

§6*. Funkcje o wahanii skończonym.

1. Wahanie funkcji. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale domkniętym $[a, b]$ zaś Π podziałem tego przedziału określonym nierównościami

$$(1) \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

i niech

$$V(\Pi, f) = \sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})|.$$

Liczbę (skończoną lub nie)

$$(2) \quad W_a^b(f) = \sup_{\Pi} V(\Pi, f)$$

nazywamy *wahaniem funkcji f na przedziale $[a, b]$* . Mówimy, że f jest funkcją o wahanii skończonym w przedziale $[a, b]$ (lub że f ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$), jeżeli

$$(3) \quad W_a^b(f) < \infty.$$

Przykład 1. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -1 \leq x < 0, \\ 2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Wówczas dla dowolnego podziału Π

$$|f(x_j) - f(x_{j-1})| = \begin{cases} 2 & \text{gdy } x_{j-1} < 0 \leq x_j, \\ 0 & \text{dla pozostałych } j, \end{cases}$$

i stąd

$$V(\Pi, f) = 2.$$

Wobec tego

$$W_{-1}^1(f) = 2,$$

zatem warunek (3) jest spełniony i f jest funkcją o wahanii skończonym w przedziale $[-1, 1]$. $\square$

Przykład 2. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x} & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Zauważmy najpierw, że f jest ciągła w przedziale $[0, 1]$. Ciągłość dla $x = 0$ wynika z twierdzenia 2 rozdz.III §3, bowiem zgodnie z nierównością

$$\left| x \sin \frac{\pi}{x} \right| \leq |x|$$

mamy

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon,$$

jeżeli założymy, że $|x| < \delta = \varepsilon$, natomiast ciągłość f dla $x \neq 0$ wynika z twierdzeń o ciągłości iloczynu i superpozycji (rozdz. III §3).

Okażemy, że f nie jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[0, 1]$. Wystarczy w tym celu okazać, że do dowolnie danej liczby $M > 0$ można dobrać podział Π odcinka $[0, 1]$ w taki sposób, by zachodziła nierówność

$$(4) \quad V(\Pi, f) > M.$$

Ponieważ

$$\sin \frac{\pi}{x} = 1 \quad \text{dla} \quad x = \frac{2}{4k+1}, \quad \sin \frac{\pi}{x} = -1 \quad \text{dla} \quad x = \frac{2}{4k+3}$$

(k całkowite), przyjmijmy

$$\bar{x}_r = \frac{2}{4r+1} \quad \text{dla} \quad r = 1, 2, \dots$$

oraz

$$\bar{\bar{x}}_r = \frac{2}{4r+3} \quad \text{dla} \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

i rozważmy podział

$$\Pi_s : \quad 0 < \bar{\bar{x}}_s < \bar{x}_s < \bar{\bar{x}}_{s-1} < \bar{x}_{s-1} < \dots < \bar{\bar{x}}_1 < \bar{x}_1 < \bar{\bar{x}}_0 < 1.$$

Mamy

$$f(\bar{x}_r) = \bar{x}_r, \quad f(\bar{\bar{x}}_r) = -\bar{\bar{x}}_r$$

i stąd

$$V(\Pi_s, f) = 2 \sum_{r=1}^s \bar{x}_r + 2 \sum_{r=0}^s \bar{\bar{x}}_r,$$

czyli

$$(5) \quad V(\Pi_s, f) = 4 \sum_{r=1}^s \frac{1}{4r+1} + 4 \sum_{r=0}^s \frac{1}{4r+3}.$$

Zostawmy na chwilę badanie funkcji f i przyjrzyjmy się szeregom

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{4r+1}, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{4r+3}.$$

Łatwo sprawdzić opierając się na twierdzeniu 1 rozdz. IV §2, że oba są rozbieżne - zachodzą bowiem nierówności

$$\frac{1}{4r+1} > \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{r+1}, \quad \frac{1}{4r+3} > \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{r+1},$$

zaś szereg

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r+1}$$

jest rozbieżny jako szereg harmoniczny (Przykład 4 rozdz. IV §1). Po prawej stronie (5) występują zatem sumy częściowe szeregów rozbieżnych, a stąd wynika, że podział Π_s spełnia warunek (4), jeżeli obierzemy dostatecznie duże s .

Z podanych przykładów widać, że funkcja o wahanu skończonym może nie być ciągła a z drugiej strony istnieją funkcje ciągłe mające nieskończone wahanie. Sformułujemy teraz warunki dostateczne do tego by funkcja miała skończone wahanie na ustalonym przedziale.

