Rozdział VI

Ciągi i szeregi funkcyjne.

§1. Ogólne własności ciągów i szeregów funcyjnych.

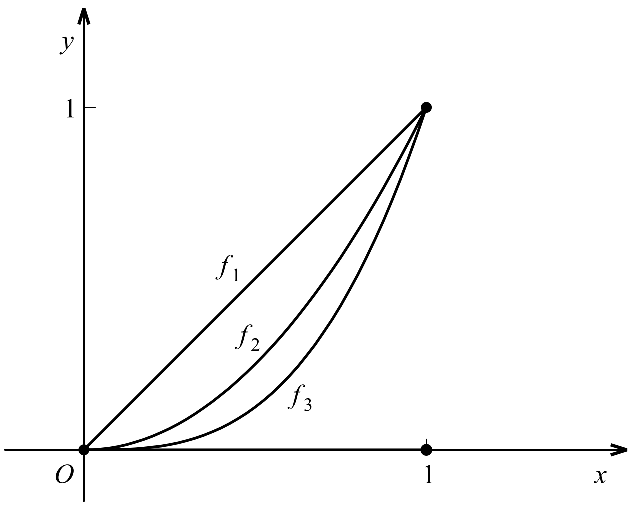
1. Zbieżność punktowa i zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego. Niech $\mathbb{P}$ będzie ustalonym przedziałem (ograniczonym lub nie) na osi liczbowej. Ciąg nieskończony, którego n-ty wyraz f_n jest funkcją określoną w przedziale $\mathbb{P}$ nazywamy *ciągiem funkcyjnym.* Mówimy, że ciąg $\{f_n\}$ *jest zbieżny punktowo do funkcji* f *w przedziale* $\mathbb{P}$ lub że f *jest granicą punktową ciągu* $\{f_n\}$, jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{P}$ ciąg liczbowy $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny do $f(x)$. Zapisujemy

$$f_n \to f \quad \text{w} \quad \mathbb{P}$$

lub

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{w} \quad \mathbb{P}.$$

Oznaczenie przedziału $\mathbb{P}$ można opuścić, jeżeli wiadomo o jaki przedział chodzi. W dalszym ciągu przez *granicę ciągu funkcyjnego* będziemy zawsze rozumieli jego granicę punktową.



[rys. 86]

Przykład 1. Niech

$$f_n(x) = x^n, \qquad \mathbb{P} = [0,1],$$

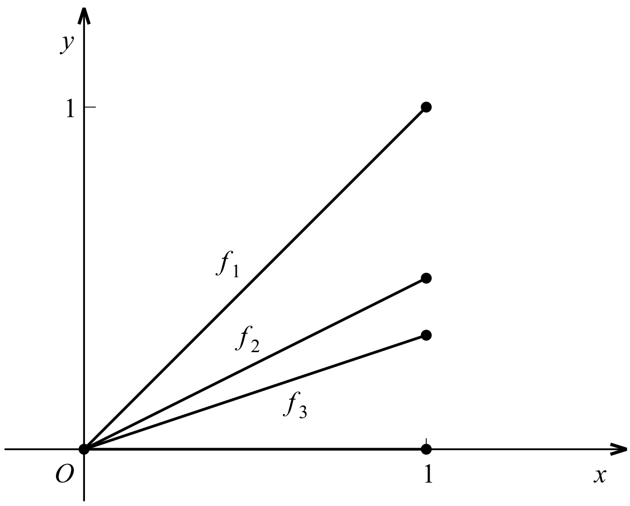
wówczas

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leq \quad x < 1, \\ 1 & \text{dla} \qquad\qquad x = 1, \end{cases}$$

zatem funkcja graniczna ma postać

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leq \quad x < 1, \\ 1 & \text{dla} \qquad\qquad x = 1. \end{cases}$$

Na rys. 86 podajemy wykresy funkcji f_n dla $n = 1, 2, 3$ i wykres funkcji f (narysowany grubszą linią).



[rys. 87]

Przykład 2. Niech

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x, \quad \mathbb{P} = [0, 1],$$

wówczas dla dowolnie ustalonego x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

zatem $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{P}$ (rys. 87).

Z podanych przykładów widać, że granica punktowa ciągu funkcji ciągłych może być funkcją ciągłą (jak w Przykładzie 2) lub nie mieć tej własności (jak w Przykładzie 1). Powstaje pytanie, jakie warunki winien spełniać ciąg funkcji ciągłych na to, aby jego granica również była ciągła. Zanim odpowiemy na to pytanie wprowadzimy pojęcie jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego.

Mówimy, że ciąg $\{f_n\}$ *jest zbieżny jednostajnie do funkcji f w przedziale* $\mathbb{P}$, jeżeli do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, że dla $n > N$ zachodzi nierówność epsilonowa

(1) $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{P}$ (podkreślamy, że liczba N jest dobrana do ε i nie zależy od zmiennej x występującej w nierówności (1)). Zapisujemy

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{w przedziale} \quad \mathbb{P} \tag{2}$$

albo

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{jednostajnie w } \mathbb{P}.$$

W zapisie (2) można opuścić oznaczenie przedziału $\mathbb{P}$, jeżeli nie ma wątpliwości, o jaki przedział chodzi.

Wróćmy do podanych przykładów. Łatwo okazać, że w Przykładzie 2 zbieżność jest jednostajna. Istotnie, ponieważ

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}x \leq \frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad x \in [0,1],$$

nierówność epsilonowa (1) zachodzi w całym przedziale $\mathbb{P}$ dla $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$ - jak widać, liczba N zależy tylko od ε. Natomiast zbieżność w Przykładzie 1 nie jest jednostajna. Aby to udowodnić wystarczy wykazać istnienie takiej liczby $\varepsilon_0 > 0$, że jakkolwiek obierzemy N, zawsze dla pewnego $n > N$ i pewnego $x_n \in \mathbb{P}$ zachodzi nierówność przeciwna do (1) tzn. mamy

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0. \tag{3}$$

Obierzmy $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$, wówczas dla $0 < x < 1$ nierówność (3) ma postać

$$x_n^n \geq \frac{1}{3}.$$

Wystarczy zatem przyjąć

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}},$$

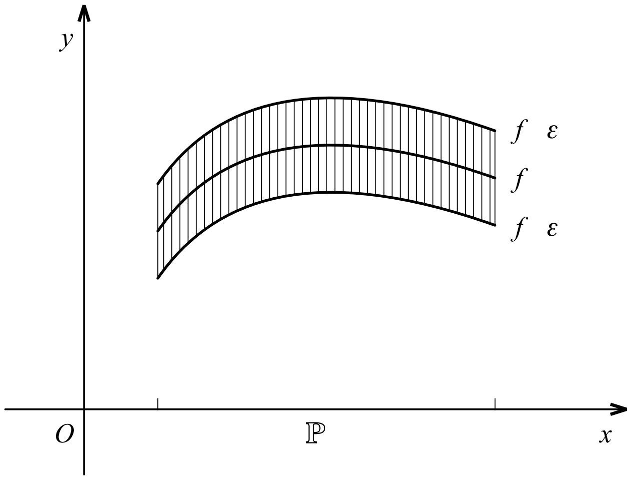
wówczas

$$0 < x_n < 1 \quad \text{oraz} \quad x_n^n = \frac{1}{2} > \frac{1}{3},$$

przy czym n może tu być dowolnie ustaloną liczbą naturalną.

