zatem

$$D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t dt,$$

czyli przy użyciu oznaczeń punktu 2 §3

$$D_n = B_{2n-2}.$$

Na podstawie wzoru (8) §3 otrzymujemy stąd

$$D_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n \geq 2).$$

♡ ♡ ♡

**5. Związek między zbieżnością całki niewłaściwej a zbieżnością szeregu nieskończonego.** Udowodnimy teraz

**Twierdzenie 5 (Cauchy'ego - Maclaurina).** Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą, malejącą i dodatnią w przedziale  $[1, \infty)$ . Wówczas całka niewłaściwa

$$(33) \quad \int_1^{\infty} f(x) dx$$

jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg nieskończony

$$(34) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

**DOWÓD.** Ponieważ  $f$  jest malejąca, w przedziale  $[k-1, k]$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) zachodzi nierówność

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1),$$

która po scałkowaniu daje

$$(35) \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1).$$

Z nierówności (35) wynika, że

$$(36) \quad S_n = \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx$$

dla  $n \in \mathbb{N}$ . Jeżeli całka niewłaściwa (33) jest zbieżna, to jest ona granicą ciągu

$$a_n = \int_1^n f(x) dx,$$

przy czym ciąg ten jest rosnący wobec założenia że  $f(x) > 0$ . Zatem dla każdego  $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq \int_1^{\infty} f(x) dx$$

i stąd na mocy (36)

$$S_n \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Wobec tego szereg (34) o wyrazach dodatnich jest zbieżny, gdyż ciąg jego sum częściowych  $\{S_n\}$  jest ograniczony z góry.



Jeżeli natomiast szereg (34) jest zbieżny, to spełnia on warunek Cauchy'ego (por. twierdzenie 6 rozdz. IV §1) i wobec tego do dowolnie obranego  $\varepsilon > 0$  można dobrać  $N$  tak, by dla  $n > N$  i dowolnego  $m$  naturalnego zachodziła nierówność

$$(37) \quad \sum_{k=n}^{n+m-1} f(k) < \varepsilon.$$

Aby udowodnić zbieżność całki (33) oprzemy się na twierdzeniu 3. Przyjmijmy  $M = N + 1$  i obierzmy dowolnie liczby  $t'$ ,  $t''$  spełniające nierówność

$$N + 1 = M < t' < t''.$$

Istnieją wówczas liczby naturalne  $n$ ,  $m$  takie, że

$$N < n \leq M < t' < t'' < n + m,$$

zatem

$$\int_{t'}^{t''} f(x) dx \leq \int_n^{n+m} f(x) dx,$$

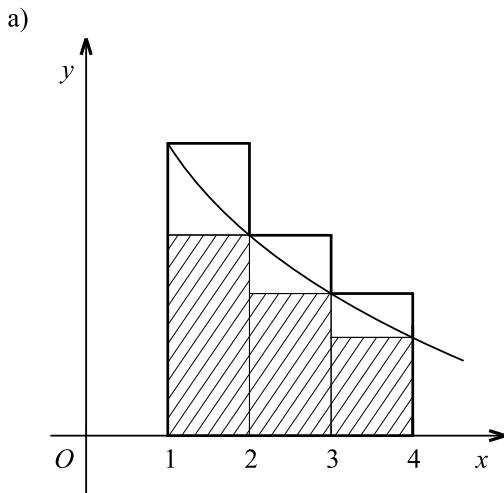
a stąd wykorzystując prawą część nierówności (35) oraz (37) dostajemy

$$(38) \quad \int_{t'}^{t''} f(x) dx \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} f(k) < \varepsilon.$$

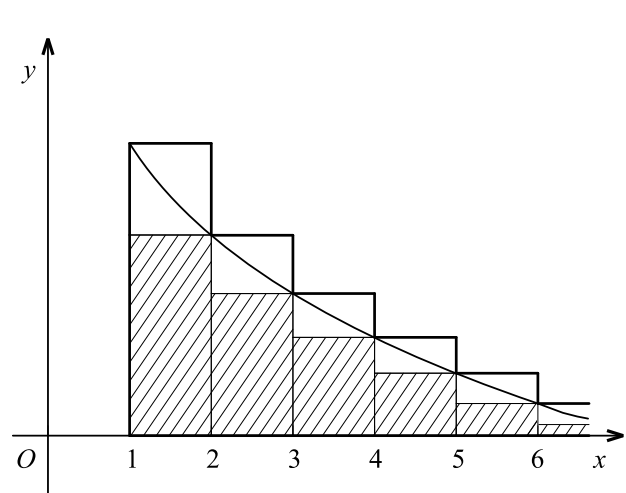
Ponieważ liczba  $M$  została dobrana do  $\varepsilon$ , nierówność (38) oznacza, że spełniony jest warunek konieczny i dostateczny zbieżności całki (33) podany w twierdzeniu 3, zatem całka jest zbieżna.  $\square$

