

§7*. Całka Riemanna - Stieltjesa.

1. Całki górna i dolna Darboux - Stieltjesa. Załóżmy, że f jest funkcją ograniczoną w przedziale domkniętym $[a, b]$ zaś α funkcją rosnącą w tym przedziale. Podobnie, jak w §5, będziemy rozważać podziały odcinka $[a, b]$ i odpowiadające im sumy górne i dolne z tym, że długość Δx_j przedziału $[x_{j-1}, x_j]$ zastąpimy przez przyrost funkcji α na tym przedziale. Określając podział Π nierównościami

$$(1) \quad \Pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

i przyjmując

$$m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f, \quad M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f, \quad \Delta\alpha_j = \alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})$$

wprowadzimy *sumę górną Darboux - Stieltjesa*¹

$$G(\Pi, f, \alpha) = \sum_{j=1}^k M_j \Delta\alpha_j$$

i *sumę dolną Darboux - Stieltjesa*

$$D(\Pi, f, \alpha) = \sum_{j=1}^k m_j \Delta\alpha_j.$$

W rachunkach podanych w §5 istotną rolę odgrywała nierówność $\Delta x_j \geq 0$. Ponieważ α jest z założenia funkcją rosnącą, mamy również $\Delta\alpha_j \geq 0$ i dlatego większość rozumowań przeprowadzonych w §5 w przypadku funkcji $\alpha(x) = x$ przenosi się bez zmian. W szczególności zbiór sum górnych odpowiadających wszystkim podziałom Π odcinka $[a, b]$ jest zbiorem ograniczonym i tą samą własność ma zbiór sum dolnych, każdy z nich ma zatem w zbiorze liczb rzeczywistych kres górny i kres dolny (por. rozdz. I §2). Przyjmiemy jako definicję

$$\overline{\int_a^b f d\alpha} = \inf_{\Pi} G(\Pi, f, \alpha),$$
$$\underline{\int_a^b f d\alpha} = \sup_{\Pi} D(\Pi, f, \alpha).$$

Wyrażenia te nazywamy odpowiednio *całką górną Darboux - Stieltjesa* i *całką dolną Darboux - Stieltjesa* funkcji f względem funkcji α w przedziale $[a, b]$. Odpowiednik twierdzenia 3 §5 można sformułować następująco:

¹Thomas Jean Stieltjes (1856 - 1894), matematyk holenderski, profesor uniwersytetu w Leydzie, następnie w Tuluzie. Zajmował się analizą matematyczną, w szczególności uogólnieniem pojęcia całki.

Twierdzenie 1. *Jeżeli α jest funkcją rosnącą ciągłą zaś f funkcją ograniczoną w przedziale $[a, b]$, to*

$$\lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} G(\Pi, f, \alpha) = \overline{\int_a^b} f d\alpha,$$

$$\lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} D(\Pi, f, \alpha) = \underline{\int_a^b} f d\alpha.$$

DOWÓD przebiega podobnie jak w przypadku $\alpha(x) = x$ rozważanym w §5 (twierdzenie 3), jedyna zmiana polega na wykorzystaniu jednostajnej ciągłości funkcji α w przedziale $[a, b]$. Wynika z niej, że do dowolnie danej liczby $\eta > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by z warunku $d(\Pi) < \delta$ wynikała nierówność

$$\max_j \Delta\alpha_j < \eta.$$

Mnożąc tę nierówność przez $M_j \geq 0$ dostajemy

$$M_j \Delta\alpha_j \leq M_j \eta,$$

zatem

$$M_j \Delta\alpha_j \leq M \eta,$$

co po zsumowaniu względem $j \in A$ daje odpowiednik nierówności (15) §5 w postaci

$$\sum_{j \in A} M_j \Delta\alpha_j \leq M \bar{k} \eta.$$

Wystarczy teraz przyjąć

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2\bar{k}M},$$

dalsze szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi. □

2. Całka Riemanna - Stieltjesa względem funkcji rosnącej. W dalszym ciągu zakładamy, że f jest funkcją ograniczoną w przedziale $[a, b]$, zaś α funkcją rosnącą w tym przedziale. Jeżeli całki górna i dolna Darboux - Stieltjesa są równe, to mówimy, że funkcja f jest całkowalna względem funkcji α na przedziale $[a, b]$. Wspólną wartość całki górnej i całki dolnej nazywamy *całką Riemanna - Stieltjesa* (lub krócej *całką Stieltjesa*) *funkcji f względem funkcji α w przedziale $[a, b]$* . Dla całki Riemanna - Stieltjesa przyjmujemy oznaczenie

$$\int_a^b f d\alpha \quad \text{lub} \quad \int_a^b f(x) d\alpha(x),$$

zatem

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) d\alpha(x) = \underline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha$$

dla dowolnej funkcji f całkowalnej względem α na przedziale $[a, b]$.

Kryterium całkowalności podane w §5 dla całki Riemanna przenosi się bez zmian na przypadek całki Riemanna - Stieltjesa. Mamy więc

Twierdzenie 2. *Funkcja f jest całkowalna względem funkcji rosnącej α na przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy gdy do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać podział Π_ε odcinka $[a, b]$ tak, by zachodziła nierówność*

$$(2) \quad G(\Pi_\varepsilon, f, \alpha) - D(\Pi_\varepsilon, f, \alpha) < \varepsilon.$$

DOWÓD przebiega tak samo jak dowód twierdzenia 4 §5. □

Stosując podane kryterium otrzymujemy łatwo

Twierdzenie 3. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to jest całkowalna na tym przedziale względem dowolnej rosnącej funkcji α i przy tym*

$$(3) \quad \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} G(\Pi, f, \alpha) = \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} D(\Pi, f, \alpha) = \int_a^b f d\alpha.$$

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że jeżeli $\alpha(a) = \alpha(b)$, to funkcja α jest stała i wówczas każda funkcja f jest całkowalna względem α . Mamy bowiem dla dowolnego podziału Π odcinka $[a, b]$

$$G(\Pi, f, \alpha) = D(\Pi, f, \alpha) = 0$$

i stąd

$$\int_a^b f d\alpha = \overline{\int_a^b f d\alpha} = 0.$$

Możemy więc przeprowadzić dowód zakładając, że $\alpha(a) < \alpha(b)$.

Całkowalność funkcji f otrzymujemy rozumując tak samo, jak w dowodzie twierdzenia 5 §5, należy tylko przyjąć

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}.$$

Stwierdzamy wówczas, że

$$(4) \quad G(\Pi, f, \alpha) - D(\Pi, f, \alpha) < \varepsilon,$$

o ile

$$(5) \quad d(\Pi) < \delta,$$

gdzie $\delta > 0$ jest liczbą dobraną do η , a więc pośrednio do ε . Zatem (2) zachodzi dla każdego podziału Π , którego średnica spełnia nierówność (5). Ponieważ z definicji całki

$$D(\Pi, f, \alpha) \leq \int_a^b f d\alpha \leq G(\Pi, f, \alpha)$$

więc z (4) wynika, że

$$G(\Pi, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha < \varepsilon$$

oraz

$$\int_a^b f d\alpha - D(\Pi, f, \alpha) < \varepsilon$$

dla każdego podziału Π spełniającego warunek (5) - a to oznacza, że zachodzi (3). □

Stosując kryterium podane w twierdzeniu 2 udowodnimy jeszcze

Twierdzenie 4. *Jeżeli α jest funkcją rosnącą ciągłą w przedziale $[a, b]$, to każda funkcja monotoniczna jest całkowalna względem α na tym przedziale.*