Twierdzenie 1. *Funkcja monotoniczna w przedziale $[a, b]$ jest funkcją o wahanu skończonym w tym przedziale.*

DOWÓD. Dla ustalenia uwagi założymy, że f jest rosnąca, wówczas dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1)

$$V(\Pi, f) = \sum_{j=1}^k \left(f(x_j) - f(x_{j-1}) \right),$$

czyli po redukcji

$$V(\Pi, f) = f(b) - f(a).$$

Zatem

$$W_a^b(f) = f(b) - f(a) < \infty.$$

□

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i ma w przedziale otwartym (a, b) ograniczoną pochodną, to jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$.*

DOWÓD. Dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1) mamy na mocy twierdzenia Lagrange'a

$$V(\Pi, f) = \sum_{j=1}^k |f'(\xi_j)| (x_j - x_{j-1}),$$

gdzie $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$. Z założenia istnieje liczba $M > 0$ taka, że

$$|f'(x)| \leq M \quad \text{dla} \quad x \in (a, b),$$

wobec tego

$$V(\Pi, f) \leq M \sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1}) = M(b - a).$$

Zatem

$$W_a^b(f) \leq M(b - a) < \infty.$$

□

Wniosek 1. Funkcja klasy C^1 w przedziale domkniętym $[a, b]$ ma skończone wahanie na tym przedziale.

Mówimy, że f jest funkcją *kawałkami gładką* w przedziale $[a, b]$, jeżeli istnieje taki skończony ciąg liczb c_j ($j = 0, 1, \dots, p$) spełniających nierówności

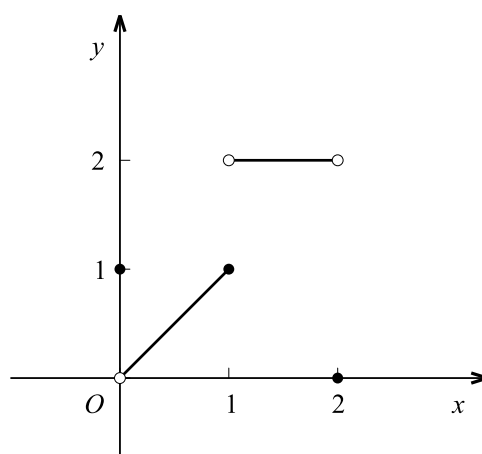
$$a = c_0 < c_1 < \dots < c_p = b$$

i taki układ funkcji h_j ($j = 1, \dots, p$), że

$$1^0 \quad f(x) = h_j(x) \text{ dla } c_{j-1} < x < c_j,$$

$$2^0 \quad \text{funkcja } h_j \text{ jest klasy } C^1 \text{ w przedziale domkniętym } [c_{j-1}, c_j].$$

Jeżeli funkcje h_j są stałe, to mówimy, że funkcja f jest *kawałkami stała* w przedziale $[a, b]$.



[rys. 82]

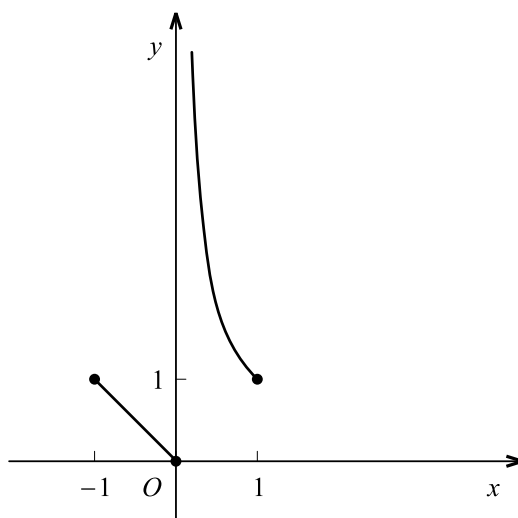
Przykład 3. Niech (rys. 82)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0, \\ x & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 2 & \text{dla } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{dla } x = 2. \end{cases}$$

Mamy

$$a = c_0 = 0 < c_1 = 1 < c_2 = b = 2, \quad h_1(x) = x, \quad h_2(x) = 2.$$

Ponieważ funkcje h_1 , h_2 są klasy C^1 odpowiednio w przedziałach $[0, 1]$, $[1, 2]$, funkcja f jest kawałkami gładką w przedziale $[0, 2]$. W punktach c_0 , c_1 , c_2 funkcja f jest nieciągła.



