§5*. Całka Riemanna funkcji ograniczonej.

1. Całki górna i dolna Darboux. W §1 wprowadziliśmy całkę oznaczoną funkcji ciągłej w przedziale domkniętym $[a, b]$ jako granicę ciągu sum przybliżonych (wzór (17) §1). W przypadku funkcji dodatniej jej całka jest miarą pola zawartego między wykresem funkcji a osią x-ów. Przechodząc do sytuacji ogólniejszej wprowadzimy teraz całkę z funkcji ograniczonej ale niekoniecznie ciągłej.

Załóżmy, że f jest funkcją określoną w przedziale domkniętym $[a, b]$ i ograniczoną w tym przedziale. Wobec tego istnieją liczby rzeczywiste m, M takie, że

$$m \leq f(x) \leq M \qquad (x \in [a, b]). \tag{1}$$

Rozważając podział Π odcinka $[a, b]$ określony nierównościami

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b \tag{2}$$

przyjmiemy oznaczenia

$$m_j = \inf_{[x_{j-1},\, x_j]} f, \qquad M_j = \sup_{[x_{j-1},\, x_j]} f, \qquad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}.$$

Oczywiście zachodzą nierówności

$$m \leq m_j \leq M_j \leq M \qquad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{3}$$

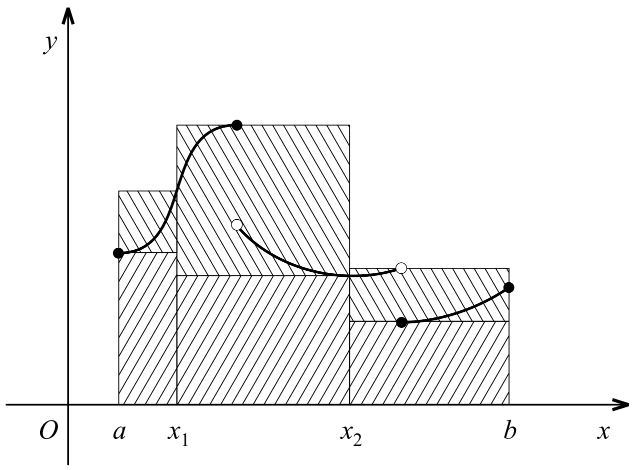
Sumę

$$G(\Pi,\ f) = \sum_{j=1}^{k} M_j \Delta x_j$$

nazwiemy *sumą górną odpowiadającą podziałowi* Π, zaś sumę

$$D(\Pi,\ f) = \sum_{j=1}^{k} m_j \Delta x_j$$

- *sumą dolną odpowiadającą podziałowi* Π. W przypadku funkcji f dodatniej obie sumy mają prosty sens geometryczny - wyrażają pole figur złożonych z prostokątów, przy czym pola te przybliżają od góry i od dołu pole pod wykresem funkcji. Na rys. 80 mamy $k = 3$, suma górna jest równa polu figury zakreskowanej poziomo, figura zakratkowana ma pole równe sumie dolnej. Funkcja f (wykres zaznaczony grubszą linią) jest dodatnia i ma dwa punkty nieciągłości.



[rys. 80]

Podobnie jak w §1 określimy *średnicę podziału* Π jako liczbę

$$d(\Pi) = \max_j \Delta x_j.$$

Podział Π możemy utożsamiać z ciągiem punktów $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$. Będziemy mówili, że podział $\bar{\Pi}$ jest *zagęszczeniem* podziału Π, jeżeli zawiera on wszystkie punkty podziału Π tzn. jeżeli

$$\Pi \subset \bar{\Pi}.$$

Oczywiście wówczas $d(\bar{\Pi}) \leq d(\Pi)$. Zachodzi łatwe do udowodnienia

Twierdzenie 1. *Jeżeli podział* Π^* *jest zagęszczeniem podziału* Π, *to*

$$G(\Pi^*, f) \leq G(\Pi, f) \tag{4}$$

oraz

$$D(\Pi^*, f) \geq D(\Pi, f) \tag{5}$$

.

DOWÓD. Udowodnimy (4) w najprostszym przypadku, gdy podział Π^* powstaje z Π przez dodanie jednego punktu x^*. Dla ustalenia uwagi niech $x^* \in (x_0, x_1)$. Mamy

$$M^* = \sup_{[x_0, x^*]} f \leq M_1, \qquad M^{**} = \sup_{[x^*, x_1]} f \leq M_1 \tag{6}$$

wobec tego, oznaczając

$$\Delta x^* = x^* - x_0, \qquad \Delta x^{**} = x_1 - x^*$$

otrzymujemy

$$G(\Pi^*, f) = M^* \, \Delta x^* + M^{**} \, \Delta x^{**} + \sum_{j=2}^{k} M_j \, \Delta x_j$$

co wobec (6) daje

$$G(\Pi^*, f) \le M_1(\Delta x^* + \Delta x^{**}) + \sum_{j=2}^{k} M_j \, \Delta x_j = G(\Pi, f).$$

Jeżeli podział Π^* powstaje przez dodanie do podziału Π większej ilości punktów, to powtarzając opisane rozumowanie również dochodzimy do (4). Nierówności (5) dowodzimy podobnie, proponujemy by Czytelnik przeprowadził dowód jako ćwiczenie. □

Treść twierdzenia 1 można wypowiedzieć w sposób mniej precyzyjny następująco: im drobniejszy jest podział Π tym mniejsza jest suma górna i tym większa jest suma dolna. W przypadku funkcji f dodatniej przy rozdrabnianiu podziału polepsza się aproksymacja pola pod wykresem - od góry przez sumy górne i od dołu przez sumy dolne (por. rys. 80).

Z nierówności (3) wynika, że dla dowolnego podziału Π

$$m(b-a) \le D(\Pi, f) \le G(\Pi, f) \le M(b-a). \tag{7}$$

Wobec tego zbiór sum górnych odpowiadających wszystkim podziałom Π odcinka $[a, b]$ jest zbiorem ograniczonym i jako taki posiada w zbiorze liczb rzeczywistych kres dolny i kres górny (por. rozdz.I §2). Tą samą własność ma zbiór sum dolnych. Przyjmujemy jako definicję

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf_{\Pi} G(\Pi, f), \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup_{\Pi} D(\Pi, f)$$

(kres górny względnie dolny rozciągnięty jest na wszystkie podziały Π odcinka $[a, b]$). Wyrażenia

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx, \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

nazywamy odpowiednio *całką górną Darboux* i *całką dolną Darboux* z funkcji f na przedziale $[a, b]$.