DOWÓD. Możemy przeprowadzić dowód zakładając, że $\alpha(a) < \alpha(b)$ (por. początek dowodu twierdzenia 3). Przy tym założeniu dowód przebiega podobnie, jak dla całki Riemanna (§5 twierdzenie 7), należy tylko zamiast odcinka $[a, b]$ podzielić na k równych części odcinek $[\alpha(a), \alpha(b)]$. Punkty podziału Π określonego nierównościami (1) otrzymujemy z warunków

$$(6) \quad \alpha(x_j) = \alpha(a) + jd_k \quad \text{gdzie} \quad d_k = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{k}.$$

Ponieważ dla ustalonego j

$$\alpha(x_{j-1}) < \alpha(a) + jd_k < \alpha(b),$$

z założenia ciągłości funkcji α wynika, że ma ona własność Darboux (twierdzenie 13 rozdz. III §3), istnieje zatem punkt $x_j \in (x_{j-1}, b)$ spełniający (6). Dla tak dobranego podziału Π mamy $\Delta\alpha_j = d_k$ ($j = 1, 2, \dots, k$), zatem przy założeniu monotoniczności f

$$G(\Pi, f, \alpha) - D(\Pi, f, \alpha) = d_k |f(b) - f(a)| < \varepsilon$$

jeżeli oberzemy k dostatecznie duże. □

Rozumując tak samo jak w dowodzie twierdzenia 8 §5 otrzymujemy w oparciu o kryterium całkowalności podane w twierdzeniu 2

Twierdzenie 5. *Jeżeli funkcje f_1, f_2 są całkowalne na przedziale $[a, b]$ względem funkcji rosnącej α i c jest dowolną stałą, to funkcja*

$$(i) \quad f_1 + f_2, \quad (ii) \quad cf_2$$

również jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ względem funkcji α . □

3. Całka Riemanna - Stieltjesa względem funkcji o wahanu skończonym.
Niech g będzie funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$ i niech

$$(7) \quad g(x) = \alpha(x) - \beta(x)$$

będzie jej rozkładem kanonicznym Jordana (por. twierdzenie 6 §6). Mówimy, że funkcja ograniczona f jest całkowalna względem funkcji g na przedziale $[a, b]$, jeżeli istnieją obie całki

$$(8) \quad \int_a^b f d\alpha, \quad \int_a^b f d\beta.$$

Różnicę

$$(9) \quad \int_a^b f dg = \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\beta$$

nazywamy wówczas *całką Riemanna - Stieltjesa* (lub krócej: *całką Stieltjesa*) *funkcji f względem funkcji g w przedziale $[a, b]$* . W szczególności możemy rozważać całkę (9) funkcji f o skończonym wahanu w przedziale $[a, b]$, gdyż zgodnie z twierdzeniem 8 §6 funkcja taka jest ograniczona.

Uwaga. Łatwo wykazać, że w przypadku funkcji g rosnącej (a więc mającej skończone wahanie - por. twierdzenie 1 §6) podana definicja całki pokrywa się z poprzednio rozważaną w punkcie 2. Istotnie, dla funkcji g rosnącej

$$W_a^x(g) = g(x) - g(a),$$

zatem w rozkładzie (7) mamy (por. (21), (22) §6)

$$\alpha(x) = g(x) - \frac{1}{2}g(a), \quad \beta(x) = -\frac{1}{2}g(a).$$

Wobec tego dla dowolnego podziału Π odcinka $[a, b]$ określonego nierównościami (1)

$$\Delta\alpha_j = \Delta g_j, \quad \Delta\beta_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

a więc

$$G(\Pi, f, \alpha) = G(\Pi, f, g), \quad D(\Pi, f, \alpha) = D(\Pi, f, g)$$

oraz

$$G(\Pi, f, \beta) = D(\Pi, f, \beta) = 0.$$

Wynika stąd, że druga z całek (8) istnieje zawsze (i jest równa zeru), natomiast pierwsza z tych całek istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest całkowalna (w sensie podanym w punkcie 2) względem g i przy tym

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f d\alpha.$$

Jeżeli w szczególności $g(x) = x$, to całka (9) jest całką Riemanna omawianą w §5.

Niech Π będzie podziałem odcinka $[a, b]$ określonym nierównościami (1) i niech $\xi(\Pi) = \{\xi_j\}$ oznacza układ punktów pośrednich tzn. spełniających warunek

$$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j] \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Podobnie, jak dla całki Riemanna, wprowadzimy *sumę przybliżoną całki* (9)

$$S(f, g, \Pi, \xi(\Pi)) = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta g_j,$$

gdzie

$$\Delta g_j = \Delta\alpha_j - \Delta\beta_j = g(x_j) - g(x_{j-1}).$$

Udowodnimy

Twierdzenie 6. Załóżmy, że spełniony jest jeden z warunków

(i) funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, funkcja g ma skończone wahanie na tym przedziale

lub

(ii) f, g są funkcjami o wahanii skończonym w przedziale $[a, b]$ i funkcja g jest ciągła. Wówczas funkcja f jest całkowalna względem funkcji g na przedziale $[a, b]$.

Jeżeli $\{\Pi_n\}$ jest dowolnym ciągiem normalnym podziałów odcinka $[a, b]$ zaś $\xi(\Pi_n)$ dowolnym układem punktów pośrednich, to oznaczając

$$S_n = S(f, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n))$$

mamy

$$(10) \quad \int_a^b f dg = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Uwaga. Wzór (10) zachodzi w szczególności dla funkcji $g(x) = x$, wówczas całka po lewej stronie (10) jest całką Riemanna (por. równość (44) §5).

DOWÓD. Załóżmy, że spełniony jest warunek (i), wówczas istnienie całek (8) wynika z twierdzenia 3, zatem całka (9) istnieje na mocy definicji. Dla każdego podziału Π i dowolnie obranego układu punktów pośrednich $\xi(\Pi)$ zachodzą nierówności

$$(11) \quad D(\Pi, f, \alpha) \leq \int_a^b f d\alpha \leq G(\Pi, f, \alpha)$$

oraz

$$(12) \quad D(\Pi, f, \alpha) \leq S(f, \alpha, \Pi, \xi(\Pi)) \leq G(\Pi, f, \alpha).$$

Jak wykazaliśmy w dowodzie twierdzenia 3, do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta_1 > 0$ tak, że dla każdego podziału Π spełniającego warunek

$$d(\Pi) < \delta_1$$

zachodzi nierówność

$$G(\Pi, f, \alpha) - D(\Pi, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$$

z której wobec (11), (12) wynika

$$(13) \quad -\frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f d\alpha - S(f, \alpha, \Pi, \xi(\Pi)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić zastępując funkcję α przez funkcję β , co daje

$$(14) \quad -\frac{\varepsilon}{2} < S(f, \beta, \Pi, \xi(\Pi)) - \int_a^b f d\beta < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla każdego podziału Π spełniającego warunek

$$d(\Pi) < \delta_2,$$

gdzie liczba $\delta_2 > 0$ również jest dobrana do ε . Nierówności (13), (14) możemy dodać stronami zakładając, że w obu sumach przybliżonych mamy ten sam układ punktów pośrednich $\xi(\Pi)$. Otrzymujemy

$$(15) \quad -\varepsilon < \int_a^b f \, dg - S(f, g, \Pi, \xi(\Pi)) < \varepsilon,$$

o ile

$$(16) \quad d(\Pi) < \delta = \min(\delta_1, \delta_2).$$

Ponieważ z założenia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\Pi_n) = 0,$$

do liczby δ można dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$d(\Pi_n) < \delta.$$

Wobec tego na mocy (15), (16) mamy

$$\left| \int_a^b f \, dg - S_n \right| < \varepsilon$$

dla $n > N$, przy czym liczba N jest dobrana do ε , co kończy dowód (10).