Udowodnione twierdzenie ma prosty sens geometryczny. Załóżmy, że całka niewłaściwa (33) (a zatem i szereg (34)) są zbieżne. Z nierówności (35) wynika, że

$$(39) \quad \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$



[rys. 79a]



[rys. 79b]

(na rys. 79a lewa suma oznacza łączne pole prostokątów zakreskowanych, zaś prawa suma daje łączne pole prostokątów obwiedzone grubszą linią dla  $n = 4$ ). Przechodząc w (39) do granicy przy  $n \rightarrow \infty$  otrzymujemy nierówność

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k),$$

z której wynika, że pole pod wykresem funkcji w przedziale  $[1, \infty)$  jest ograniczone z dołu przez pole figury zakreskowanej i z góry przez pole figury obwiedzonej grubszą linią (rys. 79b).

**Przykład 9.** Jak wykazaliśmy w Przykładzie 6, całka

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

jest zbieżna dla  $\alpha > 1$  i rozbieżna dla  $0 < \alpha \leq 1$ . Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego - Maclaurin'a szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

jest również zbieżny dla  $\alpha > 1$  i rozbieżny dla  $0 < \alpha \leq 1$ . Ten sam wynik otrzymaliśmy w inny sposób w rozdziale IV §2 (Przykład 1).

♡ ♡ ♡

**6. Pewne specjalne całki niewłaściwe.** W Przykładzie 7 udowodniliśmy zbieżność całki niewłaściwej

$$(40) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

teraz udowodnimy, że jej wartość wynosi  $\frac{\pi}{2}$ . W dowodzie oprzemy się na następującym twierdzeniu:

**Twierdzenie 6 (lemat Riemanna).** *Jeżeli  $f$  jest funkcją ciągłą w przedziale  $[a, b]$ , to*

$$(41) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0,$$

oraz

$$(42) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx = 0.$$

DOWÓD. Udowodnimy (41), dowód (42) przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Na mocy twierdzenia 9 rozdz. III §3 funkcja  $f$  jest jednostajnie ciągła w przedziale  $[a, b]$ , zatem ustalając dowolnie  $\varepsilon > 0$  można dobrać podział tego przedziału

$$(43) \quad a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$$

w taki sposób, że

$$(44) \quad |f(x) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

dla  $x \in [a_{k-1}, a_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Ponadto zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa (twierdzenie 12 rozdz. III §3) funkcja  $f$  jest ograniczona w przedziale  $[a, b]$ , istnieje więc stała  $M > 0$  taka, że

$$(45) \quad |f(x)| \leq M \quad \text{dla} \quad x \in [a, b].$$

Wykorzystując podział (43) przedstawimy całkę w postaci sumy

$$(46) \quad \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = \sum_{k=1}^m \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) \sin nx \, dx$$

przy czym

$$(47) \quad \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) \sin nx \, dx = \int_{a_{k-1}}^{a_k} (f(x) - f(a_k)) \sin nx \, dx + f(a_k) \int_{a_{k-1}}^{a_k} \sin nx \, dx.$$

Ponieważ

$$\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} \sin nx \, dx \right| = \frac{1}{n} |\cos(na_{k-1}) - \cos(na_k)| \leq \frac{2}{n},$$

z równości (47) dostajemy po uwzględnieniu (44), (45)

$$\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) \sin nx \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(a_k - a_{k-1}) + \frac{2M}{n},$$

skąd po zsumowaniu względem  $k$  wynika zgodnie z (46)

$$\left| \int_a^b f(x) \sin nx \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2Mm}{n}.$$