Warunek podany w definicji jednostajnej zbieżności ma prostą interpretację geometryczną. Nierówność (1) można zapisać w równoważnej postaci jako nierówność podwójną

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon. \tag{4}$$



[rys. 88]

Zbiór punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających warunki

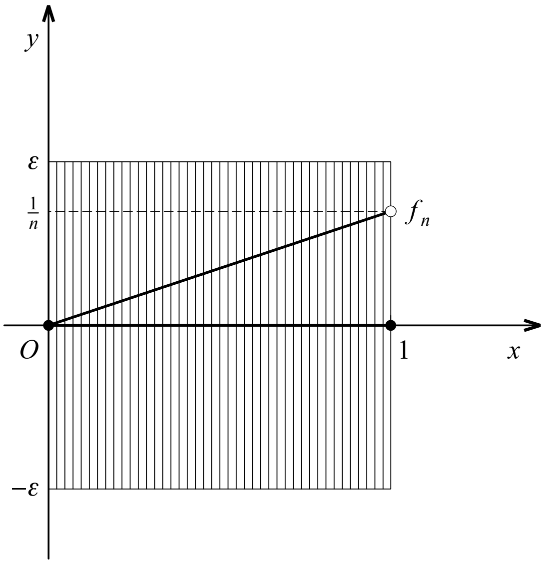
$$x \in \mathbb{P}, \qquad f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$$

nazwijmy *pasem epsilonowym* (obszar zakreskowany na rys. 88). Wówczas nierówność (4) orzeka, że wykres funkcji f_n leży w pasie epsilonowym. Wobec tego mamy równoważne geometryczne sformułowanie definicji jednostajnej zbieżności: Ciąg $\{f_n\}$ *jest zbieżny jednostajnie do funkcji* f *w przedziale* $\mathbb{P}$, jeżeli do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, że dla $n > N$ wykresy funkcji f_n leżą w pasie epsilonowym.

W Przykładzie 2 mieliśmy ciąg zbieżny jednostajnie w przedziale $\mathbb{P} = [0, 1]$. Ponieważ $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{P}$, pas epsilonowy jest określony nierównościami

$$0 \leq x \leq 1, \qquad -\varepsilon < y < \varepsilon.$$

Wykres funkcji f_n leży w pasie epsilonowym jeżeli $\frac{1}{n} < \varepsilon$ czyli $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$ (rys. 89).



[rys. 89]

Natomiast ciąg rozważany w Przykładzie 1 jest zbieżny ale nie jednostajnie. Pas epsilonowy jest sumą prostokąta A_ε określonego nierównościami

$$0 \leq x < 1, \qquad -\varepsilon < y < \varepsilon$$

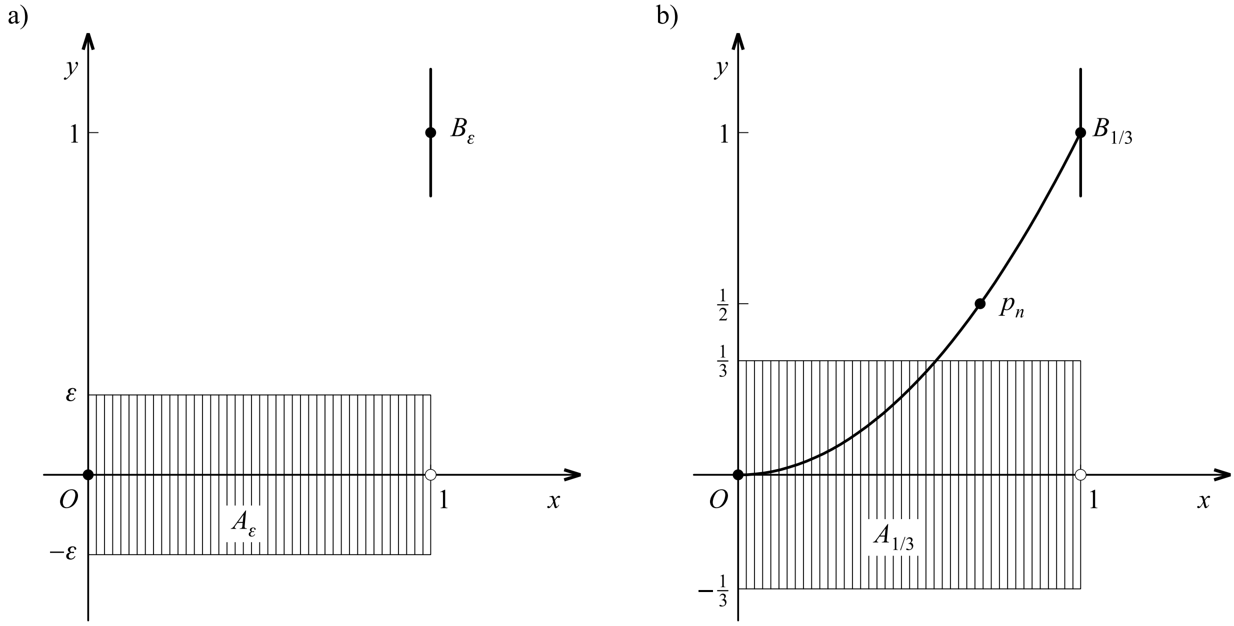
i odcinka B_ε równoległego do osi y-ów

$$x = 1, \qquad 1 - \varepsilon < y < 1 + \varepsilon$$

(rys. 90a). Przyjmując $\varepsilon = \frac{1}{3}$ i ustalając dowolnie n znaleźliśmy punkt

$$p_n = \big(x_n, f_n(x_n)\big) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

należący do wykresu funkcji f_n ale nie należący do pasa epsilonowego (rys. 90b).



[rys. 90a] [rys. 90b]

2. Ciągłość granicy. W prosty sposób można udowodnić

Twierdzenie 1. *Jeżeli dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *funkcja* f_n *jest ciągła w* $\mathbb{P}$ *oraz*

$$f_n \rightrightarrows f \quad w \quad \mathbb{P}$$

to funkcja graniczna f *też jest ciągła w* $\mathbb{P}$.

DOWÓD. Mamy dla $x_0, x_0 + h \in \mathbb{P}$ i dowolnego n

(5) $|f(x_0+h)-f(x_0)| \leq |f(x_0+h)-f_n(x_0+h)|+|f_n(x_0+h)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|$.