Przechodząc do dowodu drugiej części twierdzenia założymy, że spełniony jest warunek (ii). Zgodnie z twierdzeniem 6 §6 mamy rozkład kanoniczny Jordana

$$f(x) = p(x) - q(x), \quad g(x) = \alpha(x) - \beta(x),$$

przy czym funkcje α, β są ciągłe w przedziale $[a, b]$. Z twierdzenia 4 wynika, że każda z funkcji p, q jest całkowalna względem funkcji α i względem funkcji β , zaś wobec twierdzenia 5 tą samą własność ma funkcja f jako różnica funkcji całkowalnych. Istnieją więc całki (8), a więc i całka (9) na mocy definicji. Z twierdzenia 1 wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta_1 > 0$ tak, by zachodziły nierówności

$$G(\Pi, f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_a^b f \, d\alpha - D(\Pi, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2},$$

jeżeli

$$(17) \quad d(\Pi) < \delta_1.$$

Wobec tego opierając się na (12) dostajemy

$$\int_a^b f \, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < S(f, \alpha, \Pi, \xi(\Pi)) < \int_a^b f \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

czyli

$$(18) \quad -\frac{\varepsilon}{2} < S(f, \alpha, \Pi, \xi(\Pi)) - \int_a^b f \, d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla wszystkich podziałów Π spełniających warunek (17) i dowolnie obranych punktów pośrednich $\xi(\Pi)$. Podobnie okazujemy, że do ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta_2 > 0$ tak, by z warunku

$$d(\Pi) < \delta_2$$

wynikała nierówność

$$(19) \quad -\frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f \, d\beta - S(f, \beta, \Pi, \xi(\Pi)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zakładając, że punkty pośrednie w sumach przybliżonych w (18), (19) są te same, otrzymujemy po dodaniu nierówności

$$-\varepsilon < S(f, g, \Pi, \xi(\Pi)) - \int_a^b f \, dg < \varepsilon$$

dla podziałów Π spełniających warunek

$$d(\Pi) < \delta = \min(\delta_1, \delta_2).$$

Stąd, podobnie jak w dowodzie pierwszej części twierdzenia, wynika

$$\left| \int_a^b f \, dg - S_n \right| < \varepsilon$$

dla $n > N$, przy czym liczba N jest dobrana do ε - co kończy dowód (10). □

Przykład 1. Obliczymy całkę Riemanna - Stieltjesa

$$\int_0^1 x \, dx^2$$

jako granicę ciągu sum przybliżonych. W podanym przykładzie

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^2$$

- wobec tego całka istnieje, gdyż funkcja f jest ciągła a funkcja g jest klasy C^1 w przedziale $[0, 1]$, zatem ma skończone wahanie na tym przedziale (por. Wniosek 1 §6). Podział Π_n określimy nierównościami

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n}{n} = 1,$$

zaś jako punkt pośredni ξ_j przyjmujemy prawy koniec przedziału $[x_{j-1}, x_j]$. Mamy zatem

$$\xi_j = x_j = \frac{j}{n} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Ponieważ

$$d(\Pi_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

ciąg $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów przedziału $[0, 1]$ i możemy stosować wzór (10). Mamy

$$\Delta g_j = x_j^2 - x_{j-1}^2 = \frac{2j-1}{n^2}$$

i wobec tego

$$S_n = \sum_{j=1}^n \frac{j(2j-1)}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j(2j-1).$$

Granice ciągu $\{S_n\}$ obliczymy posługując się twierdzeniem Stolza (twierdzenie 11 rozdz. II §2). Oznaczając

$$x_n = \sum_{j=1}^n j(2j-1), \quad y_n = n^3$$

dostajemy na mocy tego twierdzenia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n-1)}{n^3 - (n-1)^3}$$

co po prostych przekształceniach w liczniku i mianowniku daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{2}{3}.$$

Zatem

$$\int_0^1 x \, dx^2 = \frac{2}{3}.$$

4. Własności rachunkowe całki Riemanna - Stieltjesa. Podane dalej twierdzenia wynikają łatwo z przejścia granicznego (10).

Twierdzenie 7 (liniowość całki). *Jeżeli funkcje f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 określone na przedziale $[a, b]$ spełniają założenia (i) lub (ii) twierdzenia 6, to dla dowolnych stałych c_1, c_2*

$$(20) \quad \int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg = c_1 \int_a^b f_1 dg + c_2 \int_a^b f_2 dg$$

oraz

$$(21) \quad \int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int_a^b f dg_1 + c_2 \int_a^b f dg_2.$$

DOWÓD. Zgodnie z twierdzeniem 9 §6 kombinacja liniowa funkcji o wahanu skończonym również ma skończone wahanie. Wobec tego wszystkie całki we wzorach (20), (21) istnieją i są granicami odpowiednich sum przybliżonych odpowiadających ciągowi normalnemu podziałów $\{\Pi_n\}$ odcinka $[a, b]$. Ponadto dla dowolnego podziału Π_n i układu punktów pośrednich $\xi(\Pi_n)$

$$S(c_1 f_1 + c_2, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = c_1 S(f_1, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) + c_2 S(f_2, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n))$$

oraz

$$S(f, c_1 g_1 + c_2 g_2, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = c_1 S(f, g_1, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) + c_2 S(f, g_2, \Pi_n, \xi(\Pi_n)).$$

Przejście do granicy przy $n \rightarrow \infty$ daje (20), (21). $\square$

Twierdzenie 8 (o podziale przedziału całkowania). *Jeżeli funkcje f, g spełniają jedno z założeń (i) lub (ii) twierdzenia 6 oraz $a < c < b$, to*

$$(22) \quad \int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$$

DOWÓD. Zgodnie z wnioskiem 2 §6 funkcja o skończonym wahanu w przedziale $[a, b]$ ma skończone wahanie na każdym z przedziałów $[a, c]$, $[c, b]$ - zatem obie całki po prawej stronie (22) istnieją. Dowód (22) przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 3 §1 w oparciu o równość (10). $\square$

Twierdzenie 9 (o całkowaniu przez części). *Założmy, że funkcje f, g mają skończone wahanie na przedziale $[a, b]$ i że jedna z nich jest ciągła. Wówczas*

$$(23) \quad \int_a^b f dg = [fg]_a^b - \int_a^b g df.$$

DOWÓD. Zgodnie z twierdzeniem 6 obie całki istnieją. Dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1) otrzymujemy po redukcji

$$(24) \quad \sum_{j=1}^k f(x_j) \Delta g_j + \sum_{j=1}^k g(x_{j-1}) \Delta f_j = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Pierwsza suma jest sumą przybliżoną całki po lewej stronie (23), w której $\xi_j = x_j$ natomiast druga suma jest sumą przybliżoną całki po prawej stronie (23), w której przyjęto $\xi_j = x_{j-1}$. Jeżeli $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów odcinka $[a, b]$, to stosując (24) do podziału Π_n przy dowolnie ustalonym n i przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$ dostajemy w oparciu o (10)

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = [fg]_a^b$$

czyli (23). □

Twierdzenie 10 (o całkowaniu przez podstawienie). *Załóżmy, że φ jest funkcją ciągłą ściśle rosnącą w przedziale $[a, b]$ a funkcja f*