Wobec tego dla  $n > 4Mm\varepsilon^{-1}$  zachodzi nierówność epsilonowa

$$\left| \int_a^b f(x) \sin nx \, dx \right| < \varepsilon$$

co kończy dowód. □

Do badania całki (40) będzie potrzebny wzór sumacyjny

$$(48) \quad \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad (t \neq 2k\pi, \quad k \text{ całkowite}),$$

który łatwo otrzymać przy pomocy prostych przekształceń trygonometrycznych. Mnożąc bowiem lewą stronę przez mianownik i korzystając z pierwszego wzoru (38) rozdz.III §1 dostajemy

$$\begin{aligned} & \sin \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{t}{2} \cos t + 2 \sin \frac{t}{2} \cos 2t + \cdots + 2 \sin \frac{t}{2} \cos nt = \\ & \sin \frac{1}{2}t + \left( \sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{1}{2}t \right) + \left( \sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t \right) + \cdots + \left( \sin \frac{2n+1}{2}t - \sin \frac{2n-1}{2}t \right), \end{aligned}$$

co po redukcji daje licznik prawej strony. Wzór (48) można również udowodnić metodą indukcji - por. zadanie 25 rozdz. I §1. Przyjmując  $t = 2x$  we wzorze (48) otrzymujemy

$$1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + \cdots + 2 \cos 2nx = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x},$$

co po scałkowaniu w przedziale  $[0, \frac{\pi}{2}]$  daje

$$(49) \quad \frac{\pi}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx + \cdots + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \, dx$$

czyli

$$(50) \quad A_n = \frac{\pi}{2},$$

gdzie  $A_n$  oznacza całkę po prawej stronie (49) (wszystkie całki po lewej stronie znikają). Natomiast całka

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} \, dx$$

po podstawieniu

$$y = (2n + 1)x$$

przyjmuje postać

$$B_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y} dy$$

skąd wynika, że

$$(51) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy.$$

Ponadto

$$(52) \quad A_n - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2n + 1)x dx,$$

gdzie

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

dla  $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ . Stosując regułę de l'Hospitala (twierdzenie 16 rozdz.III §4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0, \end{aligned}$$

zatem przyjmując dodatkowo

$$f(0) = 0$$

możemy uważać funkcję  $f$  za ciągłą w przedziale  $[0, \frac{\pi}{2}]$  i zastosować do niej twierdzenie 6, z którego zgodnie z (52) wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - B_n) = 0.$$

Wobec tego uwzględniając (50), (51) dostajemy żądany wynik

$$(53) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Przejdziemy teraz do obliczenia *całki Poissona*<sup>1</sup>

$$P = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

---

<sup>1</sup>Siméon Denis Poisson (1781 - 1840), matematyk francuski, zajmował się równaniami różniczkowymi, rachunkiem całkowym i teorią prawdopodobieństwa. Uprawiał również fizykę (m.in. teorię sprężystości, hydrodynamikę oraz elektrostatykę i magnetyzm). Był członkiem Paryskiej Akademii Nauk oraz Akademii Nauk w Petersburgu.

Zauważmy najpierw, że jest to całka niewłaściwa zbieżna. Z nierówności

$$(54) \quad e^t \geq 1 + t \quad (t \in \mathbb{R})$$

(por. (62) rozdz.III §4) po podstawieniu  $t = x^2$  otrzymujemy bowiem

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ponieważ zaś zbieżność całki

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

była udowodniona poprzednio (Przykład 5), zbieżność całki  $P$  wynika z kryterium porównawczego (Twierdzenie 4). Aby obliczyć całkę Poissona zastosujemy podstawienie

$$x = y \sqrt{n},$$

które daje

$$(55) \quad P = \sqrt{n} P_n,$$

gdzie

$$(56) \quad P_n = \int_0^\infty e^{-nx^2} dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Oszacujemy całkę  $P_n$  wychodząc z nierówności

$$(57) \quad 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2},$$

która powstaje przez zastąpienie w (54) liczby  $t$  przez  $\pm x^2$ . Z (57) wynika, że

$$(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2} \quad \text{dla } |x| \leq 1$$

oraz

$$e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy stąd

$$(58) \quad C_n \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq P_n \leq D_n$$

gdzie

$$C_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx, \quad D_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Całka  $C_n$  daje się łatwo obliczyć przez zastosowanie podstawienia

$$x = \cos t,$$

które daje

$$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, dt,$$

czyli (por punkt 2 §3)