Z założenia jednostajnej zbieżności ciągu $\{f_n\}$ wynika, że do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, aby dla $n > N$ zachodziły nierówności

$$|f(x_0 + h) - f_n(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

przy dowolnie obranym przyroście h. Ustalając $n = n_0 > N$ mamy więc

$$|f(x_0 + h) - f_{n_0}(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Ponieważ z założenia funkcja f_{n_0} jest ciągła w punkcie x_0, możemy do ε dobrać liczbę dodatnią δ tak, by zachodziła nierówność

$$|f_{n_0}(x_0 + h) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7}$$

dla $|h| < \delta$. Dodając (6), (7) otrzymujemy wobec (5)

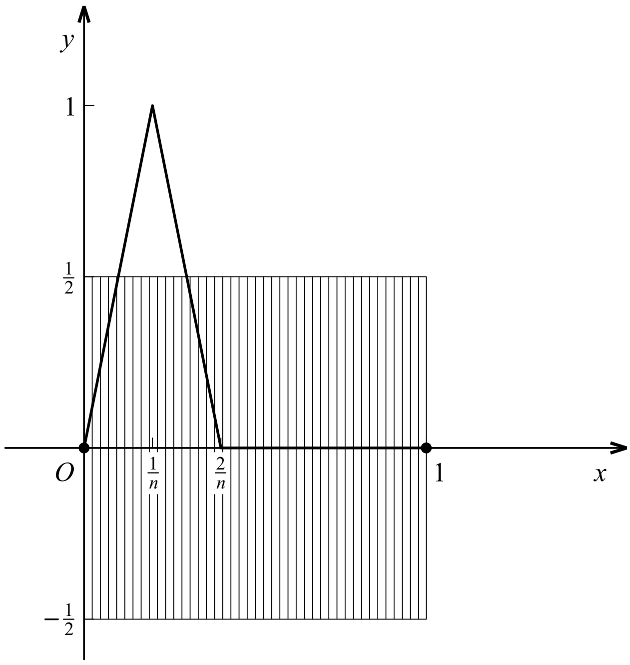
$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

dla $|h| < \delta$ - a to oznacza ciągłość funkcji f w punkcie x_0. $\square$

Udowodnione twierdzenie można krócej sformułować następująco:

Twierdzenie 1'. *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła.*

Wyrazy ciągów funkcyjnych rozważanych w Przykładach 1, 2 były funkcjami ciągłymi. W Przykładzie 1 zbieżność nie była jednostajna i granica była funkcją nieciągłą, natomiast w Przykładzie 2 mieliśmy zbieżność jednostajną i, zgodnie z udowodnionym twierdzeniem, funkcja graniczna była ciągła.



[rys. 91]

Przykład 3. Niech f_n (rys. 91) będzie funkcją liniową w każdym z przedziałów $[0, \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ i spełniającą warunki

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(\frac{1}{n}) = 1, \quad f_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad \frac{2}{n} \leq x \leq 1.$$

Ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo w przedziale $\mathbb{P} = [0, 1]$ do funkcji $f(x) = 0$, bowiem mamy

$$f_n(0) = 0 \quad \text{dla dowolnego} \quad n$$

oraz przy ustalonym $x \in (0, 1]$

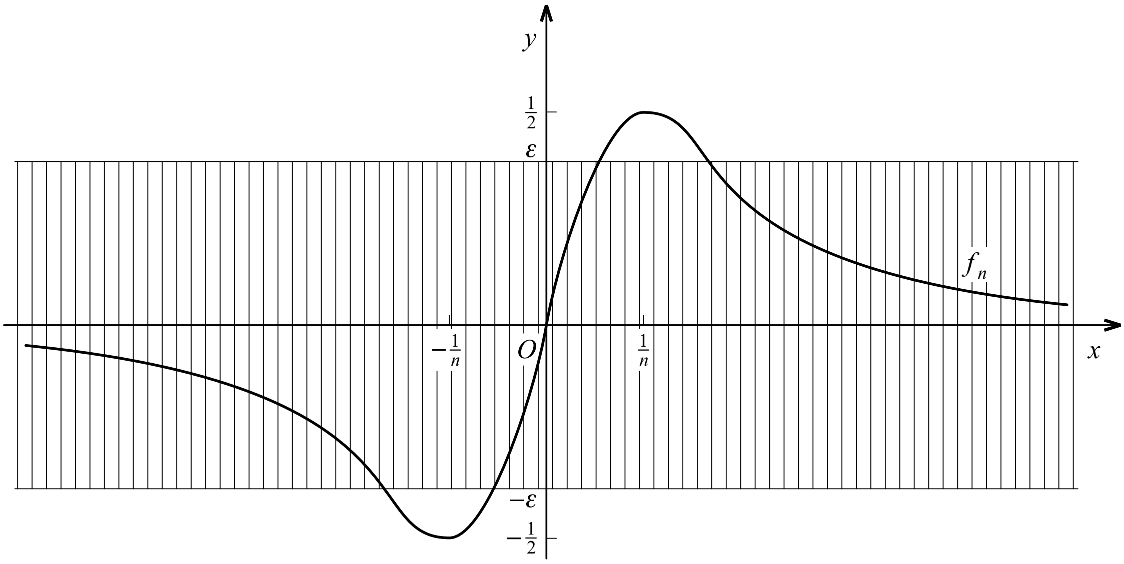
$$f_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad n \geq \frac{2}{x}.$$

Pas epsilonowy jest prostokątem określonym nierównościami

$$0 \leq x \leq 1, \quad -\varepsilon < y < \varepsilon.$$

Ponieważ $f_n(\frac{1}{n}) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, przyjmując $\varepsilon = \frac{1}{2}$ stwierdzamy, że wykres żadnej funkcji f_n nie leży całkowicie w pasie epsilonowym (por. rys 91). Wobec tego ciąg $\{f_n\}$ nie jest zbieżny jednostajnie - mimo to jego granica jest funkcją ciągłą!

Podamy jeszcze jeden przykład ciągu funkcyjnego.



[rys. 92]

Przykład 4. Niech

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \qquad \mathbb{P} = \mathbb{R}.$$

Mamy

$$f_n(0) = 0 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

oraz dla ustalonego $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 0,$$

zatem ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo na całej osi rzeczywistej i przy tym

(8) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Aby zbadać charakter tej zbieżności narysujemy wykres funkcji f_n dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$. Jest to funkcja nieparzysta, zatem jej wykres jest symetryczny względem początku układu i wobec tego wystarczy zbadać funkcję dla $x > 0$. Ponieważ

$$f_n'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2},$$

funkcja f_n jest ściśle rosnąca w przedziale $[0, \frac{1}{n}]$, ściśle malejąca w przedziale $[\frac{1}{n}, \infty)$ i osiąga maksimum właściwe w punkcie $x = \frac{1}{n}$, przy tym

(9) $$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}.$$

Ponadto

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{n}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+n^2} = 0$$

oraz

$$f_n'(0) = n.$$

Wykres funkcji f_n podany jest na rys. 92, na rysunku tym zakreślono również pas epsilonowy który zgodnie z (8) określony jest przez warunki

$$x \in \mathbb{R}, \qquad -\varepsilon < y < \varepsilon.$$

Z rysunku widać, że zbieżność ciągu $\{f_n\}$ nie jest jednostajna na całej osi rzeczywistej, przyjmując bowiem $\varepsilon = \frac{1}{3}$ stwierdzamy, że dla dowolnie obranego n zgodnie z (9) wykres funkcji f_n wykracza poza pas epsilonowy. Łatwo jednak wykazać, że zbieżność jest jednostajna w każdym przedziale $[a,\infty)$ oraz $(-\infty,-a]$, gdzie $a>0$. Ze względu na symetrię wykresu funkcji f_n wystarczy rozważyć przedział $\mathbb{P}_a = [a,\infty)$. Ponieważ dla $n \ge \frac{1}{a}$ funkcja f_n jest w przedziale $\mathbb{P}_a$ ściśle malejąca, mamy dla $x \ge a$

$$f_n(x) \le f_n(a) < \frac{1}{na},$$

zatem nierówność epsilonowa (1) jest spełniona w całym przedziale $\mathbb{P}_a$ jeżeli zachodzi

$$\frac{1}{na} < \varepsilon$$

co ma miejsce dla $n > N = \frac{1}{a\varepsilon}$. Innymi słowy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę

$$N = \frac{1}{a\varepsilon}$$

tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$|f_n(x)| < \varepsilon$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{P}_a$ - a to oznacza, że

$$f_n \rightrightarrows 0$$

w przedziale $\mathbb{P}_a$. Zauważmy, że liczba N jest wprawdzie niezależna od $x \in \mathbb{P}_a$ ale zależy od liczby a określającej przedział $\mathbb{P}_a$. □