(i) jest ciągła

lub

(ii) ma skończone wahanie na przedziale $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Wówczas

$$(25) \quad \int_a^b f(\varphi(x)) d\varphi(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy.$$

DOWÓD. W przypadku (i) superpozycja $f(\varphi(x))$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$ zaś w przypadku (ii) funkcja f ma rozkład Jordana

$$f(x) = p(x) - q(x),$$

gdzie p, q są funkcjami rosnącymi, zatem superpozycja

$$f(\varphi(x)) = p(\varphi(x)) - q(\varphi(x))$$

ma wahanie skończone jako różnica funkcji monotonicznych (por. twierdzenia 1, 9 §6). Wobec tego do całek występujących w równości (25) stosuje się twierdzenie 6. Dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1) i dowolnego układu punktów pośrednich $\xi(\Pi)$ przyjmijmy

$$(26) \quad y_j = \varphi(x_j) \quad (j = 0, 1, \dots, k)$$

oraz

$$(27) \quad \eta_j = \varphi(\xi_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

wówczas

$$\Pi^* : \varphi(a) = y_0 < y_1 < \dots < y_k = \varphi(b)$$

jest podziałem odcinka $[\varphi(a), \varphi(b)]$ zaś punkty η_j ($j = 1, \dots, k$) są punktami pośrednimi odpowiadającymi temu podziałowi, przy tym

$$f(\varphi(\xi_j))\Delta\varphi_j = f(\eta_j)\Delta y_j$$

a stąd

$$(28) \quad S(f(\varphi), \varphi, \Pi, \xi(\Pi)) = S(f, \Pi^*, \eta(\Pi^*)).$$

Z jednostajnej ciągłości funkcji φ w przedziale $[a, b]$ (por. twierdzenie 9 rozdz. III §3) wynika, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, że z warunku

$$d(\Pi) < \delta$$

wynika

$$d(\Pi^*) < \varepsilon.$$

Niech teraz $\{\Pi_n\}$ będzie ciągiem normalnym podziałów odcinka $[a, b]$, wówczas można do liczby δ dobrać N tak, by dla $n > N$ spełniona była nierówność

$$d(\Pi_n) < \delta.$$

Z nierówności tej wynika, że

$$d(\Pi_n^*) < \varepsilon,$$

jeżeli przy ustalonym n podział Π_n^* jest określony zgodnie z (26). Wobec tego $\{\Pi_n^*\}$ jest ciągiem normalnym podziałów odcinka $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Z równości (28) wynika, że obierając przy ustalonym n punkty pośrednie zgodnie z (27) mamy

$$S(f(\varphi), \varphi, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = S(f, \Pi_n^*, \eta(\Pi_n^*)).$$

Po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$ w oparciu o (10) otrzymujemy (25). $\square$

5. Sprowadzanie całki Riemanna - Stieltjesa do całki Riemanna. Obliczanie całki Riemanna - Stieltjesa przy pomocy przejścia do granicy (10) (jak to zrobiliśmy w Przykładzie 1) byłoby bardzo niewygodne a nawet w większości przypadków niewykonalne. Mamy jednak twierdzenia pozwalające sprowadzić całkę Riemanna - Stieltjesa do całki Riemanna. Obliczanie tej ostatniej sprowadza się, jak to wynika z zasadniczego twierdzenia rachunku całkowego (twierdzenie 5 §1 i twierdzenia 18 §5), do znalezienia funkcji pierwotnej. Metody rachunkowe pozwalające wyznaczyć efektywnie funkcję pierwotną (czyli całkę nieoznaczoną) danej funkcji ciągłej zostały omówione w §2.

Twierdzenie 11. *Założmy, że funkcja f*

(i) jest ciągła

lub

(ii) ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$, zaś funkcja g jest klasy C^1 w tym przedziale.

Wówczas

$$(29) \quad \int_a^b f dg = \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

DOWÓD. Z twierdzenia 2 §6 (por. Wniosek 1 §6) wynika, że g jest funkcją o wahanu skończonym, oprócz tego jest ciągła z założenia. Wobec tego Twierdzenie 6 zapewnia istnienie całki po lewej stronie i możliwość przejścia do granicy zgodnie ze wzorem (10). Po prawej stronie mamy całkę Riemanna, przy czym w przypadku (i) funkcja podcałkowa jest ciągła a więc całkowalna (twierdzenie 5 §5). W przypadku (ii) funkcja f jest całkowalna jako różnica funkcji rosnących (por. twierdzenie 6 §6 oraz twierdzenia 7, 8, §5), funkcja g' jest całkowalna jako funkcja ciągła, zaś iloczyn funkcji całkowalnych jest całkowalny (twierdzenie 10 §5). Zatem w obu przypadkach całka po prawej stronie istnieje i jest granicą ciągu sum przybliżonych zgodnie z twierdzeniem 13 §5. Dowód równości (29) oprzemy na wzorze (10) i wzorze (44) §5. Dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1) i dowolnego $j = 1, 2, \dots, k$ mamy zgodnie z twierdzeniem o wartości średniej rachunku różniczkowego

$$(30) \quad \Delta g_j = g(x_j) - g(x_{j-1}) = g'(\bar{x}_j) \Delta x_j,$$

gdzie $\bar{x}_j \in (x_{j-1}, x_j)$. Przyjmując

$$(31) \quad \xi_j = \bar{x}_j$$

w sumie przybliżonej całki po lewej stronie mamy zatem

$$(32) \quad \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta g_j = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) g'(\xi_j) \Delta x_j.$$

Niech teraz $\{\Pi_n\}$ będzie ciągiem normalnym podziałów odcinka $[a, b]$. Jeżeli przy ustalonym n obierzemy punkty pośrednie zgodnie z warunkiem (31), to z (32) wynika, że dla każdego n zachodzi równość

$$S(f, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = S(fg', \Pi_n, \xi(\Pi_n))$$

która po przejściu do granicy daje (29). □

Uwaga. Jeżeli w twierdzeniu 10 funkcja f jest ciągła a funkcja φ jest klasy C^1 w przedziale $[a, b]$, to po zastosowaniu twierdzenia 11 równość (25) przyjmuje postać

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy.$$

Jest to znany wzór na całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych (por. (2) §3).

Przykład 2. Obliczmy całkę Riemanna - Stieltjesa

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d \sin x$$

stosując twierdzenie 10. Funkcja

$$\varphi(x) = \sin x$$

jest ściśle rosnąca w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$, zaś funkcja $f(y) = y^2$ jest ciągła. Wobec tego

$$K = \int_0^1 y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Całkę tą można również sprowadzić do całki Riemanna opierając się na twierdzeniu 11. Mamy wówczas

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$$

czyli

$$K = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx.$$

Całka po prawej stronie była rozważana w §3 punkt 2. Przyjmując $n = 1$ we wzorze (8) §3 dostajemy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3},$$

zatem

$$K = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

podobnie jak poprzednio.

