§8. Całki zależne od parametru.

1. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych. W poprzednich rozdziałach rozważaliśmy wyłącznie funkcje jednej zmiennej, określone zazwyczaj na pewnym przedziale osi x-ów (por. rozdz. II §1 punkt 1). Sytuację tą łatwo przenieść na przypadek funkcji dwóch, trzech lub większej ilości zmiennych.

Jak wiemy (por. rozdz. III §1 punkt 1), układ dwóch liczb (x, y) możemy utożsamiać z punktem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ tj. płaszczyzny, w której wprowadzono prostokątny układ współrzędnych. Będziemy mówili, że na zbiorze $\mathbb{D} \subset R^2$ została określona funkcja dwóch zmiennych f, jeżeli każdemu punktowi $(x, y) \in \mathbb{D}$ została przyporządkowana liczba rzeczywista $z = f(x, y)$.

Rozumując podobnie, jak w punkcie 1 rozdz. III §1, łatwo wykazać, że po wprowadzeniu w przestrzeni prostokątnego układu współrzędnych możemy każdy punkt P przestrzeni utożsamić z trójką liczb (x, y, z) - liczby te nazywamy *współrzędnymi prostokątnymi* punktu P. Przestrzeń z wprowadzonym prostokątnym układem współrzędnych oznaczamy przez $\mathbb{R}^3$. Mówimy, że na zbiorze $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ została określona funkcja trzech zmiennych f, jeżeli każdemu punktowi $(x, y, z) \in \mathbb{D}$ została przyporządkowana liczba rzeczywista $u = f(x, y, z)$.

Uogólniając nasze rozważania możemy wprowadzić zbiór wszystkich układów n liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, który oznaczymy przez $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ - przypadek $n > 3$ nie jest niestety dostępny naszej wyobraźni przestrzennej. Mówimy, że na zbiorze $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ została określona funkcja n zmiennych f, jeżeli każdemu punktowi $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{D}$ została przyporządkowana liczba rzeczywista $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Dla ustalenia uwagi będziemy rozważali funkcję dwóch zmiennych $f(x, y)$. Załóżmy, że jest ona określona w prostokącie płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ zdefiniowanym nierównościami

$$|x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \beta.$$

Mówimy, że *funkcja f ma granicę g przy* $(x, y) \to (x_0, y_0)$, jeżeli dla dowolnego ciągu punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ spełniającego warunki

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad (x_n, y_n) \neq (x_0, y_0) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}, \\ &\text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{aligned}$$

zachodzi

$$\text{(iii)} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = g.$$

Zapisujemy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = g. \tag{1}$$

Jak Czytelnik na pewno zauważył, definicja ta jest podobna do podanej w §2 rozdz.II definicji granicy funkcji jednej zmiennej. Łatwo udowodnić jej równoważną postać, zachodzi mianowicie

Twierdzenie 1. *Równość* (1) *jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy gdy do dowolnego* $\varepsilon > 0$ *można dobrać liczbę* $\delta > 0$ *tak, że dla* x, y *spełniających warunek*

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta, \quad (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

mamy

$$|f(x, y) - g| < \varepsilon.$$

DOWÓD przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 4 §2 rozdz.III i pozostawiamy go Czytelnikowi. □

Mówimy, że *funkcja* f *jest ciągła w punkcie* (x_0, y_0), jeżeli spełnione są warunki
1^0 istnieje granica

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = g$$

oraz
2^0 zachodzi równość

$$f(x_0, y_0) = g.$$

Z podanych definicji wynika natychmiast

Twierdzenie 2. *Funkcja* f *jest ciągła w punkcie* (x_0, y_0) *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych ciągów* $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$$

□

W oparciu o twierdzenie 1 otrzymujemy

Twierdzenie 3. *Funkcja* f *jest ciągła w punkcie* (x_0, y_0) *wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego* $\varepsilon > 0$ *można dobrać liczbę* $\delta > 0$ *tak, by dla* x, y *spełniających nierówności*

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

było

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

□

Niech teraz f będzie funkcją określoną w prostokącie

$$\mathbb{P}: \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d. \tag{2}$$

Mówimy, że *f jest ciągła w prostokącie* $\mathbb{P}$ jeżeli jest ciągła w każdym punkcie $(x_0, y_0) \in \mathbb{P}$ (w przypadku, gdy punkt (x_0, y_0) leży na brzegu prostokąta, zakładamy, że liczby x_n, y_n, x, y o których mowa w twierdzeniach 2, 3 spełniają nierówności (2)). Podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej, dowodzi się, że suma, róznica, iloczyn oraz iloraz o mianowniku różnym od zera funkcji ciągłych dwóch zmiennych jest również funkcją ciągłą. Z podanych definicji łatwo wynika, że jeżeli $g(t)$ jest funkcją jednej zmiennej ciągłą w punkcie t_0, to funkcja

$$f_1(x, y) = g(x)$$

jest ciągła w każdym punkcie (t_0, y) zaś funkcja

$$f_2(x, y) = g(y)$$

ciągła w każdym punkcie (x, t_0).

Przykład 1. Zbadamy ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \sin x + \sin y \quad \text{dla} \quad (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = 1.$$

Poza początkiem układu współrzędnych fukcja f jest ciągła jako suma funkcji ciągłych jednej zmiennej. Natomiast

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 \neq f(0, 0)$$

więc funkcja f nie jest ciągła w punkcie $(0, 0)$.