[rys. 83]

Przykład 4. Niech (rys. 83)

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{x} & \text{dla } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

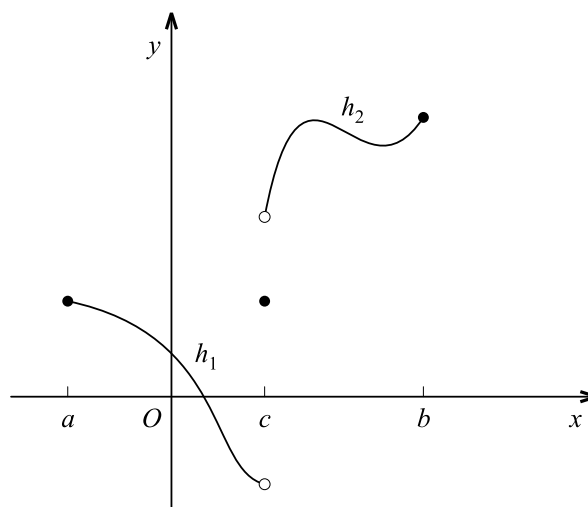
wówczas przy wprowadzonych poprzednio oznaczeniach

$$a = c_0 = -1 < c_1 = 0 < c_2 = b = 1, \quad h_1(x) = -x, \quad h_2(x) = \frac{1}{x}.$$

Jednak f nie jest kawałkami gładka w przedziale $[-1, 1]$, gdyż funkcja h_2 nie jest klasy C^1 w przedziale $[0, 1]$ (w punkcie $x = 0$ funkcja ta nie jest określona, zaś przy $x \rightarrow 0+$ dąży do $+\infty$).

Twierdzenie 3. *Jeżeli f jest kawałkami gładka w przedziale $[a, b]$, to jest funkcją o wahaniu skończonym w tym przedziale.*

DOWÓD.



[rys. 84]

Przeprowadzimy dowód zakładając, że f ma jedyny punkt nieciągłości c wewnątrz przedziału. Dowód w ogólnym przypadku przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. Mamy (rys. 84)

$$f(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{dla } a \leq x < c, \\ h_2(x) & \text{dla } c < x \leq b \end{cases}$$

przy czym funkcja h_1 jest klasy C^1 w przedziale $[a, c]$ i funkcja h_2 jest klasy C^1 w przedziale $[c, b]$. Z uczynionych założeń wynika istnienie stałej $M > 0$ takiej, że

$$(6) \quad |h'_1(x)| \leq M \quad \text{dla } x \in [a, c], \quad |h'_2(x)| \leq M \quad \text{dla } x \in [c, b].$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\sigma(c) = h_2(c) - h_1(c), \quad \sigma_-(c) = f(c) - h_1(c), \quad \sigma_+(c) = h_2(c) - f(c).$$

Oszacujemy $V(\Pi, f)$ dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1). Jeżeli c nie jest punktem podziału, to dla pewnego s

$$x_{s-1} < c < x_s$$

i wówczas

$$|f(x_s) - f(x_{s-1})| \leq |h_2(x_s) - h_2(c)| + |\sigma(c)| + |h_1(c) - h_1(x_{s-1})|,$$

skąd po zastosowaniu twierdzenia Lagrange'a i nierówności (6) otrzymujemy

$$(7) \quad |f(x_s) - f(x_{s-1})| \leq M(x_s - x_{s-1}) + |\sigma(c)|.$$

Jeżeli zaś dla pewnego r

$$c = x_r$$

(zatem c jest punktem podziału Π), to

$$|f(x_r) - f(x_{r-1})| \leq |\sigma_-(c)| + |h_1(c) - h_1(x_{r-1})|$$

i

$$|f(x_{r+1}) - f(x_r)| \leq |h_2(x_{r+1}) - h_2(c)| + |\sigma_+(c)|,$$

skąd stosując ponownie twierdzenie Lagrange'a i nierówność (6) otrzymujemy

$$(8) \quad |f(x_r) - f(x_{r-1})| \leq M(x_r - x_{r-1}) + |\sigma_-(c)|$$

oraz

$$(9) \quad |f(x_{r+1}) - f(x_r)| \leq M(x_{r+1} - x_r) + |\sigma_+(c)|.$$

Podobny rachunek wykazuje, że jeżeli $c \notin [x_{j-1}, x_j]$ to

$$(10) \quad |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq M(x_j - x_{j-1}).$$

Z nierówności (7) - (10) wynika oszacowanie

$$V(\Pi, f) \leq M(b - a) + S(c),$$

gdzie

$$S(c) = |\sigma(c)| + |\sigma_+(c)| + |\sigma_-(c)|.$$

Wobec tego

$$W_a^b(f) \leq M(b - a) + S(c) < \infty,$$

co kończy dowód. □

2. Własności wahania funkcji. Będziemy zakładali, że f jest funkcją o wahaniu skończonym w przedziale $[a, b]$.

Twierdzenie 4. Dla dowolnego $c \in (a, b)$

$$W_a^b(f) = W_a^c(f) + W_c^b(f).$$

DOWÓD. Niech

$$\Pi^{(1)} : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = c$$

będzie dowolnym podziałem odcinka $[a, c]$, zaś

$$\Pi^{(2)} : \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_s = b$$

dowolnym podziałem odcinka $[c, b]$. Wówczas

$$\Pi = \Pi^{(1)} \cup \Pi^{(2)}$$

jest podziałem odcinka $[a, b]$ i przy tym

$$V(\Pi^{(1)}, f) + V(\Pi^{(2)}, f) = V(\Pi, f).$$

Na mocy definicji wahania funkcji wynika stąd, że

$$V(\Pi^{(1)}, f) + V(\Pi^{(2)}, f) \leq W_a^b(f).$$

Rozważając kres górny lewej strony po wszystkich podziałach $\Pi^{(1)}$ (przy ustalonym $\Pi^{(2)}$) dostajemy nierówność