2. Własności całek Darboux. Udwodnimy teraz

Twierdzenie 2. *Zachodzi nierówność*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \ \le\ \overline{\int_a^b} f(x)\, dx. \tag{8}$$

DOWÓD. Rozważmy dwa podziały Π_1, Π_2 przedziału $[a, b]$ i niech

$$\overline{\Pi} = \Pi_1 \cup \Pi_2.$$

Podział $\overline{\Pi}$ jest więc wspólnym zagęszczeniem podziałów Π_1, Π_2. Na podstawie (4), (5), (7) otrzymujemy

$$D(\Pi_1, f) \le D(\overline{\Pi}, f) \le G(\overline{\Pi}, f) \le G(\Pi_2, f)$$

skąd wynika, że

$$D(\Pi_1, f) \leq G(\Pi_2, f)$$

dla dowolnie obranych podziałów Π_1, Π_2. Wobec tego przy ustalonym Π_2 mamy

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup_{\Pi_1} D(\Pi_1, f) \leq G(\Pi_2, f)$$

a stąd

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \inf_{\Pi_2} G(\Pi_2, f) = \overline{\int_a^b} f(x) dx$$

czyli (8). □

Przykład 1. Rozważmy funkcję Dirichleta

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych} \end{cases}$$

(funkcję tą można określić jako granicę pewnego ciągu o wyrazach zależnych od x - por. rozdz. II §1 zadanie 11). Dla dowolnego podziału Π odcinka $[a, b]$ określonego nierównością (2) w każdym przedziale $[x_{j-1},\ x_j]$ leżą zarówno liczby wymierne jak i niewymierne (por. twierdzenie 5 i zadanie 6 rozdz. I §2). Wobec tego

$$m_j = 0, \qquad M_j = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

a stąd

$$D(\Pi, d) = 0, \qquad G(\Pi, d) = b - a.$$

Zatem

$$\underline{\int_a^b} d(x)\, dx = 0, \qquad \overline{\int_a^b} d(x)\, dx = b - a.$$

Całki górna i dolna z funkcji Dirichleta nie są równe.

Twierdzenie 3. *Dla dowolnej funkcji f ograniczonej w przedziale $[a, b]$*

(9)
$$\lim_{d(\Pi)\to 0} G(\Pi, f) = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx,$$
$$\lim_{d(\Pi)\to 0} D(\Pi, f) = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

DOWÓD. Udowodnimy pierwszą z równości (9). Należy okazać, że do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla każdego podziału Π spełniającego warunek

(10)
$$d(\Pi) < \delta$$

zachodziła nierówność

$$G(\Pi, f) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon$$

którą można zapisać w równoważnej postaci

$$G(\Pi, f) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon. \tag{11}$$

Nie zmniejszając ogólności możemy przeprowadzić dowód przy założeniu, że

$$f(x) \geq 0 \qquad \big(x \in [a, b]\big). \tag{12}$$

Istotnie, z nierówności (1) wynika

$$g(x) = f(x) - m \geq 0 \qquad \big(x \in [a, b]\big)$$

i przy tym

$$G(\Pi, g) = G(\Pi, f) + c$$

oraz

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + c,$$

gdzie $c = m(a - b)$ (por. twierdzenie 18 rozdz. III §3), wobec tego nierówność (11) wynika natychmiast z analogicznej nierówności dla funkcji g.

Z definicji całki górnej jako kresu dolnego sum górnych wynika istnienie podziału

$$\overline{\Pi}: \quad a = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \cdots < \bar{x}_{\bar{k}} = b$$

takiego, że

$$G(\overline{\Pi}, f) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Zgodnie z oznaczeniami wprowadzonymi na początku przyjmiemy

$$\overline{m}_r = \inf_{[\bar{x}_{r-1}, \bar{x}_r]} f, \qquad \overline{M}_r = \sup_{[\bar{x}_{r-1}, \bar{x}_r]} f, \qquad \Delta\bar{x}_r = \bar{x}_r - \bar{x}_{r-1}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, \bar{k}).$$

Z założenia (12) wynika, że wszystkie liczby M, M_j, m_j, $\overline{M}_r$, $\overline{m}_r$ są nieujemne.

Rozważając dowolnie obrany podział Π określony nierównością (2) oznaczmy przez A zbiór wszystkich liczb j z ciągu $\{1, 2, \ldots, k\}$ takich, że przedział otwarty (x_{j-1}, x_j) zawiera punkt podziału $\overline{\Pi}$ i niech $B = \{1, 2, \ldots, k\} \setminus A$. Oczywiście

$$G(\Pi, f) = \sum_{j \in A} M_j\,\Delta x_j + \sum_{j \in B} M_j\,\Delta x_j. \tag{14}$$

Aby oszacować pierwszą sumę zauważmy, że

$$\Delta x_j \leq d(\Pi)$$

i stąd, po pomnożeniu przez M_j,

$$M_j \Delta x_j \leq M_j d(\Pi),$$

zatem

$$M_j \Delta x_j \leq M d(\Pi).$$

Ponieważ zbiór A ma conajwyżej $\bar{k}$ elementów, po zsumowaniu dostajemy

(15) $$\sum_{j \in A} M_j \Delta x_j \leq M \bar{k} d((\Pi).$$

Dla $j \in B$ mamy przy pewnym $r \in \{1, 2 \ldots, \bar{k}\}$

(16) $$[x_{j-1}, x_j] \subset [\bar{x}_{r-1}, \bar{x}_r].$$

Przy ustalonym r oznaczmy przez N_r zbiór tych j, dla których zachodzi (16), wówczas, zakładając że N_r nie jest zbiorem pustym, mamy

(17) $$\sum_{j \in N_r} M_j \Delta x_j \leq \overline{M}_r \sum_{j \in N_r} \Delta x_j.$$

Ponieważ

$$\sum_{j \in N_r} \Delta x_j \leq \Delta \bar{x}_r,$$

mnożąc obie strony przez liczbę $\overline{M}_r \geq 0$ otrzymujemy z (17)

$$\sum_{j \in N_r} M_j \Delta x_j \leq \overline{M}_r \Delta \bar{x}_r.$$

Ponieważ

$$B = \bigcup_{1 \leq r \leq \bar{k}} N_r,$$

mamy, dopisując ewentualnie po prawej stronie wyrazy nieujemne,

$$\sum_{j \in B} M_j \Delta x_j \leq \sum_{r=1}^{\bar{k}} \overline{M}_r \Delta \bar{x}_r$$

czyli

$$\sum_{j \in B} M_j \Delta x_j \leq G(\bar{P}i, f),$$

skąd, uwzględniając (13), (14), (15) otrzymujemy

$$G(\Pi, f) \leq M\bar{k}d(\Pi) + \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