Przykład 2. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Poza punktem $(0, 0)$ funkcja f jest ciągła jako iloraz wielomianów o mianowniku różnym od zera. Aby zbadać jej zachowanie w początku układu zauważmy, że funkcja f jest stała na każdej prostej o równaniu $y = kx$, bowiem

$$f(x, kx) = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Wobec tego przyjmując

$$y_n = kx_n,$$

gdzie $\{x_n\}$ jest dowolnym ciągiem zbieżnym do zera o wyrazach różnych od zera, dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{k}{1 + k^2},$$

a więc wartość zależną od sposobu w jaki obieramy ciąg (x_n, y_n). Widać stąd, że nie istnieje granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y),$$

zatem funkcja f nie może być ciągła w punkcie $(0, 0)$ niezależnie od tego, jak określimy jej wartość w tym punkcie.

Sformułujemy teraz

Twierdzenie 4. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w prostokącie $\mathbb{P}$ określonym nierównościami* (2)*, to do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla dowolnych x', x'', y', y'' spełniających* (2) *z warunków*

$$|x' - x''| < \delta, \quad |y' - y''| < \delta$$

wynikało, że

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon.$$

Twierdzenie to mówi, że jeżeli punkty (x', y') i (x'', y'') leżą blisko siebie, to niezależnie od ich położenia w prostokącie $\mathbb{P}$ wartości funkcji w tych punktach mało się różnią. Taką własność funkcji ciągłej nazywamy *jednostajną ciągłością* (liczba δ jest dobrana tylko do ε, nie zależy zaś od punktów (x', y'), (x'', y'')).

DOWÓD przebiega podobnie do dowodu twierdzenia 9 rozdz. III §3. Proponujemy by Czytelnik przeprowadził go samodzielnie jako ćwiczenie. ☐

Opierając się na twierdzeniu 4 udowodnimy

Twierdzenie 5. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w prostokącie $\mathbb{P}$ określonym nierównościami* (2)*, to jest ona ograniczona w tym prostokącie tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że*

$$|f(x, y)| \leq M \quad dla \quad (x, y) \in \mathbb{P}. \tag{3}$$

DOWÓD. Przyjmując $\varepsilon = 1$ w twierdzeniu 4 możemy dobrać $\delta > 0$ tak, by dla

$$|x' - x''| < \delta, \qquad |y' - y''| < \delta$$

zachodziła nierówność

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < 1.$$

Obierzmy liczbę naturalną n tak dużą, by

$$\max\left(\frac{b-a}{n}, \frac{d-c}{n}\right) < \delta$$

i podzielmy przedziały $[a, b]$ i $[c, d]$ na n równych części przy pomocy punktów

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d.$$

Prowadząc przez punkty podziału proste równoległe do osi układu dzielimy prostokąt $\mathbb{P}$ na n^2 prostokątów o długości boku $< \delta$. Niech $\mathbb{P}_{r,s}$ oznacza prostokąt określony nierównościami

$$x_{r-1} \leq x \leq x_r, \quad y_{s-1} \leq y \leq y_s \qquad (r, s = 1, \ldots, n),$$

wówczas

$$|f(x, y) - f(x_r, y_s)| < 1 \quad \text{dla} \quad (x, y) \in \mathbb{P}_{r,s} \tag{4}$$

i stąd

$$|f(x,y)| < 1 + |f(x_r, y_r)| \quad \text{dla} \quad (x,y) \in \mathbb{P}_{r,s}, \quad (r,s = 1,\ldots,n).$$

Zatem nierówność (3) będzie spełniona w całym prostokącie $\mathbb{P}$, jeżeli przyjmiemy

$$M = \max_{r,s} |f(x_r, y_s)|.$$

$\square$

Wszystkie rozważania tego punktu przenoszą się łatwo na przypadek funkcji trzech lub większej ilości zmiennych.

2. Ciągłość całki oznaczonej względem parametru. Będziemy rozważać funkcję $f(x,y)$ ciągłą w prostokącie $\mathbb{P}$ określonym nierównościami (2) i całkę oznaczoną

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \qquad (c \le y \le d) \tag{5}$$

Z twierdzeń 2, 3 wynika natychmiast, że przy dowolnie ustalonym $y = \bar{y} \in [c,d]$ funkcja jednej zmiennej $f(x,\bar{y})$ jest ciągła w przedziale $[a,b]$. Zatem całka (5) istnieje, przy czym oczywiście jej wartość zależy od *parametru* y. Udowodnimy

Twierdzenie 6. *Funkcja g jest ciągła w przedziale $[c,d]$.*

DOWÓD. Ustalając $y_0 \in [c,d]$ mamy

$$|g(y) - g(y_0)| \le \int_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx. \tag{6}$$

Na podstawie twierdzenia 4 można do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla wszystkich $x \in [a,b]$ i wszystkich y spełniających warunek

$$|y - y_0| < \delta \tag{7}$$

zachodziła nierówność

$$|f(x,y) - f(x,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Wówczas z (6) otrzymujemy dla y spełniających (7) (por. Wniosek 1 §1)