Przykład 3. W całce Riemanna Stieltjesa

$$A = \int_0^1 e^x d x^2$$

mamy

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = x^2,$$

zatem założenia twierdzenia 11 są spełnione i możemy stosować wzór (29). Wobec tego

$$A = 2 \int_0^1 x e^x dx.$$

Otrzymaliśmy całkę oznaczoną z funkcji ciągłej, do której możemy zastosować całkowanie przez części (por. twierdzenie 1 §3). Zatem

$$\frac{1}{2}A = \int_0^1 x(e^x)' dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx,$$

skąd

$$A = 2 \left[x e^x - e^x \right]_0^1 = 2.$$

Przykład 4. Obliczmy całkę Riemanna - Stieltjesa

$$B = \int_{-1}^3 x^2 d g(x),$$

gdzie

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = -1, \\ 1 & \text{dla } -1 < x < 2, \\ -1 & \text{dla } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

stosując całkowanie przez części. Funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła i ma ograniczoną pochodną w przedziale $[-1, 3]$ a funkcja g jest kawałkami stała, zatem z twierdzeń 2, 3 §6 wynika, że obie funkcje mają skończone wahanie. Wobec tego spełnione są założenia twierdzenia 9 i możemy stosować wzór (23), który daje

$$B = \left[x^2 g(x) \right]_{-1}^3 - \int_{-1}^3 g(x) d f(x).$$

Aby obliczyć całkę po prawej stronie zastosujemy twierdzenie 11 a następnie podzielimy przedział całkowania (twierdzenie 8). Otrzymujemy

$$\int_{-1}^3 g(x) d f(x) = 2 \int_{-1}^3 x g(x) dx = 2(B_1 + B_2),$$

gdzie

$$B_1 = \int_{-1}^2 x g(x) dx, \quad B_2 = \int_2^3 x g(x) dx.$$

W całce B_1 możemy funkcję $g(x)$ zastąpić przez funkcję

$$g_1(x) = 1 \quad \text{dla } x \in [-1, 2]$$

nie zmieniając wartości całki (por. twierdzenie 20 §5), zatem

$$B_1 = \int_{-1}^2 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^2 = \frac{3}{2},$$

oprócz tego

$$B_2 = - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_2^3 = -\frac{5}{2}$$

i stąd

$$\int_{-1}^3 g(x) d f(x) = -2.$$

Ponieważ

$$\left[x^2 g(x) \right]_{-1}^3 = -9,$$

otrzymujemy ostatecznie

$$B = -9 + 2 = -7.$$

Twierdzenie 12. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą a g funkcją kawałkami gładką w przedziale $[a, b]$. Drugie założenie oznacza, że istnieje taki skończony ciąg liczb c_j ($j = 0, 1, \dots, p$) spełniających nierówność

$$a = c_0 < c_1 < \dots < c_p = b$$

i taki układ funkcji h_j ($j = 1, \dots, p$), że

$$\begin{aligned} 1^0 \quad & f(x) = h_j(x) \quad \text{dla} \quad c_{j-1} < x < c_j, \\ 2^0 \quad & \text{funkcja } h_j \text{ jest klasy } C^1 \text{ w przedziale domkniętym } [c_{j-1}, c_j]. \end{aligned}$$

Wówczas

$$(33) \quad \int_a^b f \, dg = \int_a^b f(x)g'(x) \, dx + \sum_{j=0}^p f(c_j)\sigma_g(c_j),$$

gdzie

$$(34) \quad \begin{aligned} \sigma_g(a) &= \lim_{x \rightarrow a+} g(x) - g(a), \\ \sigma_g(c_j) &= \lim_{x \rightarrow c_j+} g(x) - \lim_{x \rightarrow c_j-} g(x) \quad (j = 1, \dots, p-1), \\ \sigma_g(b) &= g(b) - \lim_{x \rightarrow b-} g(x). \end{aligned}$$

Uwaga 1. Liczbę $\sigma_g(c_j)$ nazywamy *skokiem funkcji g w punkcie c_j* ($j = 0, 1, \dots, p$). Możemy ją łatwo obliczyć znając funkcje h_j , mianowicie

$$\begin{aligned} \sigma_g(a) &= h_1(a) - g(a), \\ \sigma_g(c_j) &= h_{j+1}(c_j) - h_j(c_j) \quad (j = 1, \dots, p-1), \\ \sigma_g(b) &= g(b) - h_p(b). \end{aligned}$$

Uwaga 2. Całka po prawej stronie (33) jest całką Riemanna w której funkcja podcałkowa jest określona i ciągła poza skończoną ilością punktów c_j . Zgodnie z twierdzeniami 6 i 20 §5 całka ta istnieje i nie zależy od tego, jak określimy wartość funkcji g' w punktach skoku c_j .

DOWÓD. Dla uproszczenia dowodu założymy, że funkcja g ma tylko jeden skok w punkcie $c \in (a, b)$. Zatem

$$g(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{dla } a \leq x < c, \\ h_2(x) & \text{dla } c < x \leq b \end{cases}$$

przy czym h_1 jest klasy C^1 w przedziale $[a, c]$, zaś h_2 - klasy C^1 w przedziale $[c, b]$. Niech Π będzie podziałem określonym nierównościami (1) i niech $c \in \Pi$. Wówczas dla pewnego r

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_r = c < x_{r+1} < \dots < x_k = b,$$

przy czym punkty

$$x_0, x_1, \dots, x_r$$

wyznaczają podział odcinka $[a, c]$ a punkty

$$x_r, x_{r+1}, \dots, x_k$$

- podział odcinka $[c, b]$. Zauważmy, że

$$\Delta g_r = g(c) - g(x_{r-1}) = g(c) - h_1(c) + h_1(c) - g(x_{r-1})$$

i podobnie

$$\Delta g_{r+1} = g(x_{r+1}) - g(c) = h_2(c) - g(c) + h_2(x_{r+1}) - h_2(c).$$

Obierając punkty pośrednie w sumie przybliżonej odpowiadającej podziałowi Π w taki sposób, by

$$(35) \quad \xi_r = \xi_{r+1} = x_r = c,$$

mamy zatem

$$(36) \quad \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta g_j = \sum_{j=1}^r f(\xi_j) \Delta h_{1,j} + \sum_{j=r+1}^k f(\xi_j) \Delta h_{2,j} + f(c) (h_2(c) - h_1(c)).$$

Załóżmy teraz, że $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów odcinka $[a, b]$, z których każdy zawiera punkt c , obierzmy przy ustalonym n punkty pośrednie tak, by spełniony był warunek (35) i przekształćmy sumę przybliżoną zgodnie z (36). Z twierdzeń 2, 3 §6 wynika, że funkcje g, h_1, h_2 mają skończone wahanie odpowiednio w przedziałach $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ i wobec tego całkując funkcję ciągłą f względem tych funkcji możemy zastosować twierdzenie 6. Przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$ dostajemy w wyniku (10)

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dh_1 + \int_c^b f dh_2 + f(c) \sigma_g(c).$$

Całki po prawej stronie możemy przekształcić stosując twierdzenie 11, co daje

$$(37) \quad \int_a^b f dg = \int_a^c f(x) h'_1(x) dx + \int_c^b f(x) h'_2(x) dx + f(c) \sigma_g(c).$$

Zauważmy, że zgodnie z twierdzeniem 15 §5 suma całek po prawej stronie jest równa całce

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx$$

(por. Uwaga 2), zatem (37) można zapisać w postaci

$$(38) \quad \int_a^b f dg = \int_a^b f(x) g'(x) dx + f(c) \sigma_g(c).$$

Przeprowadzenie dowodu w przypadku dowolnego skończonego układu punktów skoku funkcji g pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. $\square$

Z twierdzenia 12 wynika

Wniosek 1. *Jeżeli f jest funkcją ciągłą a g funkcją kawałkami stałą w przedziale $[a, b]$, to przy oznaczeniach twierdzenia 12*

$$(39) \quad \int_a^b f \, dg = \sum_{j=0}^p f(c_j) \sigma_g(c_j).$$

DOWÓD. Ponieważ funkcje h_j są stałe, pochodna $g'(x)$ jest równa zero za wyjątkiem punktów c_j , w których nie jest określona i stąd całka po prawej stronie (38) jest równa zero. $\square$