Nierówność (11) wynika z (10) i (18), jeżeli przyjmiemy

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2\bar{k}M}.$$

Aby udowodnić drugą z równości (9) wystarczy zauważyć, że (por. twierdzenie 18 rozdz. III §3)

$$D(\Pi, f) = -G(\Pi, -f) \tag{19}$$

oraz

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = -\overline{\int_a^b} \Big(-f(x)\Big)\, dx. \tag{20}$$

Udowodnioną część twierdzenia możemy teraz zastosować do funkcji $-f(x)$. Stwierdzamy, że do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla każdego podziału Π spełniającego warunek (10) zachodziła nierówność

$$G(\Pi, -f) < \overline{\int_a^b} \Big(-f(x)\Big)\, dx + \varepsilon,$$

czyli wobec (19), (20)

$$-D(\Pi, f) < -\underline{\int_a^b} f(x)\, dx + \varepsilon.$$

Ostatnia nierówność może być zapisana w postaci

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx - D(\Pi, f) < \varepsilon,$$

co kończy dowód. □

3. Całka Riemanna. W dalszym ciągu będziemy zakładali, że f jest funkcją określoną w przedziale domkniętym $[a, b]$ i ograniczoną w tym przedziale. Wobec tego, jak wykazaliśmy w punkcie 1, istnieją jej całki Darboux, górna i dolna. Jeżeli są one równe, to mówimy, że *f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale* $[a, b]$. Wspólną wartość całki górnej i dolnej nazywamy *całką Riemanna* (lub krócej *całką*) *funkcji f na przedziale* $[a, b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{21}$$

podobnie jak dla funkcji f ciągłej. Mamy zatem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx. \tag{22}$$

W dalszym ciągu przez *funkcję całkowalną* będziemy zawsze rozumieli funkcję całkowalną w sensie Riemanna na ustalonym przedziale domkniętym $[a,b]$. Jej całkę Riemanna będziemy nazywali po prostu całką. Następujące twierdzenie podaje warunek konieczny i dostateczny całkowalności funkcji:

Twierdzenie 4. *Funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnie ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać podział Π_ε odcinka $[a,b]$ tak, by zachodziła nierówność*

$$G(\Pi_\varepsilon, f) - D(\Pi_\varepsilon, f) < \varepsilon. \tag{23}$$

DOWÓD. Załóżmy, że warunek podany w twierdzeniu jest spełniony. Na mocy definicji całki górnej i dolnej oraz twierdzenia 2 mamy

$$D(\Pi_\varepsilon, f) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq G(\Pi_\varepsilon, f)$$

skąd wobec (23) wynika, że

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon. \tag{24}$$

Ponieważ ε jest dowolnie obraną liczbą dodatnią, nierówność (24) jest równoważna równości

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

a to oznacza całkowalność funkcji f. Podany warunek jest zatem dostateczny.

Aby udowodnić jego konieczność ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Z definicji całki górnej wynika istnienie podziału $\Pi_\varepsilon^{(1)}$ przedziału $[a,b]$ takiego, że

$$G(\Pi_\varepsilon^{(1)}, f) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{25}$$

Podobnie z definicji całki dolnej wynika, że istnieje podział $\Pi_\varepsilon^{(2)}$ dla którego spełniona jest nierówność

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < D(\Pi_\varepsilon^{(2)}, f). \tag{26}$$

Rozważmy teraz podział $\Pi_\varepsilon = \Pi_\varepsilon^{(1)} \cup \Pi_\varepsilon^{(2)}$. Jest on wspólnym zagęszczeniem podziałów $\Pi_\varepsilon^{(1)}$ i $\Pi_\varepsilon^{(2)}$, wobec tego na mocy twierdzenia 1 z nierówności (25), (26) wynika, że

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < D(\Pi_\varepsilon, f) \le G(\Pi_\varepsilon, f) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jeżeli założymy całkowalność funkcji f na przedziale $[a,b]$, to obie całki Darboux są równe i z ostatniej nierówności wynika (23). □

Funkcja Dirichleta d rozważana w Przykładzie 1 nie jest całkowalna na żadnym przedziale $[a,b]$, gdyż jej całki Darboux mają różne wartości. Warunek całkowalności podany w twierdzeniu 4 nie jest spełniony, gdyż dla każdego podziału Π odcinka $[a,b]$ mamy

$$D(\Pi, d) = 0, \qquad G(\Pi, d) = b - a.$$

4. Klasy funkcji całkowalnych. Jako prosty wniosek z twierdzenia 4 otrzymujemy

Twierdzenie 5. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$ jest całkowalna.*

DOWÓD. Na mocy twierdzenia Heinego (twierdzenie 9 rozdz. III §3) funkcja f ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$ jest w tym przedziale jednostajnie ciągła. Wobec tego do dowolnego $\eta > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, że dla każdego podziału Π odcinka $[a,b]$ określonego nierównościami (2) i spełniającego warunek

$$d(\Pi) < \delta \tag{27}$$

zachodzą nierówności

$$M_j - m_j < \eta \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{28}$$

Z (28) wynika, że dla takiego podziału Π

$$G(\Pi, f) - D(\Pi, f) < \eta(b - a).$$

Warunek całkowalności podany w twierdzeniu 4 jest więc spełniony, jeżeli przyjmiemy

$$\eta = \frac{\varepsilon}{b - a}$$

a jako podział Π_ε obierzemy jakikolwiek podział, którego średnica spełnia (27). □

Twierdzenie to daje się następująco uogólnić:

Twierdzenie 6. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ poza skończoną ilością punktów jest całkowalna.*

DOWÓD. Dla uproszczenia dowodu założymy, że funkcja f jest nieciągła tylko w jednym punkcie $c \in (a, b)$. Czytelnik z łatwością zauważy, jak można przenieść dowód na przypadek, gdy funkcja ma dowolną (skończoną) ilość punktów nieciągłości, wśród których mogą być końce przedziału.