$$(59) \quad C_n = A_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)},$$

natomiast całka  $D_n$  była obliczona w Przykładzie 8, gdzie wykazaliśmy, że

$$(60) \quad D_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Z (55), (58) wynika natychmiast nierówność

$$(61) \quad a_n \leq P_n \leq b_n,$$

gdzie

$$(62) \quad a_n = \sqrt{n} C_n, \quad b_n = \sqrt{n} D_n.$$

Obliczenie całki  $P$  sprowadza się teraz do wykazania, że oba ciągi  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  są zbieżne do tej samej granicy. Posłużymy się w tym celu wzorem Wallisa, udowodnionym w punkcie 2 §3, zapisując go w postaci

$$(63) \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n, \quad e_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}.$$

Zauważmy najpierw, że ciąg  $\{e_n\}$  jest malejący, gdyż

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(2n+2)\sqrt{n}}{(2n+1)\sqrt{n+1}} < 1,$$

co łatwo sprawdzić mnożąc obie strony nierówności przez mianownik i podnosząc do kwadratu. Wobec tego z (63) wynika, że

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq e_n,$$

zatem

$$\frac{\pi}{2} \leq 2e_n^2$$

dla dowolnego  $n$ , a stąd w oparciu o (60), (62), (63) otrzymujemy

$$(64) \quad b_n \leq \frac{2n}{2n-1} e_n.$$

Ponadto z (59), (62), (63) dostajemy

$$(65) \quad a_n = \frac{2n}{2n+1} e_n.$$

Nierówności (61), (64) i równość (65) dają ostatecznie

$$\frac{2n}{2n+1} e_n \leq P \leq \frac{2n}{2n-1} e_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

skąd po przejściu do granicy i uwzględnieniu (63) wnioskujemy, że

$$(66) \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ostatnią całką niewłaściwą, jaką zbadamy, jest funkcja  $\Gamma(x)$  określona dla  $x > 0$  wzorem

$$(67) \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Dla  $x < 1$  funkcja podcałkowa jest nieograniczona przy  $x \rightarrow 0+$ , ponadto przedział całkowania jest nieograniczony (oczywiście w przedziale otwartym  $(0, \infty)$  funkcja podcałkowa jest ciągła). Tego typu całkę niewłaściwą definiujemy jako sumę

$$(68) \quad \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

przy czym całkę po lewej stronie uważamy za zbieżną, jeżeli zbieżne są obie całki po prawej stronie. Pierwsza z tych całek jest zbieżna na mocy kryterium porównawczego (twierdzenie 2), gdyż

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1} \quad \text{dla } t \geq 0,$$

zaś całka

$$\int_0^1 t^{x-1} dt$$

jest zbieżna jeżeli  $x > 0$  (por. Przykład 1). Aby udowodnić zbieżność drugiej całki oszacujemy z góry funkcję podcałkową. Mamy

$$(69) \quad t^{x-1} e^{-t} = g(t) \cdot \frac{1}{t^2},$$



gdzie

$$g(t) = \frac{t^{x+1}}{e^t}.$$

Ponieważ funkcja  $g$  jest ciągła dla  $t \geq 1$  i przy tym (por. Przykłady 33 i 34 rozdz. III §4)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0,$$

jest ona funkcją ograniczoną w przedziale  $[1, \infty)$  (proponujemy Czytelnikowi dokładne przeprowadzenie dowodu). Istnieje zatem stała  $M > 0$  taka, że

$$|g(t)| \leq M \quad (t \in [1, \infty)),$$

a zatem zgodnie z (69)

$$t^{x-1} e^{-t} \leq \frac{M}{t^2}.$$

Ponieważ, jak wykazaliśmy w Przykładzie 6, całka

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

jest zbieżna, z ostatniej nierówności wynika na mocy kryterium porównawczego (twierdzenie 4) zbieżność drugiej całki po prawej stronie (68). Okazaliśmy zatem, że całka niewłaściwa  $\Gamma(x)$  jest zbieżna dla dowolnie ustalonego  $x > 0$ . Wzór (67) określa funkcję  $\Gamma$  w całym przedziale  $(0, \infty)$ .