$$W_a^c(f) + V(\Pi^{(2)}, f) \leq W_a^b(f),$$

następnie przechodząc do kresu górnego po wszystkich podziałach $\Pi^{(2)}$ otrzymujemy

$$(11) \quad W_a^c(f) + W_c^b(f) \leq W_a^b(f).$$

Pozostaje do udowodnienia nierówność przeciwna. Niech Π będzie dowolnym podziałem odcinka $[a, b]$ określonym nierównościami (1), wówczas dla pewnego s

$$x_{s-1} \leq c \leq x_s,$$

zatem $\Pi^{(1)} = \{a, x_1, \dots, x_{s-1}, c\}$ jest podziałem odcinka $[a, c]$ i $\Pi^{(2)} = \{c, x_s, \dots, x_k = b\}$ jest podziałem odcinka $[c, b]$. Ponieważ

$$|f(x_s) - f(x_{s-1})| \leq |f(x_s) - f(c)| + |f(c) - f(x_{s-1})|,$$

zachodzi nierówność

$$V(\Pi, f) \leq V(\Pi^{(1)}, f) + V(\Pi^{(2)}, f),$$

z której wynika, że

$$V(\Pi, f) \leq W_a^c(f) + W_c^b(f).$$

Rozważając kres górny lewej strony po wszystkich podziałach Π odcinka $[a, b]$ otrzymujemy

$$(12) \quad W_a^b(f) \leq W_a^c(f) + W_c^b(f).$$

Z nierówności (11), (12) wynika teza twierdzenia. $\square$

Wniosek 2. Jeżeli $a \leq c < d \leq b$ i f jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$ to również jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[c, d]$ i przy tym

$$(13) \quad W_c^d(f) \leq W_a^b(f).$$

DOWÓD. Ponieważ wahanie funkcji jest liczbą nieujemną, z (11) wynika

$$W_c^b(f) \leq W_a^b(f),$$

zaś zastępując przedział $[a, b]$ przez $[c, b]$ otrzymujemy podobnie

$$W_c^d(f) \leq W_c^b(f).$$

Nierówności te dają (13). □

Z Wniosku 1 wynika, że jeżeli f jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$, to ustalając dowolnie $x \in (a, b]$ możemy rozważać funkcję

$$(14) \quad w(x) = W_a^x(f).$$

Definicję wahanu funkcji można formalnie przenieść na przypadek przedziału "zdegenerowanego" $[a, a]$, oczywiście

$$W_a^a(f) = 0$$

dla każdej funkcji f . Dlatego możemy rozważać funkcję (14) w całym przedziale $[a, b]$, przyjmując

$$w(a) = W_a^a(f) = 0.$$

Twierdzenie 5. Zakładamy, że f jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$. Wówczas

(i) Jeżeli f jest ciągła prawostronnie w punkcie $c \in [a, b)$, to funkcja

$$w(x) = W_a^x(f)$$

też jest ciągła prawostronnie w punkcie c .

(ii) Jeżeli f jest ciągła lewostronnie w punkcie $c \in (a, b]$, to funkcja w jest też ciągła lewostronnie w punkcie c .

DOWÓD. Zauważmy, że zgodnie z Wnioskiem 2 mamy

$$W_a^x(f) < \infty$$

dla $x \in [a, b]$, zatem funkcja $w(x)$ jest dobrze określona w całym przedziale $[a, b]$.

Udowodnimy najpierw (i). Z definicji kresu górnego wynika, że do dowolnie ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać podział Π_ε odcinka $[c, b]$ tak, by

$$(15) \quad W_c^b(f) < V(\Pi_\varepsilon, f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przyjmijmy, że podział Π_ε jest określony nierównościami

$$c = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b.$$

Ponieważ f jest prawostronnie ciągła w punkcie c , można do ε dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by zachodziła nierówność

$$(16) \quad |f(c) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

o ile

$$(17) \quad c < \bar{x} < c + \delta.$$

Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że $c + \delta < x_1$. Zauważmy, że

$$|f(x_1) - f(c)| \leq |f(x_1) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - f(c)|,$$