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

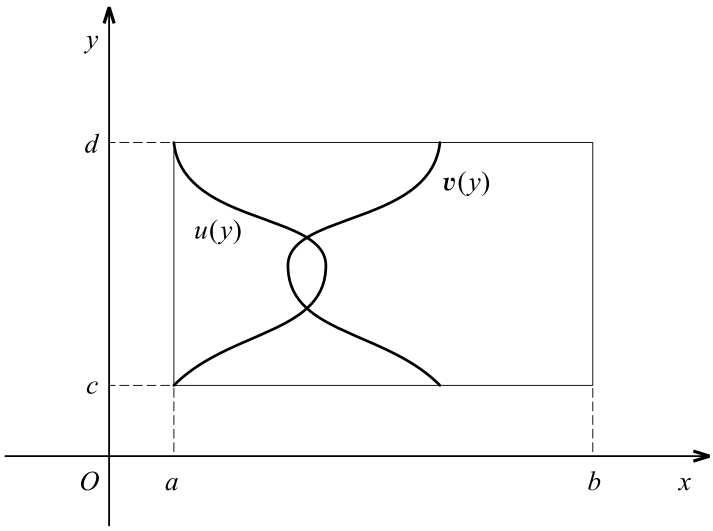
a to oznacza ciągłość funkcji g w punkcie y_0. $\square$

Twierdzenie to można uogólnić na przypadek, gdy również granice całkowania zależą od parametru. Niech $u(y)$, $v(y)$ będą funkcjami spełniającymi warunki

$$a \le u(y) \le b, \qquad a \le v(y) \le b \qquad \text{dla} \quad y \in [c,d]$$

(por. rys. 85) i niech

$$h(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)\, dx.$$



[rys. 85]

Zachodzi

Twierdzenie 7. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w prostokącie $\mathbb{P}$ i funkcje u, v są ciągłe w przedziale $[c, d]$, to funkcja h też jest ciągła w przedziale $[c, d]$.*

DOWÓD. Dla dowolnie ustalonego $y_0 \in [c, d]$ mamy

$$h(y) = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} f(x, y)\, dx + \int_{u(y)}^{u(y_0)} f(x, y)\, dx + \int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x, y)\, dx$$

oraz

$$h(y_0) = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} f(x, y_0)\, dx,$$

skąd

$$h(y) - h(y_0) = A(y) + B(y) + C(y), \tag{8}$$

gdzie

$$A(y) = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} \Big(f(x, y) - f(x, y_0) \Big)\, dx,$$

$$B(y) = \int_{u(y)}^{u(y_0)} f(x, y)\, dx, \qquad C(y) = \int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x, y)\, dx.$$

Całki $B(y)$, $C(y)$ szacujemy w oparciu o twierdzenie 5, co daje

$$|B(y)| \leq M|u(y) - u(y_0)|, \qquad |C(y)| \leq M|v(y) - v(y_0)|. \tag{9}$$

Wobec ciągłości funkcji u, v możemy do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ dobrać liczbę $\delta_1 > 0$ tak, by zachodziły nierówności

$$|u(y) - u(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \qquad |v(y) - v(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3M} \tag{10}$$

dla $|y - y_0| < \delta_1$. Stosując do całki $A(y)$ rozumowanie przeprowadzone w dowodzie twierdzenia 6 dostajemy

$$|A(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon \tag{11}$$

dla $|y - y_0| < \delta_2$. Wobec tego z (8) - (11) wynika, że

$$|h(y) - h(y_0)| < \varepsilon$$

dla $|y - y_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ - a to oznacza ciągłość funkcji h w punkcie y_0. $\square$

Przykład 3. Niech

$$g(y) = \int_0^\pi \cos(x + y)\, dx.$$

Funkcja podcałkowa jest ciągłą funkcją zmiennych x, y w prostokącie

$$0 \leq x \leq \pi, \qquad c \leq y \leq d$$

przy dowolnych c, d, zatem zgodnie z twierdzeniem 6 funkcja g jest ciągła w przedziale $[c, d]$. Zauważmy, że całka daje się wyrazić przez funkcje elemntarne, mianowicie

$$g(y) = \Big[\sin(x + y)\Big]_{x=0}^{x=\pi} = \sin(\pi + y) - \sin y,$$

czyli po zastosowaniu znanego wzoru trygonometrycznego

$$g(y) = -2 \sin y.$$

Ciągłość funkcji g możemy więc również stwierdzić bezpośrednio, nie korzystając z ogólnego twierdzenia.

Przykład 4. Niech

$$h(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} (2xy)\, dx$$

i niech

$$\mathbb{P} : -1 \leq x \leq 1, \qquad c \leq y \leq d,$$

gdzie c, d są dowolnie obrane. Ponieważ

$$-1 \leq \sin y \leq 1, \qquad -1 \leq \cos y \leq 1$$

i przy tym funkcja podcałkowa jest ciągła w prostokącie $\mathbb{P}$ a granice całkowania są funkcjami ciągłymi w przedziale $[c, d]$, spełnione są założenia twierdzenia 7, zatem funkcja h jest ciągła w przedziale $[c, d]$. Całkę określającą funkcję h można łatwo wyrazić przez funkcje elementarne. po scałkowaniu mamy

$$h(y) = \Big[x^2 y\Big]_{x=\sin y}^{x=\cos y} = y(\cos^2 y - \sin^2 y),$$

czyli

$$h(y) = y \cos 2y.$$

Oczywiście jest to funkcja ciągła w każdym przedziale $[c, d]$ na osi y-ów.

3. Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych. Niech $f(x, y)$ będzie funkcją określoną w prostokącie

$$|x - x_0| < \alpha, \qquad |y - y_0| < \beta.$$

Pochodną cząstkową względem x funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy granicę

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}. \tag{12}$$

Analogicznie *pochodną cząstkową względem* y funkcji f w punkcie (x_0, y_0) definiujemy jako granicę

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}. \tag{13}$$

Używane są oznaczenia

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

lub krócej

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Jeżeli funkcja f jest określona w prostokącie $\mathbb{P}$ określonym nierównościami (2) i punkt (x_0, y_0) leży na brzegu tego prostokąta, to definicje (12), (13) pozostają w mocy; zakładamy jedynie, że punkty $(x_0 + h, y_0)$ oraz $(x_0, y_0 + k)$ należą do $\mathbb{P}$.