Przykład 5. Całkę rozważaną w przykładzie 4 możemy obliczyć inaczej stosując wzór (39). W przedziale $[-1, 3]$ funkcja g jest kawałkami stała, ma punkty nieciągłości

$$c_0 = -1, \quad c_1 = 2$$

i skoki w tych punktach

$$\sigma_g(c_0) = 1, \quad \sigma_g(c_1) = -2.$$

Wobec tego

$$B = \int_{-1}^3 x^2 \, dg(x) = c_0^2 - 2c_1^2 = -7.$$

Przykład 6. Obliczymy całkę Riemanna - Stieltjesa

$$(40) \quad C = \int_{-2}^2 x \, dg(x),$$

gdzie

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } -2 \leq x \leq -1, \\ 2 & \text{dla } -1 < x < 0, \\ x^2 + 3 & \text{dla } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Z twierdzeń 2, 3 §6 wynika, że obie funkcje $f(x) = x$ i $g(x)$ mają skończone wahanie, ponadto funkcja f jest ciągła - można zatem zastosować twierdzenie 9 o całkowaniu przez części. Otrzymujemy

$$C = \left[x g(x) \right]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 g(x) \, df(x).$$

Ponieważ funkcja f jest klasy C^1 , do całki po prawej stronie można zastosować twierdzenie 11, co daje

$$(41) \quad C = \left[x g(x) \right]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 g(x) \, dx.$$

Otrzymaną całkę obliczymy dzieląc przedział całkowania. Mamy

$$(42) \quad \int_{-2}^2 g(x) dx = \int_{-2}^{-1} (x+2) dx + \int_{-1}^0 2 dx + \int_0^2 (x^2+3) dx$$

(w środkowej całce po prawej stronie można przyjąć, że funkcja podcałkowa jest $= 2$ w całym przedziale $[-1, 0]$ - por. twierdzenie 20 §5). Prosty rachunek daje

$$\begin{aligned} [x g(x)]_{-2}^2 &= 14, & \int_{-2}^{-1} (x+2) dx &= \frac{1}{2}, \\ \int_{-1}^0 2 dx &= 2, & \int_0^2 (x^2+3) dx &= \frac{26}{3}, \end{aligned}$$

wobec tego z (41), (42) otrzymujemy

$$C = \frac{17}{6}.$$

Całkę (40) można również obliczyć stosując twierdzenie 12. Funkcja $f(x) = x$ jest ciągła, natomiast g jest funkcją kawałkami gładką w przedziale $[-2, 2]$ mającą skok w punktach

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 0,$$

przy tym

$$\sigma_g(c_1) = \sigma_g(c_2) = 1.$$

Zgodnie ze wzorem (33)

$$C = \int_{-2}^2 x g'(x) dx - 1$$

przy czym pochodna $g'(x)$ nie jest określona w punktach skoku, a dla pozostałych x

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -2 \leq x < -1, \\ 0 & \text{dla } -1 < x < 0, \\ 2x & \text{dla } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Wobec tego

$$\int_{-2}^2 x g'(x) dx = \int_{-2}^{-1} x dx + 2 \int_0^2 x^2 dx = \frac{23}{6},$$

skąd po prostych rachunkach otrzymujemy poprzednio otrzymany wynik

$$C = \frac{17}{6}.$$

6. Monotoniczność całki Riemanna - Stieltjesa. W przypadku całki Riemanna monotoniczność całki oznacza, że z nierówności

$$(43) \quad f_1(x) \leq f_2(x) \quad \left(x \in [a, b] \right)$$

wynika

$$(44) \quad \int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

(por. twierdzenie 4 §1 i twierdzenie 16 §5). Jeżeli obie funkcje są ciągłe i nieujemne w przedziale $[a, b]$, to nierówność (44) ma oczywisty sens geometryczny: pole zawarte między osią x -ów i wykresem większej funkcji jest większe. Udowodnimy, że przy pewnych założeniach całka Riemanna - Stieltjesa ma podobną własność.

Twierdzenie 13. *Zakładamy, że*

A.) *funkcje f_1, f_2 spełniają nierówność (43), funkcja g jest rosnąca w przedziale $[a, b]$,*

B.) *spełniony jest jeden z warunków:*

(i) *funkcje f_1, f_2 są ciągłe w $[a, b]$*

lub

(ii) *jedna z funkcji f_j ($j = 1, 2$) nie jest ciągła ale ma skończone wahanie, lub obie funkcje f_1, f_2 mają tę własność - wówczas założymy dodatkowo ciągłość funkcji g .*

Przy podanych założeniach zachodzi nierówność

$$(45) \quad \int_a^b f_1 dg \leq \int_a^b f_2 dg.$$

DOWÓD. Obie całki istnieją i są granicami sum przybliżonych zgodnie z twierdzeniem 6. Ponieważ dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1) mamy $\Delta g_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$), z nierówności (43) wynika

$$S(f_1, g, \Pi, \xi(\Pi)) \leq S(f_2, g, \Pi, \xi(\Pi)),$$

dla każdego układu punktów pośrednich $\xi(\Pi)$. Stąd, jeżeli $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$, to

$$S(f_1, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) \leq S(f_2, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n))$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Przejście do granicy przy $n \rightarrow \infty$ w oparciu o (10) daje nierówność (45). $\square$

Założenie, że całkujemy względem funkcji g rosnącej jest istotne, jak wskazuje

Przykład 7. Niech

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 1 & \text{dla } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

i niech

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1 \quad (x \in [0, 1]).$$

Funkcja g jest kawałkami stała, więc obie całki wyrażają się jako sumy skończone zgodnie ze wzorem (39). Mamy

$$c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad \sigma_g(c_1) = -1, \quad \sigma_g(c_2) = 1,$$

stąd

$$\int_0^1 f_1 dg = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad \int_0^1 f_2 dg = -1 + 1 = 0.$$

Zatem

$$\int_0^1 f_1 dg > \int_0^1 f_2 dg$$

pomimo, że funkcje f_1, f_2 spełniają (43) w przedziale $[0, 1]$. Oczywiście funkcja g nie jest rosnąca w tym przedziale.

Z udowodnionego twierdzenia wynika łatwo

Twierdzenie 14. *Zakładamy, że funkcja g jest rosnąca w przedziale $[a, b]$ i że spełniony jest jeden z warunków*

(i) *f jest ciągła w $[a, b]$*

lub

(ii) *f ma skończone wahanie, g jest ciągła w $[a, b]$.*

Wówczas

$$(46) \quad \left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dg.$$

DOWÓD. Z twierdzenia 7 §6 wynika, że jeżeli funkcja f ma skończone wahanie, to tą samą własność ma $|f|$. Ponieważ

$$f(x) \leq |f(x)|, \quad -f(x) \leq |f(x)| \quad (x \in [a, b])$$

przyjmując w twierdzeniu 13 $f_1 = f$ lub $f_1 = -f$, $f_2 = |f|$ otrzymujemy

$$(47) \quad \int_a^b f dg \leq \int_a^b |f| dg$$

oraz (w oparciu o twierdzenie 7)

$$(48) \quad \int_a^b (-f) dg = - \int_a^b f dg \leq \int_a^b |f| dg.$$

Nierówności (47), (48) dają (46). □

Bez założenia, że funkcja g jest rosnąca, możemy uzyskać jedynie słabsze

Twierdzenie 15. Załóżmy, że funkcje f, g spełniają jeden z warunków podanych w twierdzeniu 6. Wówczas z nierówności

$$(49) \quad |f(x)| \leq M \quad (x \in [a, b])$$

wynika

$$(50) \quad \left| \int_a^b f \, dg \right| \leq MW_a^b(g).$$

DOWÓD. Dla dowolnego podziału Π przedziału $[a, b]$ nierówność (49) pociąga za sobą

$$\left| S(f, g, \Pi, \xi(\Pi)) \right| \leq MV(\Pi, g)$$

skąd

$$(51) \quad \left| S(f, g, \Pi, \xi(\Pi)) \right| \leq MW_a^b(g).$$

Obierając ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ i punkty $\xi(\Pi_n)$ dostajemy z (51)

$$\left| S(f, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) \right| \leq MW_a^b(g)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd po przejściu do granicy zgodnie z (10) otrzymujemy (50). $\square$

Zadania.