wobec tego rozważając podział odcinka $[\bar{x}, b]$

$$\bar{\Pi} : \bar{x} < x_1 < \cdots < x_k = b$$

mamy na mocy (16)

$$V(\Pi_\varepsilon, f) \leq \frac{\varepsilon}{2} + V(\bar{\Pi}, f),$$

a stąd wobec (15)

$$W_c^b(f) < \varepsilon + V(\bar{\Pi}, f),$$

co daje

$$W_c^b(f) < \varepsilon + W_{\bar{x}}^b(f).$$

Zgodnie z twierdzeniem 4

$$W_a^{\bar{x}}(f) - W_a^c(f) = W_c^b(f) - W_{\bar{x}}^b(f),$$

zatem ostatnia nierówność może być zapisana w postaci

$$W_a^{\bar{x}}(f) - W_a^c(f) < \varepsilon.$$

Zachodzi ona dla dowolnie ustalonego $\bar{x}$ spełniającego (17), a to oznacza tezę (i).

Dowód (ii) przebiega podobnie. Do dowolnie ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ dobieramy najpierw podział Π'_ε odcinka $[a, c]$ określony nierównościami

$$a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_p = c$$

taki, że

$$(18) \quad W_a^c(f) < V(\Pi'_\varepsilon, f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

oraz liczbę $\delta > 0$ o tej własności, że

$$(19) \quad |f(c) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

jeżeli

$$(20) \quad c - \delta < \bar{x} < c.$$

Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że

$$x'_{p-1} < c - \delta.$$

Ponieważ

$$|f(c) - f(x'_{p-1})| \leq |f(c) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - f(x'_{p-1})|,$$

więc wprowadzając podział odcinka $[a, \bar{x}]$

$$\bar{\Pi} : a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_{p-1} < \bar{x}$$

mamy zgodnie z (19)

$$V(\Pi'_\varepsilon, f) \leq \frac{\varepsilon}{2} + V(\bar{\Pi}, f),$$

a zatem wobec (18)

$$W_a^c < \varepsilon + V(\bar{\Pi}, f),$$

skąd wynika, że

$$W_a^c(f) < \varepsilon + W_a^{\bar{x}}(f).$$

Ostatnią nierówność można zapisać w postaci

$$W_a^c(f) - W_a^{\bar{x}}(f) < \varepsilon.$$

Nierówność ta zachodzi dla dowolnie ustalonego $\bar{x}$ spełniającego (20) a to oznacza tezę (ii).

□

Z udowodnionego twierdzenia wynika

Wniosek 3. *Niech f będzie funkcją o wahanii skończonym w przedziale $[a, b]$. Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to tą samą własność ma funkcja*

$$w(x) = W_a^x(f).$$

3. Rozkład kanoniczny Jordana. Opierając się na twierdzeniach 4, 5 udowodnimy

Twierdzenie 6 (Jordana). ¹ Każda funkcja f o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$ daje się przedstawić jako różnica dwóch funkcji rosnących

$$(21) \quad f(x) = p(x) - q(x),$$

gdzie

$$(22) \quad p(x) = \frac{1}{2} \left(W_a^x(f) + f(x) \right), \quad q(x) = \frac{1}{2} \left(W_a^x(f) - f(x) \right).$$

Jeżeli f jest ciągła w $[a, b]$, to tą samą własność mają funkcje p, q .

DOWÓD. Ciągłość funkcji p, q zapewnia Wniosek 3, pozostaje okazać, że funkcje te są rosnące. Załóżmy, że

$$a \leq c < d \leq b$$

i niech Π oznacza podział odcinka $[c, d]$ określony następująco

$$\Pi : c = x_0 < x_1 = d.$$

Wówczas z definicji wahanu funkcji mamy

$$V(\Pi, f) = |f(d) - f(c)| \leq W_c^d(f)$$

i wobec tego

$$(23) \quad W_c^d(f) + f(d) - f(c) \geq 0, \quad W_c^d(f) + f(c) - f(d) \geq 0.$$

Opierając się na twierdzeniu 4 stwierdzamy, że

$$p(d) - p(c) = \frac{1}{2} \left(W_c^d(f) + f(d) - f(c) \right)$$

oraz

$$q(d) - q(c) = \frac{1}{2} \left(W_c^d(f) + f(c) - f(d) \right),$$

zatem z (23) wynika

$$p(d) \geq p(c), \quad q(d) \geq q(c),$$

co kończy dowód. □

Rozkład funkcji f o wahanu skończonym określony wzorami (21), (22) nazywamy *rozkładem kanonicznym Jordana*.

4. Własności rachunkowe funkcji o wahanu skończonym. Na zakończenie udowodnimy pewne proste twierdzenia dotyczące funkcji o wahanu skończonym.