Z podanych definicji widać, że pochodna cząstkowa jest pochodną w sensie określonym w rozdz. III §4 z tym, że drugiej zmiennej nadajemy ustaloną wartość.

Podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej, można wprowadzić dla funkcji dwóch zmiennych pochodne cząstkowe rzędu drugiego. Przyjmujemy

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right),$$

(oczywiście w podanych wzorach można zamienić role zmiennych x, y). Używane są oznaczenia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Analogicznie określamy pochodne cząstkowe funkcji trzech i większej ilości zmiennych. Do obliczania pochodnych cząstkowych stosują się wzory rachunkowe podane w rozdz. III §4, przy czym pozostałe zmienne traktujemy jako stałe.

Przykład 5. Niech

$$f(x,y) = \sin(x-y).$$

Aby znaleźć pochodną f_x traktujemy y jako stałą i stosujemy regułę różniczkowania funkcji złożonej jednej zmiennej. Otrzymujemy

$$f_x(x,y) = \cos(x-y).$$

Analogicznie, dla obliczenia pochodnej f_y traktujemy x jako stałą i również stosujemy regułę różniczkowania funkcji złożonej jednej zmiennej. Dostajemy

$$f_y(x,y) = -\cos(x-y).$$

Przykład 6. Przyjmując

$$g(x,y) = \operatorname{tg}\frac{x}{y} \qquad (y \neq 0)$$

znaleźć pochodne funkcji g w punkcie $(0, \pi)$. Zaczniemy od obliczenia pochodnych cząstkowych w dowolnym punkcie (x,y). Stosując znane reguły różniczkowania funkcji jednej zmiennej dostajemy

$$g_x(x,y) = \frac{1}{y\cos^2(\frac{x}{y})}$$

(y traktujemy jako stałą) oraz

$$g_y(x,y) = \frac{-x}{y^2\cos^2(\frac{x}{y})}$$

(x traktujemy jako stałą). Stąd podstawiając otrzymujemy

$$g_x(0,\pi) = \frac{1}{\pi}, \qquad g_y(0,\pi) = 0.$$

Przykład 7. Wróćmy do funkcji f rozważanej w Przykładzie 2

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{dla} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \quad \text{dla} & x = y = 0. \end{cases}$$

Znajdziemy jej pochodne cząstkowe. Poza początkiem układu współrzędnych stosujemy znane reguły różniczkowania traktując drugą zmienną jako stałą. Otrzymujemy

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

oraz

$$f_y(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

- zauważmy, że

$$f(x,y)) = f(y,x),$$

wobec tego pochodną f_y można otrzymać zamieniając role zmiennych x, y w wyrażeniu f_x.

Aby obliczyć pochodne w początku układu posłużymy się definicją. Mamy

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 = \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k},$$

skąd po przejściu do granicy przy $h \to 0$ względnie $k \to 0$ otrzymujemy

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

Zauważmy, że funkcja f ma w początku układu obie pochodne cząstkowe, ale nie jest w tym punkcie ciągła - sytuacja odmienna niż w przypadku funkcji jednej zmiennej!

W dalszym ciągu będzie nam potrzebne twierdzenie o różniczkowaniu funkcji złożonej.

Twierdzenie 8. *Załóżmy, że*
(i) *funkcja $F(u,v)$ jest określona w prostokącie*

$$Q: \quad A \leq u \leq B, \qquad C \leq v \leq D$$

i ma w każdym punkcie $(u_0,v_0) \in Q$ pochodne cząstkowe $F_u(u_0,v_0)$, $F_v(u_0,v_0)$;
(ii) *pochodne F_u, F_v są ciągłe w Q;*
(iii) *funkcje $u(y)$, $v(y)$ są różniczkowalne w przedziale $[c,d]$ i spełniają nierówności*

$$A \leq u(y) \leq B, \qquad C \leq v(y) \leq D \qquad \textit{dla} \quad y \in [c,d].$$

Wówczas funkcja złożona

$$G(y) = F(u(y), v(y))$$

jest różniczkowalna w przedziale $[c,d]$ *i dla dowolnego* $y_0 \in [c,d]$ *zachodzi równość*

$$G'(y_0) = F_u\Big(u(y_0), v(y_0))\Big)u'(y_0) + F_v\Big(u(y_0), v(y_0)\Big)v'(y_0). \tag{14}$$

DOWÓD. Dla ustalonego $y_0 \in [c,d]$ mamy

$$\begin{aligned}&G(y_0+h) - G(y_0) =\\ &\Big[F\Big((u(y_0+h), v(y_0+h)\Big) - F\Big(u(y_0+h), v(y_0)\Big)\Big] +\\ &\Big[F\Big(u(y_0+h), v(y_0)\Big) - F\Big(u(y_0), v(y_0)\Big)\Big].\end{aligned}$$