Zbieżność jednostajna

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{w} \quad \mathbb{P}$$

pociąga za sobą zbieżność punktową

$$f_n \to f \quad \text{w} \quad \mathbb{P}$$

- wynika to natychmiast z definicji. Z podanych przykładów widać, że wynikanie odwrotne nie zachodzi.

3. Jednostajny warunek Cauchy'ego. Dla ciągów liczbowych rozważanych w rozdz. II wprowadziliśmy warunek Cauchy'ego (§2 punkt 6) pozwalający rozstrzygnąć zagadnienie zbieżności ciągu, gdy nie znamy jego granicy. Podobny warunek można wprowadzić dla ciągów funkcyjnych.

Twierdzenie 2. *Ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $\mathbb{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, by dla $n, k > N$ zachodziła nierówność*

$$|f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon \tag{10}$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{P}$.

Uwaga. Warunek podany w twierdzeniu nazywamy *jednostajnym warunkiem Cauchy'ego.*

DOWÓD. Załóżmy, że

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{w przedziale} \quad \mathbb{P}.$$

Mamy

$$|f_n(x) - f_k(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_k(x)| \tag{11}$$

dla dowolnych n, k oraz $x \in \mathbb{P}$. Z definicji jednostajnej zbieżności wynika, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n, k > N$ zachodziły nierówności

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{12}$$

dla $x \in \mathbb{P}$, wobec tego z (11), (12) dostajemy nierówność (10) dla $n, k > N$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$. Zatem jednostajny warunek Cauchy'ego jest warunkiem koniecznym jednostajnej zbieżności.

Udowodnimy teraz, że jest on dostateczny. Zauważmy najpierw, że jeżeli ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ spełnia w przedziale $\mathbb{P}$ jednostajny warunek Cauchy'ego, to dla dowolnie ustalonego $x \in \mathbb{P}$ ciąg liczbowy $\{f_n(x)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego i wobec tego jest zbieżny na mocy twierdzenia 6 rozdz. II §2. Zatem ciąg funcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo w przedziale $\mathbb{P}$ do pewnej funkcji f. Zastępując w nierówności (10) liczbę ε przez $\varepsilon/2$ i przechodząc do granicy przy $k \to \infty$ dostajemy

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

dla $n > N$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$, przy czym liczba N jest dobrana do ε. Oznacza to , że

$$f_n \rightrightarrows f$$

w przedziale $\mathbb{P}$. □

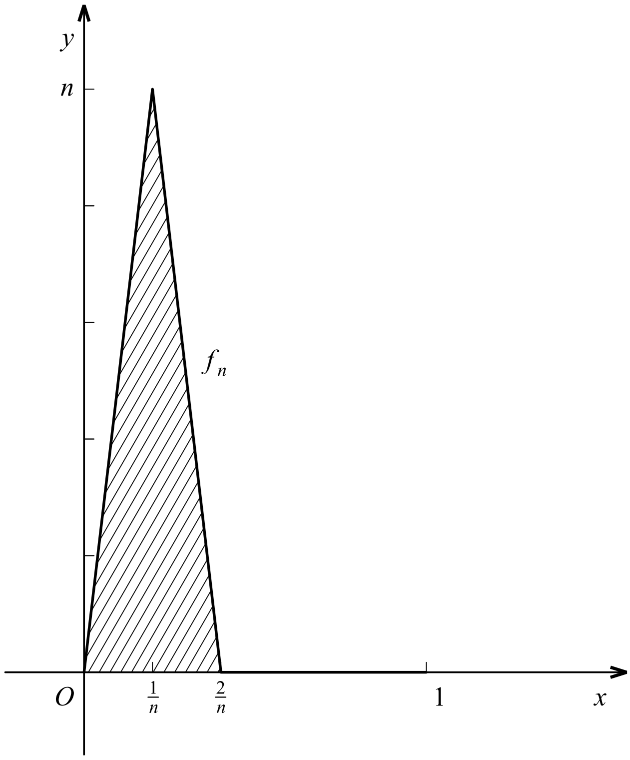
4. Przejście do granicy pod znakiem całki. Przyjmijmy, że

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P} = [a, b]$$

przy czym funkcje f, f_n ($n \in \mathbb{N}$) są ciągłe w $\mathbb{P}$. Czy zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \tag{13}$$

tzn. czy można przechodzić do granicy pod znakiem całki? Łatwo pokazać na przykładzie, że równość (13) może być fałszywa.



[rys. 93]

Przykład 5. Niech f_n będzie funkcją liniową w każdym z przedziałów $[0, \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ i spełniającą warunki

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(\frac{1}{n}) = n, \quad f_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad \frac{2}{n} \le x \le 1 \quad (n \ge 2)$$

(rys. 93). Ustalając $x \in (0,1)$ mamy

$$f_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad n \ge \frac{2}{x},$$

natomiast

$$f_n(0) = f_n(1) = 0$$

dla wszystkich $n \ge 2$. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0$$

w przedziale $\mathbb{P} = [0, 1]$ w sensie zbieżności punktowej i całka po prawej stronie (13) jest równa zeru. Natomiast całka po lewej stronie jest równa polu trójkąta zakreskowanego na rys. 93 czyli

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \qquad (n \geq 2),$$

a więc granica po lewej stronie (13) jest równa jedności.

Bez trudu można zauważyć, że ciąg $\{f_n\}$ nie jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[0, 1]$. Dla danego $\varepsilon > 0$ pas epsilonowy jest bowiem określony nierównościami

$$0 \leq x \leq 1, \qquad -\varepsilon < y < \varepsilon$$

i przyjmując $\varepsilon = 1$ widzimy, że wykres żadnej funkcji f_n nie leży całkowicie w pasie epsilonowym. W tym tkwi przyczyna dla której rozważany w Przykładzie 5 ciąg $\{f_n\}$ nie spełnia równości (13). Mamy mianowicie

Twierdzenie 3. *Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych jednostajnie zbieżnym w przedziale $\mathbb{P} = [a, b]$. Wówczas zachodzi* (13).