Aby zbadać dokładniej funkcję  $\Gamma$  obliczymy jej wartości dla  $x = n \in \mathbb{N}$ . Mamy

$$(70) \quad \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = 1,$$

ponadto dla  $x = n \geq 2$  otrzymujemy całkując przez części

$$\Gamma(n) = - \int_0^{\infty} t^{n-1} (e^{-t})' dt = \left[-t^{n-1} e^{-t}\right]_0^{\infty} + (n-1) \int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-t} dt,$$

czyli

$$(71) \quad \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \quad (n \geq 2)$$

(reguła całkowania przez części może być stosowana, gdyż całki niewłaściwe po obu stronach równości są zbieżne). Z (70), (71) wynika, że

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

jeżeli przyjmiemy umowę, że  $0! = 1$  (łatwy dowód indukcyjny pozostawiamy Czytelnikowi). Funkcja  $\Gamma$  może być zatem uważana za uogólnienie pojęcia silni na przypadek dowolnej liczby rzeczywistej  $> -1$ . Zauważmy na koniec, że

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt,$$

co po podstawieniu

$$t = z^2$$

daje

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

czyli zgodnie ze wzorem (66)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

### Zadania.

1. Obliczyć całki niewłaściwe

$$(i) \int_0^1 \log x \, dx, \quad (ii) \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx, \quad (iii) \int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

Wskazówka. Zastosować całkowanie przez części.

2. Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą nieujemną w przedziale  $(a, b]$ . Udowodnić, że całka niewłaściwa

$$\int_a^b f(x) dx$$

jest albo zbieżna albo równa  $+\infty$ .

Wskazówka. Zauważyć, że funkcja

$$G(t) = \int_t^b f(x) dx \quad (a < t \leq b)$$

jest monotoniczna. Następnie zastosować twierdzenie o zbieżności monotonicznej (rozdz. III §2 punkt 6).

3. Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą nieujemną w przedziale  $[a, \infty)$ . Udowodnić, że całka niewłaściwa

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

jest albo zbieżna albo równa  $+\infty$ .

Wskazówka. Wprowadzić funkcję

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

i dalej jak w zadaniu 2.

4. Opierając się na zadaniach 2, 3 udowodnić następujące kryteria rozbieżności całki niewłaściwej:

**A.** Jeżeli funkcje  $f, g$  ciągłe w przedziale  $(a, b)$  spełniają nierówność

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad (a < x \leq b)$$

i całka niewłaściwa

$$\int_a^b g(x) dx$$

jest rozbieżna, to całka niewłaściwa

$$\int_a^b f(x) dx$$

też jest rozbieżna.

**B.** Jeżeli funkcje  $f, g$  ciągłe w przedziale  $[a, \infty)$  spełniają nierówność

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad (x \geq a)$$

i całka niewłaściwa

$$\int_a^\infty g(x) dx$$

jest rozbieżna, to całka niewłaściwa

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

również jest rozbieżna.

5. Z badać zbieżność całek niewłaściwych

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} dx, & \text{(ii)} \quad \int_0^1 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \\ \text{(iii)} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2} dx, & \text{(iv)} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x + \cos x}{x\sqrt{x}} dx, \\ \text{(v)} \quad \int_\pi^\infty \frac{|\sin x| + |\cos x|}{\sqrt{x}} dx, & \text{(vi)} \quad \int_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} dx. \end{array}$$

Wskazówka. Zastosować kryteria porównawcze zbieżności (twierdzenia 2 i 4) lub kryteria porównawcze rozbieżności (zadanie 4).

6. Udowodnić, że

(i) jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła i ograniczona w przedziale  $(a, b]$ , to całka niewłaściwa

$$(72) \quad \int_a^b f(x) dx$$

jest zbieżna,

(ii) jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła w przedziale domkniętym  $[a, b]$ , to całka niewłaściwa (72) jest równa całce oznaczonej z funkcji  $f$  w przedziale  $[a, b]$ .

7. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^1 x^\alpha e^{-\frac{1}{x}} dx$$

dla dowolnego rzeczywistego  $\alpha$ .

Wskazówka. Okazać, że funkcja podcałkowa ma granicę przy  $x \rightarrow 0+$  i oprzeć się na zadaniu 6 (i).