Do każdej z różnic po prawej stronie można zastosować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (twierdzenie 11 rozdz. III §4), zatem iloraz różnicowy funkcji G daje się przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}&\frac{G(y_0+h) - G(y_0)}{h} =\\ &\frac{v(y_0+h) - v(y_0)}{h}F_v\Big(u(y_0+h), \bar{v}(h)\Big) + \frac{u(y_0+h) - u(y_0)}{h}F_u\Big(\bar{u}(h), v(y_0)\Big),\end{aligned} \tag{15}$$

gdzie
$\bar{v}(h)$ leży między liczbami $v(y_0)$, $v(y_0+h)$
oraz
$\bar{u}(h)$ leży między liczbami $u(y_0)$, $u(y_0+h)$.
Z ciągłości funkcji $u(y)$, $v(y)$ wynika, że

$$\lim_{h\to 0} \bar{u}(h) = u(y_0), \qquad \lim_{h\to 0} \bar{v}(h) = v(y_0),$$

wobec tego przechodząc w (15) do granicy przy $h \to 0$ i korzystając z ciągłości pochodnych cząstkowych funkcji F dostajemy (14). □

Wzór (14) można zapisać w postaci

$$\frac{dG}{dy} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy} \tag{14'}$$

lub krócej

$$G' = F_u u' + F_v v'. \tag{14''}$$

Czytelnik na pewno zauważy analogię ze wzorem na pochodną funkcji złożonej jednej zmiennej (rozdz. III §4). Udowodnione twierdzenie daje się łatwo przenieść na przypadek, gdy F jest funkcją trzech lub więcej zmiennych.

Przykład 8. Niech

$$F(u,v) = u^2 + v^2, \qquad u(y) = \sin y, \qquad v(y) = \cos y.$$

Mamy

$$F_u = 2u, \qquad F_v = 2v,$$

zatem założenia (i), (ii) twierdzenia 8 są spełnione w dowolnym prostokącie Q. Ze względu na nierówności

$$-1 \le u(y) \le 1, \qquad -1 \le v(y) \le 1$$

wystarczy założyć, że

$$B,\ D \ge 1 \quad \text{oraz} \quad A,\ C \le -1.$$

Założenie (iii) jest spełnione przy dowolnie obranych c, d. Zgodnie ze wzorem (14")

$$g' = F_u u' + F_v v' = (2u)\cos y - (2v)\sin y,$$

czyli po przejściu do zmiennej y

$$G'(y) = 2\sin y\ \cos y - 2\cos y\ \sin y = 0.$$

Zauważmy, że funkcję $G(y)$ łatwo wyznaczyć efektywnie, bowiem

$$G(y) = \sin^2 y + \cos^2 y = 1.$$

Ponieważ G jest funkcją stałą, jej pochodna jest tożsamościowo równa zeru.

4. Różniczkowanie całki względem parametru. Będziemy rozważać całkę postaci

$$p(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx$$

gdzie funkcja $f(x,y)$ jest określona w prostokącie $\mathbb{P}$ danym nierównościami (2) zaś funkcje u, v spełniają nierówności

$$a \le u(y) \le b, \qquad a \le v(y) \le b \quad \text{dla} \quad y \in [c,d].$$

Zaczniemy od przypadku, gdy obie granice całkowania są stałe tzn. gdy całka ma postać

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Twierdzenie 9. *Załóżmy, że*

(i) *funkcja f jest ciągła w $\mathbb{P}$ i ma w każdym punkcie $(x_0, y_0) \in \mathbb{P}$ pochodną cząstkową $f_y(x_0, y_0)$;*

(ii) *pochodna f_y jest ciągła w $\mathbb{P}$.*

Wówczas funkcja g jest różniczkowalna w przedziale $[c, d]$ i zachodzi równość

$$g'(y_0) = \int_a^b f_y(x, y_0)\, dx \tag{16}$$

dla dowolnego $y_0 \in [c, d]$.

DOWÓD. Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (twierdzenie 11 rozdz. III §4) możemy iloraz różnicowy zapisać w postaci

$$\frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \int_a^b f_y(x, \bar{y}(h))\, dx, \tag{17}$$

gdzie $\bar{y}(h)$ leży między liczbami y_0, $y_0 + h$. Z założenia (ii) wynika na podstawie twierdzenia 6, że całka

$$\int_a^b f_y(x, y)\, dx$$

jest ciągłą funkcją parametru y, a więc

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b f_y(x, \bar{y}(h))\, dx = \int_a^b f_y(x, y_0)\, dx. \tag{18}$$

Z równości (17), (18) wynika (16). □

Wzór (16) można zapisać inaczej w postaci

$$g'(y) = \int_a^b f_y(x, y)\, dx. \tag{16'}$$

Mówimy, że przy założeniach twierdzenia 9 można *w przypadku stałych granic całkowania* wykonać różniczkowanie pod znakiem całki.

Przejdźmy teraz do całki $p(y)$ o zmiennych granicach całkowania.

Twierdzenie 10. *Załóżmy, że*

(i) *funkcja f spełnia założenia twierdzenia 9,*

(ii) *funkcje $u(y)$, $v(y)$ są różniczkowalne w przedziale $[c, d]$.*

Wówczas całka $p(y)$ jest różniczkowalna w przedziale $[c, d]$ i zachodzi równość

$$\frac{dp}{dy} = \int_{u(y)}^{v(y)} f_y(x, y)\, dx + f(v(y), y)\frac{dv}{dy} - f(u(y), y)\frac{du}{dy} \quad \text{dla} \quad y \in [c, d]]. \tag{19}$$

Uwaga. Wzór (19) nosi nazwę *reguły Leibniza.* Dla stałych funkcji $u(y), v(y)$ daje on udowodniony poprzednio wzór (16').