1. Obliczyć całki Riemanna - Stieltjesa

$$A = \int_0^1 x^2 \, dx^2, \quad B = \int_0^1 x \, dx^3$$

dwoma sposobami:

a.) stosując twierdzenie 11,

b.) znajdując granicę ciągu sum przybliżonych i opierając się na twierdzeniu 6.

Wskazówka. W punkcie b.) skonstruować sumę przybliżoną S_n dzieląc przedział całkowania na n równych części. Następnie zastosować twierdzenie Stolza (twierdzenie 11 rozdz.II §2).

2. Obliczyć następujące całki Riemanna - Stieltjesa sprowadzając je do całki Riemanna:

$$(i) \quad \int_0^2 x^2 \, d \log(1+x), \quad (ii) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, d \sin x, \quad (iii) \quad \int_{-1}^1 x \, d \operatorname{arctg} x.$$

3. Niech

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x = -1, \\ 1 & \text{dla } -1 < x \leq 0, \\ 3 & \text{dla } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Obliczyć całki Riemanna - Stieltjesa

$$\int_{-1}^1 x \, dg(x), \quad \int_{-1}^1 x^3 \, dg(x)$$

dwoma sposobami:

- a.) opierając się na twierdzeniu 12,
- b.) stosując całkowanie przez części i sprowadzając przekształconą całkę do całki Riemanna. Sprawdzić, że obie całki spełniają nierówność (50).

4. Niech

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } -2 \leq x \leq -1, \\ 2 & \text{dla } -1 < x < 0, \\ x^2 + 3 & \text{dla } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Obliczyć całki Riemanna - Stieltjesa

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_{-2}^2 \sqrt{|x|} \, dg(x), & \text{(ii)} \quad & \int_{-2}^2 \sin \frac{\pi x}{2} \, dg(x), \\ \text{(iii)} \quad & \int_{-2}^2 f(x) \, dg(x) \quad \text{gdzie} \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } -2 \leq x \leq 0, \\ x^2 & \text{dla } 0 < x \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Obliczyć całki Riemanna - Stieltjesa stosując odpowiednie podstawienie (por. twierdzenie 10):

$$\begin{aligned} \text{a.)} \quad & \int_0^1 (1 + e^x) \, de^{3x}, & \text{b.)} \quad & \int_0^\pi \sin^2 x \, d \cos x, \\ \text{c.)} \quad & \int_{-1}^1 f(x) \, de^x \quad \text{gdzie} \quad f(x) = \begin{cases} 1 + e^{2x} & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - e^x & \text{dla } 0 < x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

6. Załóżmy, że

- a.) f jest funkcją ograniczoną, g funkcją stałą
- lub

- b.) f jest funkcją ciągłą, $g(x) = c$ poza skończoną ilością punktów leżących w przedziale otwartym (a, b) . Udowodnić, że

$$\int_a^b f \, dg = 0.$$

7. Okazać, że dla dowolnej funkcji g o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$

$$\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a).$$

8. Załóżmy, że

(i) f jest funkcją ograniczoną w przedziale $[a, b]$, ciągłą w tym przedziale poza skończoną ilością punktów $c_j \in (a, b)$ ($j = 1, \dots, p$),

(ii) α jest funkcją rosnącą w przedziale $[a, b]$, ciągłą w punktach c_j .

Udowodnić, że f jest całkowalna względem α na przedziale $[a, b]$.

Wskazówka. Zacząć od przypadku $p = 1$ i zmodyfikować dowód twierdzenia 6 §5.

9. Zbadać istnienie całki

$$\int_{-1}^1 f d\alpha,$$

jeżeli

$$\text{a.) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{dla } 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$\text{b.) } f(x) \text{ jak w punkcie a.),} \quad \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -1 \leq x < 0, \\ x+1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$\text{c.) } f(x) = \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Wynik porównać z twierdzeniami 3,4. Czy w podanych przykładach całki górna i dolna spełniają relację sformułowaną w twierdzeniu 1?

10. Uogólnić twierdzenia 9 - 12 §5 na przypadek całki Riemanna - Stieltjesa względem dowolnej funkcji rosnącej α .

11. Niech

$$\text{a.) } g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{2}{\pi}x + 2 & \text{dla } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

$$f_1(x) = 0 \leq f_2(x) = \sin x \leq f_3(x) = 1 \quad \text{dla } x \in [0, \pi],$$

$$\text{b.) } g(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi, \\ -2\cos x - 1 & \text{dla } \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$$

$$f_1(x) = 0 < f_2(x) = 1 \quad \text{dla } x \in [0, \pi].$$

Jakie nierówności zachodzą między całkami $\int_0^\pi f_j dg$? Wynik porównać z twierdzeniem 13.

12. Niech g będzie funkcją klasy C^1 w przedziale $[0, 1]$ taką, że 1^0 pochodna g' jest funkcją liniową w każdym z przedziałów

$$[0, \frac{1}{4}], \quad [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \quad [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \quad [\frac{3}{4}, 1],$$

$$2^0 \quad g'(0) = 0 = g'(\frac{1}{2}) = g'(1) = 0, \quad g'(\frac{1}{4}) = 2, \quad g'(\frac{3}{4}) = -4.$$

Przyjmując

$$f_1(x) = 0 < f_2(x) = 1 \quad \text{dla} \quad x \in [0, 1]$$

sprawdzić, że

$$(52) \quad \int_0^1 f_2 dg < \int_0^1 f_1 dg.$$

Dlaczego twierdzenie 13 nie zachodzi w tym przypadku?

Wskazówka. Całkę po lewej stronie (52) można obliczyć posługując się rysunkiem.

13. Przyjmijmy

$$f(x) = 1 \quad \text{dla} \quad x \in [0, 1]$$

i niech g będzie funkcją określoną w zadaniu 12. Sprawdzić, że nierówność (46) nie zachodzi. Które z założeń twierdzenia 14 nie jest spełnione?

14. Zakładając, że funkcje f, g spełniają jedno z założeń twierdzenia 6 udowodnić nierówność

$$(53) \quad \left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dv,$$

gdzie

$$v(x) = W_a^x(g).$$

Jaką postać przyjmuje nierówność (53) gdy $g(x) = x$?

Wskazówka. Najpierw udowodnić nierówność dla sum przybliżonych, następnie przejść do granicy opierając się na wzorze (10).

15. Okazać, że z nierówności (53) wynika nierówność (50).

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 13.