Aby skonstruować podział Π_ε spełniający (23) obierzmy najpierw punkty x', x'' tak, by zachodziły nierówności

$$a < x' \le c \le x'' < b$$

i niech

$$\overline{M} = \sup_{[x', x'']} f, \qquad \overline{m} = \inf_{[x', x'']} f, \qquad \Delta\,\bar{x} = x'' - x'.$$

Wówczas

$$(\overline{M} - \overline{m})\,\Delta\,\bar{x} \le (M - m)\,\Delta\,\bar{x} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{29}$$

jeżeli obierzemy punkty x', x'' w taki sposób, by

$$\Delta\,\bar{x} < \frac{\varepsilon}{2(M - m)} \tag{30}$$

(liczby M, m określone przez nierówność (1)). Podzielimy teraz odcinki $[a,\, x']$ oraz $[x'',\, b]$ przy pomocy punktów x_j ($j = 0, 1, \ldots, k,\ j \ne s$) spełniających nierówności

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{s-1} = x', \\ x'' = x_s < x_{s+1} < \cdots < x_k = b. \end{aligned} \tag{31}$$

Dalej rozumujemy podobnie, jak w dowodzie twierdzenia 5. Funkcja f jest jednostajnie ciągła w każdym z przedziałów $[a,\, x']$, $[x'',\, b]$, zatem do dowolnego $\eta > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla $j \ne s$ z warunku

$$x_j - x_{j-1} < \delta \tag{32}$$

wynikały nierówności

$$M_j - m_j < \eta.$$

Wówczas

$$\sum_{j \ne s} (M_j - m_j)\,\Delta x_j < \eta \sum_{j \ne s} \Delta x_j < \eta(b - a),$$

zatem

$$\sum_{j \ne s} (M_j - m_j)\,\Delta x_j < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{33}$$

jeżeli przyjmiemy

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Ustalmy teraz dowolnie $\varepsilon > 0$ i niech Π_ε będzie podziałem odcinka $[a, b]$ wyznaczonym przez punkty $x_0, x_1, \ldots, x_k$ spełniające (31). Mamy

$$G(\Pi_\varepsilon, f) - D(\Pi_\varepsilon, f) = (\overline{M} - \overline{m})\,\Delta\bar{x} + \sum_{j \neq s}(M_j - m_j)\,\Delta x_j$$

a więc wobec (29), (33)

$$G(\Pi_\varepsilon, f) - D(\Pi_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

co oznacza, że spełniony jest warunek całkowalności funkcji f podany w twierdzeniu 4. □

Z twierdzenia 4 wynika również jako prosty wniosek

Twierdzenie 7. *Funkcja monotoniczna w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest całkowalna.*

DOWÓD. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że f jest funkcją rosnącą, wówczas dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (2)

$$m_j = f(x_{j-1}), \qquad M_j = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots k).$$

Jeżeli w szczególności Π jest podziałem odcinka $[a, b]$ na k równych części, to

$$\Delta x_j = \frac{b-a}{k},$$

zatem

$$G(\Pi, f) - D(\Pi, f) = \frac{b-a}{k}\sum_{j=1}^{k}\Big(f(x_j) - f(x_{j-1})\Big) = \frac{b-a}{k}\Big(f(b) - f(a)\Big).$$

Warunek (23) będzie więc spełniony, jeżeli obierzemy k w taki sposób, by spełniona była nierówność

$$\frac{b-a}{k}\Big(f(b) - f(a)\Big) < \varepsilon$$

którą można w równoważny sposób zapisać jako

$$k > \frac{b-a}{\varepsilon}\Big(f(b) - f(a)\Big).$$

□

Z twierdzeń 5 - 7 wynika, że istnieją dwie obszerne klasy funkcji całkowalnych:

1^0 klasa funkcji monotonicznych,

2^0 klasa funkcji ciągłych poza skończoną ilością punktów.

Powstaje pytanie, jakie działania wykonywane na funkcjach całkowalnych dają w wyniku funkcję całkowalną? Odpowiedź będzie zawarta w twierdzeniach, które teraz udowodnimy.

Twierdzenie 8. *Jeżeli funkcje f, g są całkowalne na przedziale $[a,b]$ i c jest dowolną stałą, to funkcja*
(i) $f+g$,
(ii) cf
również jest całkowalna na tym przedziale.

DOWÓD. Udowodnimy najpierw (i). Dla dowolnie ustalonego podziału Π określonego nierównościami (2) niech

$$\overline{m}_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]}(f+g), \qquad \overline{M}_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]}(f+g),$$
$$m'_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f, \qquad M'_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f,$$
$$m''_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} g, \qquad M''_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} g.$$

Z własności kresów górnego i dolnego (twierdzenie 17 rozdz. III §3) wynika, że

$$\overline{m}_j \geq m'_j + m''_j, \qquad \overline{M}_j \leq M'_j + M''_j$$

i wobec tego

$$\begin{aligned} &D(\Pi,f)+D(\Pi,g) \leq D(\Pi,f+g),\\ &G(\Pi,f+g) \leq G(\Pi,f)+G(\Pi,g). \end{aligned} \tag{34}$$

Na mocy twierdzenia 4 do ustalonej dowolnie liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać podziały Π'_ε, Π''_ε tak, by zachodziły nierówności

$$\begin{aligned} &G(\Pi'_\varepsilon,f)-D(\Pi'_\varepsilon,f) < \frac{\varepsilon}{2},\\ &G(\Pi''_\varepsilon,g)-D(\Pi''_\varepsilon,g) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{35}$$

Nierówności (35) są tym bardziej spełnione, jeżeli podziały Π'_ε, Π''_ε zastąpimy przez ich wspólne zagęszczenie $\Pi_\varepsilon = \Pi'_\varepsilon \cup \Pi''_\varepsilon$. Z (34) wynika wówczas, że

$$G(\Pi_\varepsilon, f+g) - D(\Pi_\varepsilon, f+g) < \varepsilon.$$

Zatem zgodnie z twierdzeniem 4 funkcja $f+g$ jest całkowalna.

Przechodząc do dowodu (ii) zauważmy, że dla $c=0$ funkcja cf jest oczywiście całkowalna jako funkcja stała a więc ciągła (twierdzenie 5). Załóżmy wobec tego, że $c \neq 0$ i niech dla dowolnie obranego podziału Π odcinka $[a,b]$

$$\overline{m}_j = \inf_{[x_{j-1},x_j}(cf), \qquad \overline{M}_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]}(cf).$$

Z własności kresów górnego i dolnego (twierdzenie 18 rozdz. III §3) otrzymujemy

$$\overline{m}_j = cm'_j, \qquad \overline{M}_j = cM'_j \qquad \text{dla} \quad c > 0$$

oraz

$$\overline{m}_j = cM_j', \qquad \overline{M}_j = cm_j' \qquad \text{dla} \quad c < 0.$$