DOWÓD. Zgodnie z twierdzeniem 1 funkcja graniczna f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, zatem obie całki w (13) mają sens. Z założenia jednostajnej zbieżności wynika, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

w całym przedziale $\mathbb{P}$. Wobec tego dla $n > N$

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \varepsilon,$$

a to oznacza, że przy założeniach twierdzenia równość (13) jest prawdziwa. □

A oto inne, krótsze sformułowanie udowodnionego twierdzenia:

Twierdzenie 3'. *Jeżeli ciąg funkcji ciągłych jest jednostajnie zbieżny, to można przejść do granicy pod znakiem całki.*

5. Różniczkowanie ciągów funkcyjnych. Wiemy już, że ciąg funkcyjny jednostajnie zbieżny można całkować wyraz za wyrazem tzn. prawdziwa jest równość (13). W przypadku różniczkowania sprawa jest nieco bardziej skomplikowana, jak wskazuje następujący

Przykład 6. Łatwo zauważyć, że funkcje

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(2\pi n x) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

mają ciągłą pochodną w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ i tworzą ciąg jednostajnie zbieżny na całej osi rzeczywistej. Mamy bowiem oszacowanie

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

z którego wynika, że

1^0 $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$,

2^0 zbieżność ta jest jednostajna, gdyż przy dowolnie obranym $\varepsilon > 0$ nierówność epsilonowa (1) zachodzi dla $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$.
Różniczkując otrzymujemy ciąg

$$f_n'(x) = 2\pi\cos(2\pi nx) \tag{14}$$

w pewnych punktach rozbieżny, np. dla $x = \frac{1}{2}$ ciąg ten rozpada się na dwa podciągi

$$f_{2n-1}'(\frac{1}{2}) = -2\pi, \qquad f_{2n}'(\frac{1}{2}) = 2\pi$$

zbieżne do różnych granic (dokładniejsze badanie ciągu (14) por. zadanie 23).

Udowodnimy

Twierdzenie 4. *Załóżmy, że*
(i) *funkcje f_n ($n \in \mathbb{N}$) są klasy C^1 w przedziale $\mathbb{P} = [a, b]$ oraz*

$$f_n' \rightrightarrows g$$

w tym przedziale,
(ii) *istnieje punkt $x_0 \in \mathbb{P}$ taki, że ciąg liczbowy $\{f_n(x_0)\}$ jest zbieżny.*
Wówczas ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie w $\mathbb{P}$ i przy oznaczeniu

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

zachodzi równość

$$f' = g. \tag{15}$$

Uwaga. Równość (15) można zapisać w postaci

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'. \tag{15'}$$

Twierdzenie 4 podaje więc warunki dostateczne do tego, by można było przestawiać operacje różniczkowania i przejścia do granicy czyli, jak mówimy, różniczkować ciąg funkcyjny wyraz za wyrazem.

DOWÓD. Zauważmy, że dla ustalonego $x \in \mathbb{P}$

$$f_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt + f_n(x_0), \tag{16}$$

zatem z założenia (i) wynika w oparciu o twierdzenie 3, że ciąg $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny i jego granica $f(x)$ spełnia równość

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt + c, \tag{17}$$

gdzie

$$c = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0).$$

Funkcja g jest ciągła jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych (Twierdzenie 1), zatem z (17) wynika, że funkcja f jest różniczkowalna i spełnia (15). Aby udowodnić jednostajną zbieżność ciągu $\{f_n\}$ oprzemy się na twierdzeniu 2. Zastępując w (16) n przez k i odejmując stronami dostajemy

$$f_n(x) - f_k(x) = \int_{x_0}^{x} \Big(f'_n(t) - f'_k(t) \Big)\, dt + f_n(x_0) - f_k(x_0) \quad (x \in \mathbb{P}). \tag{18}$$

Na mocy założenia (i) ciąg $\{f'_n\}$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $\mathbb{P}$, spełnia więc jednostajny warunek Cauchy'ego. Oznacza to, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N_1 tak, by dla $n, k > N_1$ i dowolnego $t \in \mathbb{P}$ zachodziła nierówność

$$|f'_n(t) - f'_k(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{19}$$

Ponadto z założenia (ii) wynika, że ciąg liczbowy $\{f_n(x_0)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego (por. rozdz. II §2 punkt 6), zatem do $\varepsilon > 0$ można dobrać N_2 tak, by dla $n, k > N_2$ zachodziła nierówność

$$|f_n(x_0) - f_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Z (18), (19), (20) dostajemy

$$|f_n(x) - f_k(x)| \le \varepsilon$$

dla $n, k > N = \max(N_1, N_2)$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$. Ciąg $\{f_n\}$ spełnia więc jednostajny warunek Cauchy'ego w przedziale $\mathbb{P}$, zatem jest jednostajnie zbieżny w tym przedziale na mocy twierdzenia 2. □

6. Twierdzenie Diniego. Wiemy już, że

1^0 granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą,

ale

2^0 istnieją ciągi funkcji ciągłych zbieżne do funkcji ciągłej w sposób niejednostajny (Przykłady 3, 4, 5).

Jeżeli jednak założymy dodatkowo monotoniczność ciągu funkcyjnego, to z ciągłości granicy wynika, że zbieżność jest jednostajna. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 5 (Diniego). [1] *Załóżmy, że ciąg funkcji ciągłych* $\{f_n\}$ *jest zbieżny punktowo w przedziale* $[a,b]$ *do funkcji ciągłej* f, *przy czym spełniony jest jeden z warunków*

(i) $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ *dla każdego* $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$

lub

(ii) $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$ *dla każdego* $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$.

Wówczas

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{w przedziale} \quad [a,b].$$

DOWÓD. Udowodnimy twierdzenie przy założeniu (i). Oznaczając

$$\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) \qquad (x \in [a,b])$$

widzimy, że

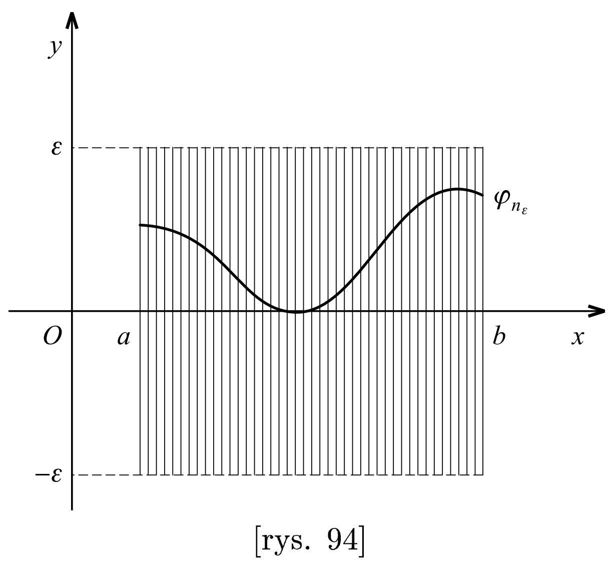
(21) $$\varphi_n(x) \ge \varphi_{n+1}(x) \ge 0 \quad \text{dla} \quad x \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}$$

oraz że

(22) $$\varphi_n \to 0 \quad \text{w przedziale} \quad [a,b].$$

Należy udowodnić, że zbieżność (22) jest jednostajna, przy czym z uwagi na (21) dowód sprowadza się do wykazania, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, by dla wszystkich $x \in [a,b]$ zachodziła nierówność

$$0 \le \varphi_{n_\varepsilon}(x) < \varepsilon.$$



[rys. 94]

[1] Ulisses Dini (1845 - 1918), matematyk włoski, profesor uniwersytetu w Pizie. Autor prac z teorii funkcji rzeczywistych, funkcji analitycznych, teorii powierzchni i równań różniczkowych cząstkowych.