DOWÓD. Ustalając $y_0 \in (c,d)$ mamy

$$p(y) = P(y) + Q(y) + R(y),$$

gdzie

$$P(y) = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} f(x,y)\,dx,$$

$$Q(y) = \int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x,y)\,dx, \qquad R(y) = \int_{u(y)}^{u(y_0)} f(x,y)\,dx.$$

Całka $P(y)$ ma stałe granice i spełnia założenia twierdzenia 9, zatem na podstawie (16')

$$\frac{dP}{dy} = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} f_y(x,y)\,dx. \tag{20}$$

Pochodne całek $Q(y)$ i $R(y)$ obliczymy opierając się na twierdzeniu 8. Przyjmując

$$T(v,y) = \int_{\alpha}^{v} f(x,y)\,dx, \qquad S(u,y) = \int_{u}^{\beta} f(x,y)\,dx,$$

gdzie

$$\alpha = v(y_0), \qquad \beta = u(y_0)$$

mamy zgodnie z twierdzeniem 6 §1 i wzorem (29) §1

$$\frac{\partial T}{\partial v} = f(v,y), \qquad \frac{\partial S}{\partial u} = -f(u,y).$$

Ponadto na podstawie twierdzenia 9

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \int_{\alpha}^{v} f_y(x,y)\,dx, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = \int_{u}^{\beta} f_y(x,y)\,dx$$

- przypominamy, że pochodną cząstkową względem y obliczamy traktując drugą zmienną v względnie u jako stałą. Ostatecznie stosując wzór (14') otrzymujemy

$$\frac{dQ}{dy} = f(v(y),y)\frac{dv}{dy} + \int_{v(y_0)}^{v(y)} f_y(x,y)\,dx \tag{21}$$

oraz

$$\frac{dR}{dy} = -f(u(y),y)\frac{du}{dy} + \int_{u(y)}^{u(y_0)} f_y(x,y)\,dx. \tag{22}$$

Dodanie (20), (21), (22) daje żądany wzór (19).

Pozostaje do wykazania, że zastosowanie wzoru (14') dla pochodnej funkcji złożonej było uprawnione tzn. że funkcje T, S spełniają założenia twierdzenia 8. Ciągłość pochodnych T_v, S_u wynika z przyjętego założenia (i) twierdzenia 9, natomiast ciągłość pochodnych T_y, S_y wyniknie z założenia (ii) twierdzenia 9, jeżeli udowodnimy następujący

Lemat. *Niech $g(x,y)$ będzie funkcją ciągłą w prostokącie $\mathbb{P}$ określonym nierównościami* (2). *Wówczas funkcje*

$$G_1(v,y) = \int_\alpha^v g(x,y)\,dx, \quad G_2(u,y) = \int_u^\beta g(x,y)\,dx \qquad (a \le \alpha,\ \beta \le b)$$

są również ciągłe w $\mathbb{P}$.

DOWÓD LEMATU. Dla ustalenia uwagi udowodnimy ciągłość funkcji G_1, ciągłość funkcji G_2 dowodzi się tak samo. Ustalając dowolnie punkt $(v_0, y_0) \in \mathbb{P}$ mamy

$$\begin{aligned} G_1(v,y) - G_1(v_0,y_0) &= \Big[G_1(v,y) - G_1(v_0,y)\Big] + \Big[G_1(v_0,y) - G_1(v_0,y_0)\Big] = \\ &\int_{v_0}^v g(x,y)\,dx + \int_\alpha^{v_0} \Big[g(x,y) - g(x,y_0)\Big]\,dx. \end{aligned} \tag{23}$$

Z założonej ciągłości funkcji g wynika:

1^0 istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$|g(x,y)| \le M \quad \text{dla} \quad (x,y) \in \mathbb{P} \tag{24}$$

- na mocy twierdzenia 5,

2^0 ustalając dowolnie $\varepsilon > 0$ można dobrać $\eta > 0$ tak, aby dla $|y - y_0| < \eta$ zachodziła nierówność

$$|g(x,y) - g(x,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{dla} \quad x \in [a,b] \tag{25}$$

- na mocy twierdzenia 4.

Z (24) dostajemy oszacowanie

$$\left|\int_{v_0}^v g(x,y)\,dx\right| < M|v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{26}$$

o ile

$$|v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

natomiast dla $|y - y_0| < \eta$ mamy wobec (25)

$$\left|\int_\alpha^{v_0} \Big[g(x,y) - g(x,y_0)\Big]\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{27}$$

Dodając (26), (27) otrzymujemy w oparciu o (23)

$$|G_1(v,y) - G_1(v_0,y_0)| < \varepsilon$$

jeżeli

$$|v - v_0| < \delta, \qquad |y - y_0| < \delta,$$

gdzie $\delta = \min(\eta, \frac{\varepsilon}{2M})$ - a to oznacza ciągłość funkcji G_1 w punkcie (v_0, y_0) zgodnie z twierdzeniem 3. Dowód lematu, a zatem i dowód twierdzenia jest zakończony. $\square$

Przykład 9. Niech

$$g(y) = \int_0^1 (x^2 + y^2)\, dx.$$

Ponieważ

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad f_y(x,y) = 2y,$$

założenia twierdzenia 9 są spełnione w każdym prostokącie

$$0 \le x \le 1, \qquad c \le y \le d$$

i zgodnie ze wzorem (16') mamy

$$g'(y) = \int_0^1 (2y)\, dx = 2y.$$

Zauważmy, że funkcję g łatwo wyrazić bezpośrednio przez zmienne x, y, bowiem po scałkowaniu otrzymujemy

$$g(y) = \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + y^2$$

i stąd

$$g'(y) = 2y$$

zgodnie z wynikiem otrzymanym przez zastosowanie reguły Leibniza.