Wobec tego

$$D(\Pi, cf) = \begin{cases} c\,D(\Pi, f) & \text{dla} \quad c > 0, \\ c\,G(\Pi, f) & \text{dla} \quad c < 0 \end{cases}$$

oraz

$$G(\Pi, cf) = \begin{cases} c\,G(\Pi, f) & \text{dla} \quad c > 0, \\ c\,D(\Pi, f) & \text{dla} \quad c < 0, \end{cases}$$

zatem

$$G(\Pi, cf) - D(\Pi, cf) = |c|\Big(G(\Pi, f) - D(\Pi, f)\Big). \tag{36}$$

Wobec całkowalności funkcji f do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można zgodnie z twierdzeniem 4 dobrać podział Π_ε odcinka $[a, b]$ tak, by zachodziła nierówność

$$G(\Pi_\varepsilon, f) - D(\Pi_\varepsilon, f) < \frac{\varepsilon}{|c|},$$

wówczas z równości (36) wynika, że

$$G(\Pi_\varepsilon, cf) - D(\Pi_\varepsilon, cf) < \varepsilon,$$

co w oparciu o twierdzenie 4 zapewnia całkowalność funkcji cf. □

Z udowodnionego twierdzenia widać, że działania liniowe tzn. dodawanie funkcji i mnożenie ich przez stałą nie wyprowadzają z klasy funkcji całkowalnych. Okazuje się, że również bardziej skomplikowane działania mają tą własność. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 9. *Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$ zaś q funkcją ciągłą w przedziale $[m, M]$ (przedział ten określa nierówność (1)). Wówczas funkcja złożona*

$$h(x) = q(f(x))$$

jest całkowalna na przedziale $[a, b]$.

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że funkcja q

(i) jest w przedziale $[m, M]$ ograniczona tzn istnieje stała $K > 0$ taka, że

$$|q(y)| \leq K \quad \text{dla} \quad y \in [m, M],$$

(ii) jest w przedziale $[m, M]$ jednostajnie ciągła, zatem do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla

$$|y' - y''| < \delta \qquad (y'\ y'' \in [m, M])$$

zachodziła nierówność

$$|q(y') - q(y'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

(por. twierdzenia 9 i 12 rozdz. III §3). Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że

$$\delta < \frac{\varepsilon}{4K}. \tag{37}$$

W dowodzie oprzemy się na twierdzeniu 4. Niech Π będzie podziałem odcinka $[a,b]$ określonym nierównościami (2) i niech

$$\overline{m}_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} h, \qquad \overline{M}_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} h,$$

wobec tego

$$G(\Pi,h) - D(\Pi,h) = \sum_{j=1}^{k} (\overline{M}_j - \overline{m}_j)\Delta x_j. \tag{38}$$

Z założenia całkowalności funkcji f wynika, że podział Π może być tak dobrany, aby zachodziła nierówność

$$G(\Pi,f) - D(\Pi,f) < \delta^2. \tag{39}$$

Podzielmy zbiór liczb $\{1,2,\ldots,k\}$ na dwie klasy, przyjmując, że

$$j \in A \quad \text{gdy} \quad M_j - m_j < \delta,$$
$$j \in B \quad \text{gdy} \quad M_j - m_j \geq \delta,$$

wówczas

$$\overline{M}_j - \overline{m}_j < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{dla} \quad j \in A, \tag{40}$$

natomiast z (39) wynika, że

$$\delta \sum_{j\in B} \Delta x_j \leq \sum_{j\in B} (M_j - m_j)\Delta x_j < \delta^2,$$

co daje oszacowanie

$$\sum_{j\in B} \Delta x_j < \delta. \tag{41}$$

Równość (38) może być zapisana w postaci

$$G(\Pi,h) - D(\Pi,h) = \sum_{j\in A} (\overline{M}_j - \overline{m}_j)\Delta x_j + \sum_{j\in B} (\overline{M}_j - \overline{m}_j)\Delta x_j,$$

skąd po uwzględnieniu (40), (41) otrzymujemy

$$G(\Pi,h) - D(\Pi,h) < \frac{\varepsilon}{2} + 2K\delta,$$

czyli wobec (37)

$$G(\Pi,h) - D(\Pi,h) < \varepsilon.$$

Podział Π spełnia warunek podany w twierdzeniu 4, zatem funkcja h jest całkowalna. $\square$

Z udowodnionego twierdzenia wynikają dwa wnioski, które sformułujemy w formie dalszych twierdzeń.

Twierdzenie 10. *Jeżeli f, g są całkowalne na przedziale $[a,b]$, to iloczyn fg też jest całkowalny na tym przedziale.*

DOWÓD. Przyjmując w twierdzeniu 9

$$q(t) = t^2$$

stwierdzamy, że kwadrat funkcji całkowalnej również jest funkcją całkowalną. Ponieważ

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$$

więc po zastosowaniu twierdzenia 8 otrzymujemy tezę. □

Twierdzenie 11. *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$, to jej moduł $|f|$ też jest funkcją całkowalną na tym przedziale.*

DOWÓD. Wystarczy przyjąć w twierdzeniu 9 $q(t) = |t|$. □

Udowodnimy jeszcze następującą własność funkcji całkowalnych:

Twierdzenie 12. *Jeżeli f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ i $[c,d] \subset [a,b]$, to f jest całkowalna na przedziale $[c,d]$.*

DOWÓD. Zgodnie z twierdzeniem 4 do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać podział Π odcinka $[a,b]$ tak, by zachodziła nierówność

$$G(\Pi, f) - D(\Pi, f) < \varepsilon. \tag{42}$$

Nierówność ta będzie tym bardziej spełniona, gdy podział Π uzupełnimy dwoma punktami c, d (por. twierdzenie 1). Możemy wobec tego założyć, że punkty c, d są punktami podziału Π. Oznaczając przez $\Pi_{[c,d]}$ zbiór punktów podziału Π należących do odcinka $[c,d]$ mamy

$$G(\Pi_{[c,d]}, f) - D(\Pi_{[c,d]}, f) < G(\Pi, f) - D(\Pi, f),$$

zatem z (42) wynika, że podział $\Pi_{[c,d]}$ spełnia warunek podany w twierdzeniu 4, a to oznacza całkowalność funkcji f na przedziale $[c,d]$. □

5. Całka Riemanna jako granica sum przybliżonych. W §1 określiliśmy całkę funkcji ciągłej jako granicę ciągu sum przybliżonych. Opierając się na twierdzeniu 3 łatwo udowodnić, że tą samą własność ma całka Riemanna funkcji ograniczonej (niekoniecznie ciągłej).