¹Camille Jordan (1838 - 1922), matematyk francuski, zajmował się analizą matematyczną, algebrą macierzy i teorią grup. Napisał pierwszą w świecie książkę poświęconą teorii grup i teorii Galois. Od 1881 r. członek Paryskiej Akademii Nauk, od 1895 r. członek Akademii Nauk w Petersburgu.

Twierdzenie 7. *Jeżeli f jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$, to również $|f|$ ma tę własność.*

DOWÓD. Z nierówności

$$\left| |f(x_j)| - |f(x_{j-1})| \right| \leq |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

(por. (12) rozdz.I §1) wynika, że

$$V(\Pi, |f|) \leq V(\Pi, f)$$

dla każdego podziału Π odcinka $[a, b]$. Przechodząc do kresu górnego ze względu na wszystkie podziały otrzymujemy

$$W_a^b(|f|) \leq W_a^b(f)$$

skąd wynika teza. □

Z definicji wahanu funkcji wynika natychmiast

Twierdzenie 8. *Funkcja o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$ jest ograniczona w tym przedziale.*

DOWÓD. Ustalając dowolnie $x_0 \in (a, b]$ rozważmy podział Π odcinka $[a, b]$ określony nierównościami

$$\Pi : a < x_0 \leq b,$$

wówczas

$$|f(x_0) - f(a)| \leq V(\Pi, f) \leq W_a^b(f),$$

stąd (por. (12) rozdz.I §1)

$$|f(x_0)| - |f(a)| \leq |f(x_0) - f(a)| \leq W_a^b(f),$$

zatem

$$|f(x_0)| \leq |f(a)| + W_a^b(f).$$

□

Udowodnimy jeszcze

Twierdzenie 9. *Jeżeli funkcje f_1, f_2 mają skończone wahanie na przedziale $[a, b]$, to ich kombinacja liniowa oraz iloczyn mają również skończone wahanie na tym przedziale.*

DOWÓD. Dla dowolnych stałych c_1, c_2 , zgodnie ze wzorami (9), (10) rozdz. I §1, mamy

$$\begin{aligned} & |c_1 f_1(x_j) + c_2 f_2(x_j) - c_1 f_1(x_{j-1}) - c_2 f_2(x_{j-1})| \\ & \leq |c_1| |f_1(x_j) - f_1(x_{j-1})| + |c_2| |f_2(x_j) - f_2(x_{j-1})| \end{aligned}$$

i stąd

$$V(\Pi, c_1 f_1 + c_2 f_2) \leq |c_1| V(\Pi, f_1) + |c_2| V(\Pi, f_2)$$

dla dowolnego podziału Π odcinka $[a, b]$. Przechodząc do kresu górnego po wszystkich podziałach (por. rozdz. III §3 punkt 10) otrzymujemy

$$(24) \quad W_a^b(c_1 f_1 + c_2 f_2) \leq |c_1| W_a^b(f_1) + |c_2| W_a^b(f_2),$$

skąd wynika pierwsza część tezy.

Na podstawie twierdzenia 8 funkcje f_1, f_2 są ograniczone w przedziale $[a, b]$, istnieje więc liczba $M > 0$ taka, że

$$|f_j(x)| \leq M \quad (j = 1, 2; \ x \in [a, b]).$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} & |f_1(x_j)f_2(x_j) - f_1(x_{j-1})f_2(x_{j-1})| \\ & \leq |f_1(x_j)||f_2(x_j) - f_2(x_{j-1})| + |f_2(x_{j-1})||f_1(x_j) - f_1(x_{j-1})| \\ & \leq M \left(|f_1(x_j) - f_1(x_{j-1})| + |f_2(x_j) - f_2(x_{j-1})| \right) \end{aligned}$$

a stąd

$$V(\Pi, f_1 f_2) \leq M \left(V(\Pi, f_1) + V(\Pi, f_2) \right)$$

dla dowolnego podziału Π odcinka $[a, b]$. Przejście do kresu górnego po wszystkich podziałach daje

$$W_a^b(f_1 f_2) \leq M \left(W_a^b(f_1) + W_a^b(f_2) \right),$$

skąd otrzymujemy drugą część tezy. □

Zadania.

1. Posługując się twierdzeniem Lagrange'a o wartości średniej oszacować z góry wahanie następujących funkcji:

- a.) $f(x) = x \cos x$ na przedziale $[0, \pi]$,
- b.) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3}$ na przedziale $[-1, 1]$,
- c.) $f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ na przedziale $[0, e]$.

2. Znaleźć wahanie funkcji

- a.) $f(x) = 2x$ na przedziale $[-1, 1]$,
- b.) $f(x) = \sin x^2$ na przedziale $\left[0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right]$,
- c.) $f(x) = \frac{3-x}{2x+5}$ na przedziale $[-1, 10]$.