16. *Momentem statycznym* względem punktu q układu punktów materialnych $p_1, \dots, p_s$ o masach $m_1, \dots, m_s$ nazywamy sumę

$$M = \sum_{j=1}^s m_j r_j,$$

gdzie r_j jest odległością punktu p_j od q . Niech $F(x)$ oznacza masę rozłożoną na odcinku $[a, x]$ osi x -ów ($0 < a \leq x \leq b$), przy czym funkcja F ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$. Uzasadnić, że całkę Riemanna - Stieltjesa

$$M(F) = \int_a^b x \, dF$$

można uważać za moment statyczny względem początku układu współrzędnych masy rozłożonej na przedziale $[a, b]$.

Wskazówka. Rozważając podział Π określony nierównościami (1) potraktować odcinek $[a, b]$ jako układ punktów materialnych. Następnie wprowadzić ciąg normalny podziałów i przejść do granicy opierając się na twierdzeniu 6.

17. Przyjmując oznaczenia zadania 16 *momentem bezwładności* względem punktu q układu punktów materialnych $p_1, \dots, p_s$ nazwiemy sumę

$$Q = \sum_{j=1}^s m_j r_j^2.$$

Uzasadnić, że w przypadku masy rozłożonej na odcinku $[a, b]$ osi x -ów całkę Riemanna - Stieltjesa

$$Q(F) = \int_a^b x^2 \, dF$$

można uważać za moment bezwładności tej masy względem początku układu współrzędnych.

Wskazówka - jak w zadaniu 16.

18. Znaleźć funkcję F (zadania 16, 17) i momenty statyczny oraz bezwładności względem początku układu masy rozłożonej na odcinku $[a, b]$ ($0 < a < b$), jeżeli

- (i) masa jest rozłożona w sposób ciągły ze stałą gęstością liniową c ,
- (ii) w punktach

$$a = c_0 < c_1 < c_2, \dots < c_s = b$$

skupione są masy $m_0, m_1, \dots, m_s$.

19. Niech f będzie funkcją ciągłą nieujemną zaś g funkcją ściśle rosnącą w przedziale $[a, b]$. Przez krzywą K rozumiemy zbiór punktów (x, y) spełniających warunki

- (i) $x = g(t_0), y = f(t_0)$, gdy g jest ciągła w t_0 ,
- (ii) $x \in (g_-(t_0), g_+(t_0))$, $y = f(t_0)$, gdy g nie jest ciągła w t_0

(oznaczamy

$$g_-(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} g(t), \quad g_+(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} g(t).)$$

Uzasadnić, że

1⁰ obie granice $g_-(t_0)$, $g_+(t_0)$ istnieją,

2⁰ całka Riemanna - Stieltjesa

$$\int_a^b f(t) dg(t)$$

może być uważana za miarę pola zawartego między krzywą K a osią x -ów.

Wskazówka. W punkcie 1⁰ oprzeć się na twierdzeniu o zbieżności monotonicznej (rozdz. III §2 punkt 6). W punkcie 2⁰ podać najpierw sens geometryczny sumy przybliżonej, następnie skorzystać z twierdzenia 6.

20. Obliczyć całki Riemanna - Stieltjesa i podać ich sens geometryczny opierając się na zadaniu 19:

$$\text{a.) } \int_0^2 t dg \quad \text{gdzie} \quad g(t) = \begin{cases} t & \text{dla } 0 \leq t \leq 1, \\ 2t & \text{dla } 1 < t \leq 2, \end{cases}$$

$$\text{b.) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t d \sin t,$$

$$\text{c.) } \int_{-1}^1 t^2 dg \quad \text{gdzie} \quad g(t) = \begin{cases} -t^2 & \text{dla } -1 \leq t < 0, \\ 1 & \text{dla } t = 0, \\ 2 + t^2 & \text{dla } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

21. Zakładamy, że

1⁰ $\{c_0 = b, c_1, c_2, \dots\}$ jest ciągiem ściśle malejącym zbieżnym do a ($a < b$),

2⁰ funkcja g jest określona w przedziale $[a, b]$, przy czym istnieją stałe h_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) takie, że

$$g(x) = h_n \quad \text{dla } x \in (c_{n+1}, c_n],$$

3⁰ funkcja f jest ciągła w $[a, b]$,

4⁰ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \quad \text{gdzie} \quad \sigma_n = h_{n-1} - h_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

jest bezwzględnie zbieżny.

Przyjmując

$$\sigma_0 = g(b) - g(a) - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

okazać, że

$$(54) \quad \int_a^b f dg = f(a)\sigma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f(c_n)\sigma_n.$$

Wskazówka. Istnienie całki wynika z punktu (ii) zadania 12 §6. Aby udowodnić równość (54) przedstawiamy funkcję g w postaci

$$g = g_1 + g^*,$$

gdzie

$$g^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a < x \leq b, \\ -\sigma_0 & \text{dla } x = a, \end{cases}$$

co daje

$$(55) \quad \int_a^b f \, dg = \int_a^{c_n} f \, dg_1 + \int_{c_n}^b f \, dg + \int_a^{c_n} f \, dg^*$$

przy dowolnie ustalonym n . Dwie ostatnie całki po prawej stronie (55) możemy obliczyć stosując twierdzenie 12, zaś pierwszą całkę szacujemy opierając się na twierdzeniu 15 i zadaniu 12 §6 punkt (ii). Po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy (54).

22. Załóżmy, że

1⁰ $\{c_0 = b, c_1, c_2, \dots\}$ jest ciągiem ściśle malejącym zbieżnym do a ($a < b$);

2⁰ funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$;

3⁰ funkcja g spełnia warunki

$$g(x) = h_n(x) \quad \text{dla } x \in (c_{n+1}, c_n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

gdzie h_n jest funkcją klasy C^1 w przedziale $[c_{n+1}, c_n]$;

4⁰ pochodne h'_n są wspólnie ograniczone tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$|h'_n(x)| \leq M \quad \text{dla } x \in (c_{n+1}, c_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

5⁰ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \quad \text{gdzie } \sigma_n = h_{n-1}(c_n) - h_n(c_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

jest bezwzględnie zbieżny.

Wówczas

$$(56) \quad \int_a^b f \, dg = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{c_{n+1}}^{c_n} f(x) h'_n(x) \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} f(c_n) \sigma_n.$$

Wskazówka. Niech

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Przyjmując

$$g_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \rho(x - c_j) \quad \text{dla } a < x \leq b, \quad g_1(a) = 0$$

okazać najpierw, że funkcja g_1 spełnia warunki nałożone na funkcję g w zadaniu 21 zaś funkcja

$$g_2(x) = g(x) - g_1(x)$$

jest ciągła. Z zadań 12, 13 §6 wynika, że obie funkcje g_1 , g_2 (a więc i funkcja g) mają skończone wahanie na przedziale $[a, b]$. Zgodnie z twierdzeniem 7

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2.$$

Do obliczenia pierwszej całki po prawej stronie stosujemy wzór (54). Przedstawiając drugą całkę w postaci

$$\int_a^b f dg_2 = I_\alpha + K_\alpha,$$

gdzie

$$I_\alpha = \int_a^{a+\alpha} dg_2, \quad K_\alpha = \int_{a+\alpha}^b f dg_2 \quad (0 < \alpha < b - a)$$

dowodzimy w oparciu o zadanie 13 §6 i oszacowanie (5), że

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} I_\alpha = 0,$$

skąd wynika istnienie granicy

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} K_\alpha$$

oraz równość

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} K_\alpha = \int_a^b f dg_2.$$

Pozostaje do wykazania, że granica ta daje się przedstawić jako suma pierwszego z szeregów po prawej stronie (56).