Niech Π będzie podziałem odcinka $[a,b]$ określonym nierównościami (2) i niech $\xi(\Pi) = \{\xi_j\}$ oznacza układ punktów pośrednich tzn. spełniających warunek

$$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j] \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Podobnie, jak w przypadku funkcji f ciągłej rozważanym w §1, wprowadzimy *sumę przybliżoną całki* (21) odpowiadającą podziałowi Π jako wyrażenie

$$S\Big(f,\Pi,\xi(\Pi)\Big)=\sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\Delta x_j.$$

Z nierówności

$$m_j \le f(\xi_j) \le M_j \qquad (j=1,2,\ldots,k)$$

wynika, że

$$D(\Pi,f)\le S\Big(f,\Pi,\xi(\Pi)\Big)\le G(\Pi,f) \tag{43}$$

dla dowolnego podziału Π i dowolnego układu punktów pośrednich $\xi(\Pi)$. Warto przy tym zauważyć, że sumy górna i dolna mogą nie być sumami przybliżonymi, gdyż na ogół nieciągła funkcja f może nie przyjmować swego kresu dolnego m_j ani kresu górnego M_j w żadnym punkcie $\xi\in[x_{j-1},x_j]$.

Twierdzenie 13. *Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a,b]$ i niech $\{\Pi_n\}$ będzie ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a,b]$. Dla dowolnie obranego układu punktów pośrednich $\xi(\Pi_n)$ przyjmijmy oznaczenie*

$$S_n=S\Big(f,\Pi_n,\xi(\Pi_n)\Big).$$

Wówczas

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty} S_n. \tag{44}$$

DOWÓD. Ustalmy $\varepsilon>0$ i niech δ będzie liczbą dobraną do ε, o której mowa w dowodzie twierdzenia 3. Ponieważ $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów, istnieje takie N, że dla $n>N$ zachodzi nierówność

$$d(\Pi_n)<\delta.$$

Zgodnie z twierdzeniem 3 mamy wówczas dla $n>N$

$$G(\Pi_n,f)<\overline{\int_a^b} f(x)\,dx+\varepsilon,$$

$$D(\Pi_n,f)>\underline{\int_a^b} f(x)\,dx-\varepsilon$$

co w zestawieniu z równością (22) i nierównością (43) daje

$$\int_a^b f(x)\,dx-\varepsilon<S_n<\int_a^b f(x)\,dx+\varepsilon$$

dla $n > N$, przy czym N jest dobrane do liczby δ, a więc za jej pośrednictwem do liczby ε ustalonej dowolnie na początku rozumowania. Oznacza to , że zachodzi (44). $\square$

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że w przypadku funkcji f ciągłej w przedziale $[a,b]$ (która jest całkowalna zgodnie z twierdzeniem 5) całka Riemanna jest identyczna z całką oznaczoną wprowadzoną w §1.

6. Własności rachunkowe całki Riemanna. Wzory rachunkowe udowodnione w §1 dla całki funkcji ciągłej pozostają słuszne dla całki Riemanna funkcji ograniczonej. Sformułujemy je w postaci twierdzeń.

Twierdzenie 14. *Załóżmy, że funkcje f, g są całkowalne na przedziale $[a,b]$ i niech c będzie dowolną stałą. Wówczas funkcje $f+g$ oraz cf są całkowalne na przedziale $[a,b]$ i zachodzą równości*

$$\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \tag{45}$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx. \tag{46}$$

DOWÓD. Całkowalność funkcji $f+g$ oraz cf była udowodniona w twierdzeniu 8. Równości (45), (46) otrzymujemy podobnie jak dla funkcji ciągłych (twierdzenie 2 §1) w oparciu o twierdzenie 13.

Twierdzenie 15 (o podziale przedziału całkowania). . *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$, to jest całkowalna na każdym z przedziałów $[a,c]$, $[c,b]$ (gdzie $a<c<b$) i zachodzi równość*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{47}$$

.

DOWÓD. Całkowalność funkcji f na przedziałach $[a,c]$ i $[c,b]$ wynika z twierdzenia 12 zaś dowód równości (47) przebiega tak samo jak dowód twierdzenia 3 §1 w oparciu o twierdzenie 13.

Twierdzenie 16 (o monotoniczności całki). *Jeżeli funkcje f, g całkowalne na przedziale $[a,b]$ spełniają nierówność*

$$f(x) \le g(x) \quad dla \quad x \in [a,b],$$

to

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{48}$$

DOWÓD przeprowadzamy tak samo jak w twierdzeniu 4 §1 opierając się na twierdzeniu 13.

Jako prosty wniosek z twierdzenia 16 dostajemy

Twierdzenie 17. *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to funkcja $|f|$ też jest całkowalna na tym przedziale i zachodzi nierówność*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \int_a^b |f|\, dx. \tag{49}$$

DOWÓD. Całkowalność funkcji $|f|$ była udowodniona w twierdzeniu 11. Aby otrzymać (49) zauważmy, że

$$f(x) \le |f(x)|, \qquad -f(x) \le |f(x)| \qquad \Big(x \in [a, b]\Big)$$

wobec tego zgodnie z (46), (48)

$$\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

oraz

$$\int_a^b (-f(x))\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Ostatnie dwie nierówności dają (49). □

Opierając się na twierdzeniu 13 można łatwo udowodnić dla całki Riemanna

Twierdzenie 18 (zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego). *Jeżeli f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ i ma pierwotną F w tym przedziale, to*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{50}$$

DOWÓD nie różni się od dowodu twierdzenia 5 §1. □

Definiując całkę Riemanna w przedziale $[a, b]$ zakładamy oczywiście, że $a < b$. Ze względów rachunkowych wygodnie jest przyjąć (podobnie, jak zrobiliśmy to w §1 dla funkcji f ciągłej)

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx \qquad (a < b), \tag{51}$$

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0. \tag{52}$$

Przy tak rozszerzonej definicji całki pozostają słuszne wzory (45), (46), (50), zaś twierdzenie 15 można sformułować nieco ogólniej:

Twierdzenie 15'. *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $\mathbb{P} = [A, B]$, to dla dowolnych a, b, $c \in \mathbb{P}$ zachodzi (47).*

DOWÓD przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 3' §1 i pozostawiamy go Czytelnikowi.

Twierdzenie 19. *Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale domkniętym $[A, B]$ i niech $a \in [A, B]$. Wówczas funkcja*

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

jest ciągła w przedziale $[A, B]$. Jeżeli f jest ciągła w punkcie $x_0 \in (A, B)$, to G ma w tym punkcie pochodną i zachodzi równość

$$G'(x_0) = f(x_0). \tag{53}$$

Gdy x_0 jest jednym z końców przedziału $[A, B]$, wzór (53) pozostaje słuszny, jeżeli przez pochodną rozumiemy pochodną jednostronną.