Sformułowany warunek oznacza geometrycznie, że przy dowolnie danym $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja φ_{n_ε} której wykres zawarty jest w pasie epsilonowym (dokładniej - w jego górnej połowie, por. rys.94).

Przeprowadzimy dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności. Przypuśćmy, że podany warunek nie jest spełniony, co oznacza, że przy pewnym $\varepsilon_0 > 0$ wykres żadnej funkcji φ_n nie leży całkowicie w pasie epsilonowym dla $\varepsilon = \varepsilon_0$. Innymi słowy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją funkcja φ_n oraz punkt $x_n \in [a, b]$ takie, że

$$\varphi_n(x_n) \geq \varepsilon_0. \tag{23}$$

Zgodnie z twierdzeniem Bolzano-Weierstrassa (twierdzenie 4 rozdz. II §2) z ciągu $\{x_n\}$ można wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}$ taki, że

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]. \tag{24}$$

Ponieważ funkcje φ_n są ciągłe, z (24) wynika, że przy dowolnie ustalonym m

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0). \tag{25}$$

Zauważmy, że dla dostatecznie dużych k mamy

$$n_k \geq m,$$

a zatem na mocy (21)

$$\varphi_m(x_{n_k}) \geq \varphi_{n_k}(x_{n_k})$$

czyli zgodnie z (23)

$$\varphi_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0.$$

Przechodząc do granicy przy $k \to \infty$ i korzystając z (25) stwierdzamy, że

$$\varphi_m(x_0) \geq \varepsilon_0 > 0$$

przy dowolnie ustalonym m, co przeczy warunkowi (22).

Dowód jednostajnej zbieżności przy założeniu (i) został w ten sposób zakończony. Dowód przy założeniu (ii) przebiega podobnie i proponujemy, by Czytelnik przeprowadził go samodzielnie jako ćwiczenie. □

7*. Przejście do granicy w całce Riemanna - Stieltjesa. Twierdzenie 3 o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki przenosi się bez istotnych zmian na przypadek całki Riemanna -Stieltjesa względem ustalonej funkcji g. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 6. *Jeżeli ciąg funkcji ciągłych $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[a,b]$ do funkcji f zaś g jest funkcją o wahaniu skończonym w tym przedziale, to*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,dg = \int_a^b f\,dg. \tag{26}$$

DOWÓD. Z twierdzenia 1 wynika, że f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$, zatem całki po obu stronach (26) istnieją. Możemy również założyć, że $W_a^b(g)\neq 0$ gdyż w przeciwnym wypadku funkcja g jest stała i obie całki znikają (por. zadanie 18 rozdz. V §6 i zadanie 6 rozdz. V §7), zatem równość (26) jest spełniona w sposób oczywisty. Ponieważ

$$f_n \rightrightarrows f,$$

do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, że dla $n > N$ zachodzi nierówność

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{W_a^b(g)} \tag{27}$$

dla wszystkich $x \in [a,b]$. Opierając się na twierdzeniu 15 rozdz. V §7 dostajemy oszacowanie

$$\left|\int_a^b f_n\,dg - \int_a^b f\,dg\right| \le \int_a^b |f_n - f|\,dg < \varepsilon$$

dla $n > N$ co kończy dowód. □

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że*

(i) *funkcja f jest ciągła w przedziale $[a,b]$,*

(ii) *funkcje g_n $(n\in\mathbb{N})$ mają wspólnie ograniczone wahanie na przedziale $[a,b]$ tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że*

$$W_a^b(g_n) \le M \qquad (n\in\mathbb{N}), \tag{28}$$

$$\text{(iii)}\quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) dla x \in [a,b].$$

Wówczas g ma skończone wahanie na przedziale $[a,b]$ i zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,dg_n = \int_a^b f\,dg. \tag{29}$$

DOWÓD. Dla dowolnie ustalonego podziału

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b \tag{30}$$

i dowolnie ustalonego n mamy

$$V(\Pi, g_n) = \sum_{j=1}^{k} |g_n(x_j) - g_n(x_{j-1})| \le M$$

co po przejściu do granicy przy $n \to \infty$ daje

$$V(\Pi, g) \le M.$$

Ponieważ podział Π był dowolnie obrany, ostatnia nierówność oznacza, że

$$\sup_{\Pi} V(\Pi, g) = W_a^b(g) \le M. \tag{31}$$

Zatem g jest funkcją o wahaniu skończonym w przedziale $[a, b]$ i wobec tego całka po prawej stronie (29) istnieje.

Przejdziemy teraz do oszacowania różnicy

$$A_n = \int_a^b f\, dg - \int_a^b f\, dg_n.$$

Dla ustalonego podziału Π określonego nierównościami (30) mamy

$$\int_a^b f\, dg = \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \Big(f(x) - f(x_j)\Big)\, dg(x) + \sum_{j=1}^{k} f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} dg(x) \tag{32}$$

i podobnie

$$\int_a^b f\, dg_n = \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \Big(f(x) - f(x_j)\Big)\, dg_n(x) + \sum_{j=1}^{k} f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} dg_n(x). \tag{33}$$

Ponieważ (por. zadanie 7 rozdz. V §7)

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} dg(x) = g(x_j) - g(x_{j-1}), \qquad \int_{x_{j-1}}^{x_j} dg_n(x) = g_n(x_j) - g_n(x_{j-1}),$$

dostajemy po uwzględnieniu (32), (33)

$$A_n = B + C_n + D_n, \tag{34}$$

gdzie

$$B = \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \Big(f(x) - f(x_j)\Big)\, dg(x),$$

$$C_n = \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \Big(f(x_j) - f(x) \Big) \, dg_n(x),$$

$$D_n = \sum_{j=1}^{k} f(x_j) \Big(g(x_j) - g(x_{j-1}) - g_n(x_j) + g_n(x_{j-1}) \Big).$$

Z założenia ciągłości funkcji f w przedziale domkniętym $[a, b]$ wynika, że jest ona w tym przedziale jednostajnie ciągła (por. rozdz. III §3 punkt 5), zatem do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by z warunku

$$d(\Pi) < \delta \tag{35}$$

wynikała nierówność

$$|f(x) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3M} \tag{36}$$

dla $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Ustalmy teraz podział Π w taki sposób, by spełniony był warunek (35). Opierając się na twierdzeniu 15 rozdz. V §7 dostajemy wobec (36)

$$|B| \le \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{j=1}^{k} W_{x_{j-1}}^{x_j}(g), \qquad |C_n| \le \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{j=1}^{k} W_{x_{j-1}}^{x_j}(g_n),$$

skąd po zastosowaniu twierdzenia 4 rozdz. V §6 oraz nierówności (28), (31) wynika, że

$$|B| \le \frac{\varepsilon}{3M} W_a^b(g) \le \frac{1}{3}\varepsilon, \qquad |C_n| \le \frac{\varepsilon}{3M} W_a^b(g_n) \le \frac{1}{3}\varepsilon \tag{37}$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Natomiast z założenia (iii) wynika, że

$$\lim_{n \to \infty} D_n = 0,$$

zatem do ε można dobrać liczbę N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$|D_n| < \frac{1}{3}\varepsilon. \tag{38}$$