Przykład 10. Niech

$$p(y) = \int_y^{y^2} (x + y)\, dx,$$

wówczas

$$f(x,y) = x + y, \quad u(y) = y, \quad v(y) = y^2, \quad f_y(x,y) = 1.$$

Założenia twierdzenia 10 są spełnione, jeżeli prostokąt $\mathbb{P}$ zawiera wykresy funkcji u, v (przedział $[c,d]$ może być obrany dowolnie). Stosując regułę Leibniza (19) dostajemy

$$\frac{dp}{dy} = \int_y^{y^2} dx + 2(y^2 + y)y - 2y,$$

czyli po wykonaniu całkowania i redukcji

$$\frac{dp}{dy} = 2y^3 + 3y^2 - 3y. \tag{28}$$

Ten sam wynik otrzymamy obliczając najpierw całkę wyrażającą funkcję p. Mamy mianowicie

$$p(y) = \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=y}^{x=y^2},$$

czyli po podstawieniu i redukcji

$$p(y) = \frac{1}{2}y^4 + y^3 - \frac{3}{2}y^2,$$

co po zróżniczkowaniu daje (28).

5. Całkowanie całki względem parametru. Udowodnimy

Twierdzenie 11. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w prostokącie $\mathbb{P}$ określonym nierównościami* (2), *to*

$$\int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)\,dx. \tag{29}$$

DOWÓD. Udowodnimy nieco ogólniejszą równość

$$\int_c^t \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_a^b \Big(\int_c^t f(x,y)\,dy\Big)\,dx \quad \text{dla} \quad t \in [c,d]. \tag{30}$$

Oznaczmy lewą stronę (30) przez $G(t)$. Z twierdzenia 6 wynika, że wewnętrzna całka jest funkcją ciągłą parametru y w przedziale $[c,d]$, wobec tego funkcja G jest różniczkowalna i przy tym

$$G'(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx \tag{31}$$

zgodnie z twierdzeniem 6 §1. Po wprowadzeniu oznaczenia

$$h(x,t) = \int_c^t f(x,y)\,dy$$

prawa strona (30) może być zapisana w postaci

$$H(t) = \int_a^b h(x,t)\,dx.$$

Z twierdzenia 6 §1 wynika, że przy ustalonym x funkcja h ma pochodną względem t i przy tym

$$h_t(x,t) = f(x,t). \tag{32}$$

Zgodnie z lematem podanym w dowodzie twierdzenia 10 funkcja $h(x,t)$ jest ciągła w $\mathbb{P}$, natomiast ciągłość pochodnej cząstkowej h_t wynika z (32) i z założeń twierdzenia. Wobec tego możemy zastosować twierdzenie 9, które zapewnia różniczkowalność funkcji H i równość

$$H'(t) = \int_a^b h_t(x,t)\,dx$$

czyli zgodnie z (32)

$$H'(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx. \tag{33}$$

Z (31), (33) widać, że funkcje $G(t)$ i $H(t)$ mają w przedziale $[c,d]$ równe pochodne, zatem różnią się o stałą w tym przedziale. Stała ta jest zerem, gdyż obie funkcje mają tą samą wartość (równą zeru) dla $t = c$. Wobec tego funkcje $G(t)$, $H(t)$ są identyczne w całym przedziale $[c,d]$, a to oznacza równość (30). W szczególności dla $t = d$ dostajemy (29). □

Uwaga. Wzór (29) bywa zapisywany w postaci

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy. \tag{29'}$$

Całki występujące po obu stronach noszą nazwę *całek iterowanych.* Twierdzenie 11 mówi więc, że całki iterowane funkcji ciągłej dwóch zmiennych są równe.

Przykład 11. Rozważmy całkę iterowaną

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y\,dx \qquad (0 < a < b). \tag{34}$$

Funkcja podcałkowa

$$f(x,y) = x^y$$

jest określona dla $x > 0$ i może być przedstawiona w postaci

$$f(x,y) = e^{y \log x}$$

z której widać, że jest ciągła dla $x > 0$. Jak łatwo sprawdzić,

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} e^{y\log x} = 0 \quad \text{dla} \quad y_0 > 0$$

wobec tego przyjmując

$$f(0,y) = 0 \quad \text{dla} \quad a \le y \le b \tag{35}$$

otrzymujemy funkcję podcałkową ciągłą w prostokącie

$$\mathbb{P} : 0 \le x \le 1, \qquad a \le y \le b$$

i możemy zastosować do całki (34) twierdzenie 11, z którego wynika, że

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y\,dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y\,dy \tag{36}$$

Całka po lewej stronie daje się łatwo obliczyć, bowiem

$$\int_0^1 x^y\, dx = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y+1},$$

a stąd

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y\, dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \log\frac{1+b}{1+a} \tag{37}$$

-ponieważ dla $y > 0$

$$\lim_{x\to 0+} e^{y\log x} = 0,$$

przyjmujemy

$$x^{y+1}|_{x=0} = 0.$$

Natomiast w całce po prawej stronie (36) daje się obliczyć tylko całka wewnętrzna, mianowicie dla $0 < x < 1$

$$\int_a^b x^y\, dy = \left[\frac{x^y}{\log x}\right]_{y=a}^{y=b} = \frac{x^b - x^a}{\log x}. \tag{38}$$

Ostatecznie równości (36) - (38) dają

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\, dx = \log\frac{1+b}{1+a} \tag{39}$$

(ponieważ

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^b - x^a}{\log x} = 0,$$

oraz

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^b - x^a}{\log x} = b - a,$$

co stwierdzamy stosując regułę de l'Hospitala, funkcja podcałkowa po lewej stronie jest ciągła w przedziale $[0, 1]$, jeżeli nadamy jej wartość zero dla $x = 0$ oraz wartość $b - a$ dla $x = 1$).