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód przy założeniu, że x_0 jest punktem wewnętrznym przedziału. Korzystając z (51), (52) i z twierdzenia o podziale przedziału całkowania możemy przyrost funkcji G zapisać następująco:

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt. \tag{54}$$

Wobec tego z (49) wynika, że

$$|G(x_0 + h) - G(x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\, dt \right| \tag{55}$$

niezależnie od znaku h. Ponieważ f jest ograniczona w $[A, B]$, istnieje stała K taka, że

$$|f(x)| \leq K \qquad \big(x \in [A, B]\big)$$

i stąd

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x)|\, dt \right| \leq K|h|. \tag{56}$$

Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$ i niech

$$\delta = \frac{\varepsilon}{K}.$$

Wówczas z (55), (56) wynika, że

$$|G(x_0 + h) - G(x_0)| < \varepsilon$$

dla $|h| < \delta$ a to oznacza ciągłość funkcji G w punkcie x_0.

Aby udowodnić różniczkowalność funkcji G zauważmy, że wobec (54) iloraz różnicowy można zapisać w postaci

$$\Phi(h) = \frac{1}{h}\Big[G(x_0+h) - G(x_0\Big] = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

natomiast

$$f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$$

dla przyrostów h o dowolnym znaku. Wobec tego

(57) $$|\Phi(h) - f(x_0)| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(t) - f(x_0)\Big)\,dt\right|.$$

Jeżeli f jest ciągła w punkcie x_0, to do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, że dla $|h| < \delta$ wyrażenie podcałkowe po prawej stronie (57) ma wartość bezwzględną $< \varepsilon$. Wówczas dla $|h| < \delta$ mamy

$$|\Phi(h) - f(x_0)| \leq \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\varepsilon = \varepsilon$$

a to oznacza, że

$$\lim_{h\to 0}\Phi(h) = f(x_0).$$

Zatem funkcja G jest różniczkowalna w punkcie x_0 i zachodzi równość (53). Dowód w przypadku gdy x_0 jest jednym z końców przedziału $[A, B]$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi. □

Na zakończenie udowodnimy jeszcze jedną własność całki Riemanna przydatną przy obliczaniu całek z konkretnych funkcji.

Twierdzenie 20. *Jeżeli $f(x) = g(x)$ w przedziale $[a, b]$ poza skończoną ilością punktów i funkcja f jest całkowalna na $[a, b]$ to funkcja g też jest całkowalna na tym przedziale i zachodzi równość*

(58) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

DOWÓD. Dla uproszczenia dowodu założymy, że funkcje f, g mają różne wartości tylko w jednym punkcie $c \in (a, b)$. Udowodnimy najpierw całkowalność funkcji g opierając się na twierdzeniu 4. Funkcja g jest ograniczona, istnieją więc liczby M, m takie, że

$$m \leq g(x) \leq M \qquad \text{dla} \quad x \in [a, b].$$

Obierając dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$ ustalmy punkty x', x'' w taki sposób, by zachodziły nierówności

(59) $$x' < c < x'', \qquad (M - m)(x'' - x') < \frac{\varepsilon}{2}$$

W przedziałach $[a,\ x']$, $[x'',\ b]$ funkcja g jest identyczna z funkcją f, jest więc na każdym z tych przedziałów całkowalna zgodnie z twierdzeniem 12. Istnieją zatem podziały określone nierównościami

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{p-1} = x', \qquad x'' = x_p < x_{p+1} < \cdots < x_k = b$$

takie, że zachodzą nierówności

$$\sum_{j=1}^{p-1}(M_j - m_j)\Delta x_j < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \sum_{j=p+1}^{k}(M_j - m_j)\Delta x_j < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{60}$$

gdzie

$$m_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} g, \qquad M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} g \qquad (j = 1, \ldots, k;\ j \neq p).$$

Niech

$$m_p = \inf_{[x',x'']} g, \qquad M_p = \sup_{[x',x'']} g, \qquad \Delta x_p = x'' - x',$$

wówczas z drugiej nierówności (59) wynika, że

$$(M_p - m_p)\Delta x_p < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{61}$$

Wobec tego podział Π odcinka $[a, b]$ określony nierównościami

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{p-1} = x' < x_p = x'' < \cdots < x_k = b$$

spełnia warunek twierdzenia 4, gdyż po dodaniu nierówności (60), (61) otrzymujemy

$$G(\Pi, g) - D(\Pi, g) < \varepsilon.$$

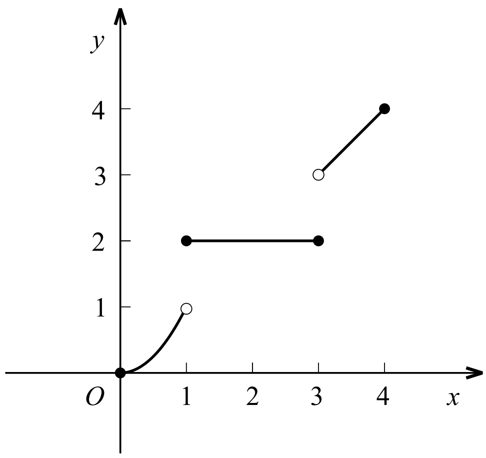
Zatem funkcja g jest całkowalna na przedziale $[a, b]$. Zgodnie z twierdzeniem 13 jej całka jest granicą ciągu sum przybliżonych, przy czym ciąg normalny $\{\Pi_n\}$ podziałów odcinka $[a, b]$ i układy punktów pośrednich $\xi(\Pi_n)$ mogą być dowolnie obrane. Zakładając, że dla żadnego n punkt c nie jest punktem pośrednim, mamy

$$S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = S(g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)),$$

co po przejściu do granicy przy $n \to \infty$ daje (58).

Przykład 2. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad 0 \le x < 1, \\ 2 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 3, \\ x & \text{dla} \quad 3 < x \le 4. \end{cases}$$



[rys. 81]

Funkcja f ma w przedziale $[0,4]$ dwa punkty nieciągłości: $c_1 = 1$ oraz $c_2 = 3$ (por. rys. 83), wobec tego jest całkowalna na tym przedziale (twierdzenie 6). Na podstawie twierdzenia o podziale przedziału całkowania mamy

$$\int_0^4 f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^3 f(x)\, dx + \int_3^4 f(x)\, dx.$$

Pierwszą i trzecią całkę po prawej stronie obliczymy korzystając z twierdzenia 20. W pierwszej całce zmieńmy wartość funkcji f w punkcie $x = 1$ przyjmując $f(1) = 1$, wówczas

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3},$$

natomiast w trzeciej całce przyjmiemy $f(3) = 3$. Wówczas

$$\int_3^4 f(x)\, dx = \int_3^4 x\, dx = \frac{7}{2},$$

a więc

$$\int_0^4 f(x)\, dx = \frac{1}{3} + 4 + \frac{7}{2} = \frac{47}{6}.$$

Zadania.