Równość (34) łącznie z nierównościami (37), (38) zapewnia oszacowanie

$$|A_n| < \varepsilon$$

dla $n > N$, a to oznacza, że

$$\lim_{n \to \infty} A_n = 0.$$

Ostatnia równość daje tezę (29). □

Opierając się na ostatnim twierdzeniu można łatwo udowodnić

Twierdzenie 8. *Załóżmy, że*

(i) *funkcja f jest ciągła w przedziale $[a,b]$,*

(ii) *funkcje g_n są ciągłe w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalne w przedziale otwartym (a,b),*

(iii) *pochodne g_n' są wspólnie ograniczone tzn. istnieje stała $A > 0$ taka, że*

$$|g_n'(x)| \leq A \quad \textit{dla} \quad x \in (a,b),\ n \in \mathbb{N}.$$

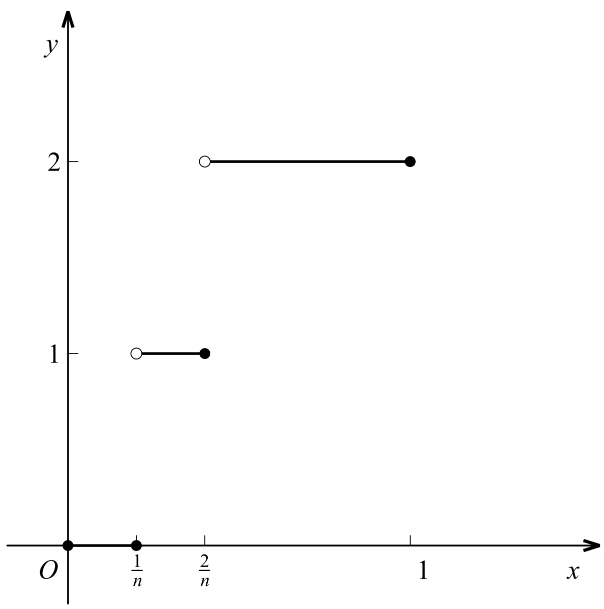
(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \quad \textit{dla} \quad x \in [a,b].$

Wówczas funkcje g_n, g mają skończone wahanie na przedziale $[a,b]$ i zachodzi równość (29).

DOWÓD. Rozumując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2 rozdz. V §6 stwierdzamy, że

$$W_a^b(g_n) \leq A(b-a).$$

Wobec tego funkcje g_n mają skończone wahanie i spełniają założenie (ii) twierdzenia 7, przy czym $M = A(b-a)$. Pozostałe założenia twierdzenia 7 są również spełnione i stąd wynika (29). □



[rys. 95]

Przykład 7. Niech (rys. 95) dla $n > 2$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{dla} \quad \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n}, \\ 2 & \text{dla} \quad \frac{2}{n} < x \leq 1, \end{cases}$$

wówczas dla dowolnie ustalonego $x \in (0,1]$

$$g_n(x) = 2 \quad \text{dla} \quad n > \frac{2}{x}$$

i stąd

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ponadto

$$W_0^1(g_n) = 2 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

a więc funkcje g_n mają wspólnie ograniczone wahanie na przedziale $[0,1]$, zatem zgodnie z twierdzeniem 12 rozdz. V §7 (por. również Wniosek 1 z tego twierdzenia) mamy dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[0,1]$

$$\int_0^1 f\, dg_n = f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}),$$

skąd po przejściu do granicy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f\, dg_n = 2f(0),$$

ponadto

$$\int_0^1 f\, dg = 2f(0).$$

Jak widać, równość (29) jest spełniona.

8*. Przejście do granicy w całce Riemanna z funkcji ograniczonej. Twierdzenie 3 o całkowaniu jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych przenosi się bez zmian na przypadek gdy funkcje f_n są, być może, nieciągłe a jedynie ograniczone i całkowalne w sensie Riemanna. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 9. *Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych na przedziale $[a,b]$ i niech*

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{w przedziale} \quad [a,b].$$

Wówczas funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ i zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{39}$$

DOWÓD. Z założenia jednostajnej zbieżności wynika, że do dowolnego $\eta > 0$ można dobrać N tak, że dla $n > N$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f_n(x)| < \eta \tag{40}$$

dla wszystkich $x \in [a, b]$. Ustalmy liczbę n i zapiszmy nierówność (40) w równoważnej postaci

$$f_n(x) - \eta < f(x) < f_n(x) + \eta \quad (x \in [a, b]). \tag{41}$$

Z założenia funkcja f_n jest ograniczona, z nierówności (41) wynika zatem, że tą samą własność ma funkcja f - możemy więc badać jej całkowalność w sensie Riemanna.

Ponieważ rozważana funkcja f_n jest całkowalna, zgodnie z twierdzeniem 4 rozdz.V §5 do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać podział Π odcinka $[a, b]$ określony nierównościami

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

tak, by zachodziło oszacowanie

$$G(\Pi, f_n) - D(\Pi, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{42}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f, \qquad M_{n,j} = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f_n,$$

$$m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f, \qquad m_{n,j} = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f_n,$$

wówczas na mocy twierdzeń 16 -18 rozdz. III §3 dostajemy z nierówności (41)

$$M_j \leq M_{n,j} + \eta, \qquad m_j \geq m_{n,j} - \eta \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

a stąd

$$G(\Pi, f) \leq G(\Pi, f_n) + \eta(b - a), \qquad D(\Pi, f) \geq D(\Pi, f_n) - \eta(b - a). \tag{43}$$

Z nierówności (43) wynika, że

$$G(\Pi, f) - D(\Pi, f) \leq G(\Pi, f_n) - D(\Pi, f_n) + 2\eta(b - a). \tag{44}$$

Przyjmując

$$\eta = \frac{\varepsilon}{3(b - a)}$$

z nierówności (42), (44) otrzymujemy

$$G(\Pi, f) - D(\Pi, f) < \varepsilon,$$

a to oznacza, że funkcja f jest całkowalna. Dowód równości (39) przebiega tak samo jak dowód twierdzenia 3 i pozostawiamy go Czytelnikowi. □

9. Szeregi funkcyjne - zbieżność punktowa i jednostajna. *Szeregiem funkcyjnym* nazywamy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{45}$$

którego wyrazy są funkcjami określonymi w pewnym ustalonym przedziale $\mathbb{P}$ (ograniczonym lub nie). Niech

$$S_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x) \qquad (x \in \mathbb{P}; \quad n \in \mathbb{N})$$

będzie n-tą sumą częściową szeregu (45). Mówimy, że szereg (45)

1^0 jest *zbieżny punktowo w przedziale* $\mathbb{P}$, jeżeli ciąg funkcyjny $\{S_n\}$ jest zbieżny punktowo w tym przedziale;

2^0 jest *zbieżny jednostajnie w przedziale* $\mathbb{P}$, jeżeli ciąg funkcyjny $\{S_n\}$ jest zbieżny jednostajnie w tym przedziale.

Z twierdzenia 2 wynika natychmiast

Twierdzenie 10. *Szereg funkcyjny* (45) *jest jednostajnie zbieżny w przedziale* $\mathbb{P}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego* $\varepsilon > 0$ *można dobrać liczbę* N *tak, by dla* $n > N$ *i dowolnego* $p \in \mathbb{N}$ *zachodziła nierówność*

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \tag{46}$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{P}$.