3. Które z podanych funkcji mają skończone wahanie na przedziale $[0, 1]$? Naszkicować ich wykresy.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \\ \text{(ii)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{dla } x = 1, \end{cases} \\ \text{(iii)} \quad f(x) &= \begin{cases} \sin \frac{2\pi}{x} & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \\ \text{(iv)} \quad f(x) &= \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ x^2 & \text{dla } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Wskazówka. Punkt (iii) porównać z Przykładem 2.

4. Znaleźć wahanie funkcji f na przedziale $[a, b]$, jeżeli

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x) &= x^2, \quad a = -2, \quad b = 1, \\ \text{(ii)} \quad f(x) &= \sin x, \quad a = 0, \quad b = 2\pi, \\ \text{(iii)} \quad f(x) &= \begin{cases} 2x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ -x + 1 & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 3 & \text{dla } 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad a = -1, \quad b = 2. \end{aligned}$$

Wskazówka. Podzielić przedział i zastosować twierdzenie 4.

5. Dla funkcji podanych w zadaniu 4 znaleźć funkcję

$$w(x) = W_a^x(f)$$

i podać rozkład Jordana. Zbadać ciągłość funkcji w , wynik porównać z twierdzeniem 5.

6. Niech f, g będą funkcjami o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$, przy czym

$$|g(x)| \geq \alpha > 0$$

dla $x \in [a, b]$. Udowodnić, że iloraz $\frac{f}{g}$ ma też skończone wahanie na przedziale $[a, b]$.

Wskazówka. Udowodnić, że funkcja $\frac{1}{g}$ ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$ i zastosować twierdzenie 9.

7. Niech

$$p_\alpha(t) = \alpha \operatorname{tg} t - t \quad (\alpha \neq 0).$$

Udowodnić, że w każdym przedziale $\mathbb{P}_k = (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, gdzie k jest liczbą całkowitą różną od zera, leży dokładnie jedno miejsce zerowe funkcji p_α .

Wskazówka. Zacząć od zbadania funkcji p_α w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

8. Zbadać ekstrema i naszkicować wykres funkcji

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{\pi}{x} & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$(\alpha \in \mathbb{R}).$$

Wskazówka. Zauważyć najpierw, że punkty

$$\check{x} = 0 \quad \text{oraz} \quad \check{x}_k = \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

są jedynymi miejscami zerowymi funkcji f_α . W celu zbadania ekstremów dla $\alpha \neq 0$ oprzeć się na zadaniu 7. Następnie znaleźć punkty, w których $\sin \frac{\pi}{x}$ przyjmuje wartości ± 1 ; czy dla $\alpha \neq 0$ są one punktami ekstremalnymi funkcji f_α ?

9. Niech f będzie dowolną funkcją określoną w przedziale $\Delta = [a, b]$. Sprawdzić, że

(i) Jeżeli podział $\tilde{\Pi}$ jest zagęszczeniem podziału Π (tzn. powstaje z niego przez dołączenie nowych punktów), to

$$V(\Pi, f) \leq V(\tilde{\Pi}, f).$$

(ii) Jeżeli f jest monotoniczna w przedziale Δ , to

$$V(\Pi, f) = |f(b) - f(a)|.$$

(iii) Załóżmy, że f ma w przedziale Δ stały znak i jedyne ekstremum dla $x = t_0 \in (a, b)$, przy czym jest to

$$\text{minimum, gdy } f(x) \leq 0, \quad \text{maximum, gdy } f(x) \geq 0.$$

Wówczas

$$|f(b) - f(a)| \leq |f(t_0)|.$$

10. Niech f_α będzie funkcją określoną w zadaniu 8. Okazać, że

$$W_0^1(f_\alpha) \begin{cases} = \infty & \text{dla } \alpha \leq 1, \\ < \infty & \text{dla } \alpha > 1. \end{cases}$$

Wskazówka. Dla $\alpha \leq 1$ rozumujemy podobnie jak w Przykładzie 2, dla $\alpha > 1$ opieramy się na zadaniach 8, 9. Wynika z nich, że szacując z góry wyrażenie $V(\Pi, f)$ gdzie

$$\Pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1$$

można założyć, że odcinek $[x_1, 1]$ został rozbity na przedziały Δ spełniające jeden z warunków (ii) lub (iii) zadania 9. W wyniku otrzymujemy oszacowanie

$$V(\Pi, f_\alpha) \leq 3 \sum_{k=1}^r \check{x}_k^\alpha,$$

gdzie r jest liczbą naturalną dobraną do x_1 . Następnie należy wykorzystać zbieżność odpowiedniego szeregu.