1. Obliczyć

$$\int_{-1}^2 f(x)\, dx,$$

jeżeli

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad -1 \le x < 1, \\ 2 & \text{dla} \quad x = 1, \\ -x & \text{dla} \quad 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniach 15 i 20.

2. Obliczyć

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

jeżeli

$$f(x) = \sin x \quad \text{dla} \quad -\pi < x < \pi,\ x \neq \pm\frac{\pi}{2},$$
$$f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0, \qquad f(-\pi) = f(\pi) = 1.$$

Wskazówka - jak w zadaniu 1.

3. Niech f, g będą funkcjami całkowalnymi na przedziale $[a, b]$. Udowodnić, że
(i) z nierówności

$$f(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in [a, b]$$

wynika

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0;$$

(ii) z nierówności

$$f(x) > g(x) \quad \text{dla} \quad x \in [a, b]$$

wynika

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$$

(por. zadanie 8 §1).
Wskazówka. W punkcie (i) przyjąć $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ i z zaprzeczenia tezy wywnioskować, że istnieje przedział $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, w którym $f(x) < \varepsilon_1$. Powtarzając to rozumowanie okazać, że istnieje ciąg zstępujący przedziałów $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ $(n \in \mathbb{N})$ taki, że $f(x) < \varepsilon_n$ dla $x \in [a_n, b_n]$. Następnie korzystając z twierdzenia Ascoliego (twierdzenie 1 rozdz. II §2) udowodnić istnienie punktu $c \in [a, b]$, w którym funkcja f przyjmuje wartość zero - wbrew założeniu. Punkt (ii) sprowadzić do punktu (i).

4. Załóżmy, że funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$. Udowodnić, że
a.) z nierówności

$$A \leq f(x) \leq B$$

wynika oszacowanie

$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq B(b-a);$$

b.) z nierówności

$$| f(x) | \leq M$$

wynika oszacowanie

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M(b-a)$$

(por. zadania 7 i wniosek 1 §1).

5. Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[P,\ Q]$. Udowodnić, że dla dowolnych $a, b \in [P,\ Q]$ zachodzi nierówność

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b \mid f(x) \mid\ dx\right|.$$

6. Udowodnić, że funkcja całkowalna na każdym z przedziałów $[a, c]$, $[c, b]$ jest całkowalna na ich sumie $[a, b]$.

7. Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$. Udowodnić, że dla dowolnie obranej liczby rzeczywistej c funkcja $g(x) = f(x-c)$ jest całkowalna na przedziale $[a+c, b+c]$.
Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 4.

8. Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$. Udowonić, że dla dowolnie obranej liczby $t > 0$ funkcja $h(x) = f(tx)$ jest całkowalna na przedziale $[\frac{a}{t}, \frac{b}{t}]$.
Wskazówka - jak w zadaniu 7.

9. Niech $\frac{p}{q}$ będzie ułamkiem nieskracalnym o liczniku całkowitym i mianowniku naturalnym i niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{gdy} \quad x = \frac{p}{q}, \\ 0 & \text{gdy} \quad x \quad \text{jest liczbą niewymierną} \end{cases}$$

(por. zadanie 17 rozdz. III §3). Udowodnić, że funkcja f jest całkowalna na każdym przedziale $[a, b]$ i obliczyć jej całkę w tym przedziale.
Wskazówka. Obierając dowolnie $N > 0$ udowodnić najpierw istnienie liczby $r(N)$ takiej, że ilość liczb wymiernych $\frac{p}{q}$ w przedziale $[a, b]$, dla kórych

$$q \le N \tag{62}$$

nie przekracza $r(N)$. Następnie dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1) przedstawić różnicę

$$Q(\Pi, f) = G(\Pi, f) - D(\Pi, f)$$

w postaci

$$Q(\Pi, f) = \sum_{j \in A} (M_j - m_j)\Delta x_j + \sum_{j \in B} (M_j - m_j)\Delta x_j, \tag{63}$$

gdzie $j \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy odcinek $[x_{j-1},\ x_j]$ zawiera liczbę $\frac{p}{q}$ spełniającą (62). Następnie oszacować z góry obie sumy po prawej stronie (63) i dobrać liczbę N oraz średnicę podziału Π tak, by spełniony był warunek całkowalności podany w twierdzeniu 4.

10. **(Pierwsze twierdzenie o wartości średniej.)**
Niech f, g będą funkcjami całkowalnymi na przedziale $[a,b]$, przy czym g ma stały znak. Zakładając, że

$$m \le f(x) \le M \qquad \big(x \in [a,b]\big),$$

udowodnić istnienie liczby $\mu \in [m,\ M]$ takiej, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Jaką postać przyjmuje to twierdzenie gdy $g(x) = 1$? Podać sens geometryczny.
Wskazówka. Przenieść dowód twierdzenia 3 z §3.

11. Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a,b]$ zaś g funkcją nieujemną i malejącą w tym przedziale. Udowodnić istnienie liczby ξ należącej do przedziału $[a,b]$ takiej, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Wskazówka. Rozważając dowolny podział Π przedziału $[a,b]$ określony nierównościami (2) udowodnić najpierw, że suma

$$\sum_{j=1}^{k} g(x_{j-1}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$$

zawiera się w przedziale $[mg(a),\ Mg(a)]$, gdzie

$$m = \inf_{[a,b]} F, \qquad M = \sup_{[a,b]} F, \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Następnie do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ dobrać podział Π przedziału $[a,b]$ tak, by suma

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \Big(g(x) - g(x_{j-1})\Big) f(x)\,dx$$

leżała w przedziale $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Wobec dowolności liczby ε wywnioskować stąd, że

$$mg(a) \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le Mg(a)$$

i skorzystać z ciągłości funkcji F (por. twierdzenie 19).

12. **(Drugie twierdzenie o wartości średniej.)**
Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$ zaś g funkcją monotoniczną w tym przedziale. Udowodnić istnienie liczby ξ leżącej w przedziale $[a, b]$ takiej, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Porównać z twierdzeniem 5 §3.
Wskazówka. Zastosować zadanie 11.

13. Niech f, g będą funkcjami całkowalnymi na przedziale $[a, b]$ i niech

$$g(x) \geq \eta > 0 \qquad \big(x \in [a, b]\big).$$

Udowodnić, że iloraz $\frac{f}{g}$ jest funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$.
Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniach 9, 10.