8. Udowodnić zbieżność całek niewłaściwych

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx, \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

(zwanych *całkami Fresnela*).<sup>2</sup>

Wskazówka. Dokonać podstawienia

$$x^2 = t.$$

9. Z badać zbieżność całek niewłaściwych

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x (\log x)^\alpha}, \quad \int_3^\infty \frac{dx}{x (\log x) (\log \log x)^\alpha}$$

w zależności od parametru  $\alpha > 0$  i wyciągnąć wnioski dotyczące zbieżności szeregów

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n (\log n)^\alpha}, \quad \sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n (\log n) (\log \log n)^\alpha}$$

(por. rozdz. IV §2, Przykład 2 i zadanie 2).

Wskazówka. Zauważyć najpierw, że twierdzenie 5 pozostaje słuszne, jeżeli liczbę 1 zastąpić przez jakąkolwiek inną liczbę naturalną.

10. Oznaczmy

$$\underbrace{\log \log \dots \log x}_{p \text{ razy}} = \log_{(p)} x,$$

$$f(x) = \frac{1}{x (\log x) (\log_{(2)} x) \dots (\log_{(p-1)} x) (\log_{(p)} x)^\alpha},$$

<sup>2</sup>Augustin J. Fresnel (1788 - 1827), matematyk francuski.

gdzie  $p$  jest liczbą naturalną  $\geq 3$  zaś  $\alpha$  liczbą rzeczywistą dodatnią. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_m^\infty f(x) dx$$

w zależności od parametru  $\alpha$  ( $m$  jest liczbą naturalną tak dużą, by mianownik funkcji podcałkowej był różny od zera dla  $x \geq m$ ). Co można powiedzieć o zbieżności szeregu

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$$

(por. rozdz. IV §2, zadanie 3)?

Wskazówka - jak w zadaniu 9.

11. Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą, malejącą i dodatnią w przedziale  $[1, \infty)$ . Udowodnić, że jeżeli całka niewłaściwa

$$\int_1^\infty f(x) dx$$

jest zbieżna, to

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Pokazać na przykładzie, że twierdzenie to nie jest prawdziwe w przypadku, gdy  $f$  nie jest funkcją malejącą.

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 5.

12. Obliczyć sumę

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Wskazówka. W całce

$$C_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

zastosować do funkcji podcałkowej wzór dwumianowy Newtona, następnie skorzystać ze wzoru (60).

13. Załóżmy, że  $f$  jest funkcją ciągłą w przedziale otwartym  $(-a, a)$  - zatem całka

$$\int_{-a}^a f(x) dx$$

jest całką niewłaściwą. Udowodnić, że

(i) jeżeli  $f$  jest funkcją parzystą, to

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

(ii) jeżeli  $f$  jest funkcją nieparzystą, to

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0,$$

(por. zadanie 7 §3).

14. Niech  $K$  oznacza część okręgu o środku  $(r, 0)$  i promieniu  $r$ , leżącą w pierwszej ćwiartce płaszczyzny  $xy$ .

(i) Znaleźć momenty statyczne względem obu osi oraz współrzędne  $(\xi, \eta)$  środka masy krzywej  $K$  korzystając ze wzorów (43), (45).

(ii) Znaleźć współrzędną  $\eta$  środka masy opierając się na pierwszej regule Guldina (por. Uwaga po Przykładzie 13 §3).

Wskazówka. W punkcie (i) wykorzystać zadanie 13.

15. Rozważmy okrąg o środku  $(b, a)$  i promieniu  $r$  ( $a > r$ ,  $b > r$ ) i niech  $K_+$  ( $K_-$ ) oznacza półokrąg leżący w półpłaszczyźnie  $y > a$  ( $y < a$ ). Znaleźć momenty statyczne względem obu osi i środek masy każdej z krzywych  $K_+$ ,  $K_-$ . Położenie środka masy zilustrować rysunkiem.

Wskazówka. W rachunkach wykorzystać zadanie 13.

16. Okrąg, o którym mowa w zadaniu 15, tworzy przy obrocie dookoła osi  $x$ -ów powierzchnię  $S$  zwaną *torusem* (por. Przykład 3 i Przykład 10 §3). Oznaczając przez  $S_+$  ( $S_-$ ) powierzchnię powstałą przy obrocie półokręgu  $K_+$  ( $K_-$ ) mamy

$$S = S_+ \cup S_-.$$

Opierając się na wynikach zadania 15 i stosując pierwszą regułę Guldina znaleźć pole powierzchni  $S_+$ ,  $S_-$  i całego torusa  $S$ . Porównać z wynikiem otrzymanym w Przykładzie 3.