Zauważmy, że całki (39) nie moglibyśmy obliczyć bezpośrednio stosując zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego, gdyż nie znamy funkcji pierwotnej. Twierdzenie o równości całek iterowanych pozwoliło znaleźć jej wartość przy pomocy dwóch łatwych całkowań.

Zadania.

1. Zbadać istnienie granic

a.) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, b.) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

$$\text{c.)} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Wskazówka. W punkcie b.) udowodnić najpierw nierówność

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}|x| \quad \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0).$$

2. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0), \qquad f(0,0)=1.$$

Wskazówka. Badanie granicy przy $(x,y)\to(0,0)$ zacząć od udowodnienia nierówności

$$\big|f(x,y)\big| \le 2\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0).$$

3. W jakim zbiorze punktów $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ określone są funkcje

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, \qquad g(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}\ ?$$

Zbadać ich ciągłość.

4. Sprawdzić, czy istnieje granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

jeżeli

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{gdy} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{gdy} \quad x=y=0. \end{cases}$$

Wskazówka. Zbadać zachowanie się funkcji f na prostej $y=x$ i na paraboli $y=x^2$.

5. Znaleźć pochodne cząstkowe $f_x,\ f_y$, jeżeli

$$\text{(i)} \quad f(x,y)=\frac{\cos(x^2)}{y} \qquad (y\neq 0),$$

$$\text{(ii)} \quad f(x,y)=\operatorname{tg}\frac{x^2}{y} \qquad (y\neq 0),$$

$$\text{(iii)} \quad f(x,y) = (x^2+y^2)\log(xy) \qquad (x>0,\ y>0).$$

6. Znaleźć pochodne cząstkowe $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, jeżeli

$$\text{a.)} \quad f(x,y) = \sqrt[3]{xy},$$

$$\text{b.)} \quad f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \quad \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0)=0.$$

7. Niech

$$f(x,y) = g(x) \qquad \Big((x,y) \in R^2\Big).$$

Znaleźć pochodne cząstkowe $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ w dowolnie ustalonym punkcie (x_0,y_0). Co trzeba założyć o funkcji g, aby te pochodne istniały?

8. Zbadać ciągłość funkcji f i znaleźć jej pochodne cząstkowe względem x i względem y, jeżeli

$$\text{a.)} \quad f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0)=0,$$

$$\text{b.)} \quad f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3} \quad \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0)=0.$$

9. Niech

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0)=0.$$

(i) Udowodnić ciągłość funkcji f,
(ii) Znaleźć pochodne cząstkowe f_x, f_y i udowodnić ich ciągłość.

10. Niech

$$F(u,v) = 2uv, \quad u(y) = \cos y, \quad v(y) = \sin y.$$

Znaleźć pochodną funkcji

$$G(y) = F\Big(u(y), v(y)\Big)$$

a.) bezpośrednio,
b.) stosując regułę różniczkowania funkcji złożonej.

11. Udowodnić ciągłość funkcji

$$g(y) = \int_0^1 \cos(xy)\,dx, \qquad h(y) = \int_{e^y}^{e^{-y}} (x+y)\,dx \qquad (y \in \mathbb{R})$$

a.) opierając się na twierdzeniu,
b.) obliczając całkę.

12. Znaleźć pochodną funkcji $g(y)$ dwoma sposobami:
a.) obliczając całkę określającą funkcję i następnie różniczkując,
b.) stosując regułę Leibniza, jeżeli

$$\text{(i)}\quad g(y)=\int_0^\pi \sin(xy)\,dx,\qquad \text{(ii)}\quad g(y)=\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx\quad (y\neq 0),$$

$$\text{(iii)}\quad g(y)=\int_0^1 \log(x^2+y^2)\,dx\quad (y\neq 0).$$

Wskazówka. W punktach (ii), (iii) przy obliczaniu całki zastosować całkowanie przez części.

13. Udowodnić różniczkowalność i obliczyć pochodną funkcji

$$p(y)=\int_{e^y}^{e^{-y}} (x^2+y^2)\,dx\qquad (y\in\mathbb{R})$$

a.) obliczając całkę określającą funkcję i następnie różniczkując,
b.) stosując regułę Leibniza.

14. Udowodnić różniczkowalność i znaleźć pochodną funkcji

$$\text{a.)}\quad p(y)=\int_y^{y^2} x\sin\left(\frac{\pi y}{x}\right)dx\quad (y>0),\qquad \text{b.)}\quad p(y)=\int_{-y}^{y} e^{x^2+y^2}\,dx,$$

$$\text{c.)}\quad p(y)=\int_{\sin(xy)}^{\cos(xy)} \log(x^2+y^2)\,dx\qquad (y\neq 0).$$

15. Niech

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\quad \text{dla}\quad (x,y)\neq(0,0),\qquad f(0,0)=0.$$

Zbadać ciągłość funkcji f i obliczyć jej całki iterowane w prostokącie

$$0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1.$$

Wynik porównać z twierdzeniem 11.
Wskazówka. Przy obliczaniu całek

$$g(x)=\int_0^1 f(x,y)\,dy,\qquad h(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx \tag{40}$$

można łatwo odgadnąć funkcję pierwotną. Czy (40) określa funkcje g,h w całym przedziale $[0,1]$?