11. Niech f_α będzie funkcją rozważaną w zadaniach 8, 10. Zbadać, dla jakich α

- a.) f_α jest ciągła,
- b.) f_α jest różniczkowalna,
- c.) f'_α jest ograniczona,
- d.) f'_α jest ciągła

w przedziale $[0, 1]$. Porównać z twierdzeniem 2 i zadaniem 10.

12. Załóżmy, że

- (i) funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału,
- (ii) funkcja $|f'|$ jest ograniczona i całkowalna na przedziale $[a, b]$.

Okazać, że

$$W_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Wskazówka. Zauważyć, że przy dowolnie ustalonym $\delta > 0$

$$W_a^b(f) = \sup_{d(\Pi) < \delta} V(\Pi, f).$$

13. Zakładając, że

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) \quad \text{dla } x \in [a, b],$$

$$(b) \quad \text{istnieje } \lim_{n \rightarrow \infty} W_a^b(g_n) = A < \infty,$$

udowodnić nierówność

$$W_a^b(g) \leq A.$$

14. Utrzymując w mocy założenie (a) zadania 12 załóżmy oprócz tego, że

- (b) dla każdego $\eta > 0$ funkcja $|f'|$ jest ograniczona i całkowalna w przedziale $[a + \eta, b]$,
- (c) istnieje granica

$$(25) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0+} \int_{a+\eta}^b |f'(x)| dx = \int_a^b |f'(x)| dx$$

(całka po prawej stronie (25) jest *całką niewłaściwą Riemanna*).
Okazać, że wówczas

$$W_a^b(f) \leq |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Wskazówka. Zastąpić funkcję f przez funkcję

$$g_\eta(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } a + \eta \leq x \leq b, \\ 0 & \text{dla } a \leq x < a + \eta, \end{cases}$$

następnie oprzeć się na zadaniach 12, 13.

15. Niech f_α będzie funkcją rozważaną w zadaniach 8, 10, 11. Udowodnić, że

$$W_0^1(f_\alpha) < \infty \quad \text{dla } \alpha > 1$$

opierając się na zadaniach 12, 14.

16. Niech $\{c_0 = b, c_1, c_2, \dots\}$ będzie ciągiem ściśle malejącym zbieżnym do $a < b$, niech g będzie funkcją określoną w przedziale $[a, b]$ spełniającą warunki

$$g(x) = h_n \quad \text{dla } x \in (c_{n+1}, c_n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

i niech

$$\sigma_n = h_{n-1} - h_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Okazać, że

(i) g ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy gdy szereg

$$(26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

jest bezwzględnie zbieżny,

(ii) w przypadku bezwzględnej zbieżności szeregu (26) przyjmując

$$\sigma_0 = g(b) - g(a) - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

mamy

$$W_a^b(g) = \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_n|.$$

Wskazówka. Niech Π będzie podziałem odcinka $[a, b]$ określonym nierównościami

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b.$$

Zauważyć, że
1^o jeżeli

$$c_{n+1} < x_1 \leq c_n,$$

to

$$V(\Pi, g) \leq |h_n - g(a)| + \sum_{j=1}^n |\sigma_j|$$

przy czym można dobrać podział Π tak, by zachodziła równość;

2^o dopisując do podziału Π nowe punkty zwiększamy wyrażenie $V(\Pi, g)$ (por. zadanie 9);

3^o w przypadku zbieżności szeregu (26) ciąg $\{h_n\}$ ma skończoną granicę i przy tym

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n - g(a)) = \sigma_0.$$

17. Niech $\{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ będzie ciągiem określonym w zadaniu 16 i niech g będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ spełniającą warunki

$$g(x) = h_n(x) \quad \text{dla} \quad x \in (c_{n+1}, c_n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

przy czym funkcja h_n jest klasy C^1 w przedziale $[c_{n+1}, c_n]$. Udowodnić, że jeżeli pochodne h'_n są wspólnie ograniczone tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$|h'_n(x)| \leq M \quad \text{dla} \quad x \in (c_{n+1}, c_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

to

$$W_a^b(g) \leq M(b-a).$$

18. Udowodnić, że

$$W_a^b(g) = 0$$

wtedy i tylko wtedy gdy g jest funkcją stałą w przedziale $[a, b]$.

19. Załóżmy, że funkcja f o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$ daje się przedstawić w postaci

$$f(x) = g(x) - h(x) \quad \left(x \in [a, b]\right),$$

przy czym funkcje g, h są rosnące. Udowodnić, że dla $x, y \in [a, b]$, $x < y$ zachodzą nierówności

$$p(y) - p(x) \leq g(y) - g(x), \quad q(y) - q(x) \leq h(y) - h(x),$$

gdzie funkcje p, q są określone wzorami (22).

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do oszacowania wyrażenia $W_x^y(f)$ w oparciu o wzór (24).