DOWÓD. Wystarczy w nierówności (10) przyjąć

$$f_n(x) = S_n(x), \qquad f_k(x) = S_k(x), \qquad k = p + n.$$

□

Warunek konieczny i dostateczny jednostajnej zbieżności sformułowany w twierdzeniu 10 nazywamy *jednostajnym warunkiem Cauchy'ego dla szeregów.*

Przyjmując $p = 1$ w nierówności (46) otrzymujemy jako wniosek warunek konieczny jednostajnej zbieżności szeregu:

Twierdzenie 11. *Jeżeli szereg* (45) *jest jednostajnie zbieżny w przedziale* $\mathbb{P}$ *to*

$$u_n \rightrightarrows 0 \quad \textit{w przedziale} \quad \mathbb{P}.$$

□

Z udowodnionych poprzednio twierdzeń dla ciągów funkcyjnych wynikają odpowiednie twierdzenia dla szeregów funkcyjnych. Mamy mianowicie

Twierdzenie 12. *Załóżmy, że szereg jest jednostajnie zbieżny w przedziale* $\mathbb{P}$ *i że jego wyrazy* u_n $(n \in \mathbb{N})$ *są funkcjami ciągłymi w* $\mathbb{P}$ *i niech*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{47}$$

Wówczas funkcja u *jest ciągła w przedziale* $\mathbb{P}$.

Twierdzenie 13. *Niech* $\mathbb{P}$ *będzie przedziałem domkniętym* $[a, b]$. *Wówczas przy założeniach twierdzenia* 12

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx. \tag{48}$$

Twierdzenie 14. *Załóżmy, że*

(i) *wyrazy* $u_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ *szeregu* (45) *są klasy* C^1 *w przedziale* $\mathbb{P} = [a, b]$,

(ii) *szereg zróżniczkowany*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

jest jednostajnie zbieżny w $\mathbb{P}$,

(iii) *istnieje punkt* $x_0 \in \mathbb{P}$ *taki, że szereg liczbowy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

jest zbieżny.

Wówczas szereg (45) *jest jednostajnie zbieżny w* $\mathbb{P}$ *i przy oznaczeniach*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = v(x) \qquad (x \in \mathbb{P})$$

zachodzi równość

$$u'(x) = v(x) \qquad (x \in \mathbb{P}). \tag{49}$$

Dowody twierdzeń 12 - 14 otrzymujemy stosując odpowiednio twierdzenia 1, 3, 4 do ciągu funkcyjnego $\{S_n\}$. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi. □

Uwaga. Równości (48), (49) można zapisać inaczej w postaci

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx, \tag{48'}$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{49'}$$

Twierdzenia 13, 14 podają więc warunki dostateczne do tego, by szereg funkcyjny można było całkować względnie różniczkować wyraz za wyrazem.

10. Kryteria jednostajnej zbieżności szeregów funkcyjnych. Jak widzimy, stwierdzenie jednostajnej zbieżności szeregu jest ważne ze względów rachunkowych. Podamy teraz warunki dostateczne (czyli kryteria) jednostajnej zbieżności.

Twierdzenie 15 (kryterium Weierstrassa). *Jeżeli*

$$|u_n(x)| \le a_n \quad dla \quad x \in \mathbb{P} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{50}$$

i szereg o stałych wyrazach

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{51}$$

jest zbieżny, to szereg (45) *jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w przedziale* $\mathbb{P}$.

DOWÓD. Zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

przy ustalonym $x \in \mathbb{P}$ (czyli bezwzględna zbieżność szeregu (45)) wynika z nierówności (50) na podstawie kryterium porównawczego zbieżności szeregów o wyrazach stałych (twierdzenie 7 rozdz. IV §1). Udowodnimy jednostajną zbieżność szeregu (45). Z nierówności (50) wynika, że

$$|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \le a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} \tag{52}$$

dla dowolnych $n, p \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{P}$. Szereg (51) jest zbieżny, spełnia więc warunek Cauchy'ego (twierdzenie 6 rozdz. IV §1), zatem do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, że dla $n > N$ suma po prawej stronie (52) jest mniejsza od ε.Wobec tego szereg (45) spełnia w przedziale $\mathbb{P}$ jednostajny warunek Cauchy'ego a więc jest jednostajnie zbieżny zgodnie z twierdzeniem 10. □

Uwaga. Podobne rozumowanie pozwala stwierdzić, że przy założeniach twierdzenia 15 również szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

jest jednostajnie zbieżny w przedziale $\mathbb{P}$.

Przykład 8. Jeżeli przyjmiemy

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

to szereg (45) jest zbieżny przy dowolnie ustalonym $x > 1$ (por. Przykład 1 rozdz. IV §2) czyli punktowo zbieżny w przedziale $(1, \infty)$. Jego sumę oznaczamy

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad (x > 1) \tag{53}$$

- jest to *funkcja* ζ *(dzeta) Riemanna.* Ponieważ

$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a} \quad \text{dla} \quad x \geq a$$

na podstawie kryterium Wierstrassa wnioskujemy, że szereg (53) jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $\mathbb{P}_a = [a, \infty)$ gdzie $a > 1$. Zgodnie z twierdzeniem 12 funkcja ζ jest zatem ciągła w każdym punkcie $x_0 > a$. Ponieważ do dowolnie ustalonego $x_0 > 1$ można dobrać liczbę a tak, by zachodziła nierówność

$$x_0 > a > 1,$$

funkcja ζ jest ciągła w całym przedziale $(1, \infty)$.

Dowód dalszych kryteriów będzie oparty na *przekształceniu Abela* (por. rozdz. IV §3 punkt 1) które polega na zapisaniu sumy

$$S = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \beta_j$$

w postaci

$$S = \alpha_m B_m + \sum_{j=1}^{m-1} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) B_j, \tag{54}$$

gdzie

$$B_r = \beta_1 + \cdots + \beta_r \qquad (1 \leq r \leq m).$$

Udowodnimy najpierw

Lemat. *Załóżmy, że*
(i) *ciąg skończony* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ *jest monotoniczny,*
(ii) *zachodzi nierówność*

$$|B_r| \leq M \quad dla \quad r = 1, 2, \ldots, m.$$

Wówczas

$$|S| \leq M\Big(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|\Big). \tag{55}$$

DOWÓD. Z przedstawienia sumy S w postaci (54) wynika, że

$$|S| \leq M\Big(\sum_{j=1}^{m-1} |\alpha_j - \alpha_{j+1}| + |\alpha_m|\Big).$$

Oznaczając przez A wyrażenie w nawiasie po prawej stronie mamy

$$A = \sum_{j=1}^{m-1} (\alpha_{j+1} - \alpha_j) + |\alpha_m| = \alpha_m - \alpha_1 + |\alpha_m|,$$

gdy ciąg $\{\alpha_j\}$ jest rosnący oraz

$$A = \sum_{j=1}^{m-1} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) + |\alpha_m| = \alpha_1 - \alpha_m + |\alpha_m|,$$

gdy ciąg $\{\alpha_j\}$ jest malejący. W obu przypadkach

$$A \leq |\alpha_1| + 2|\alpha_m|$$

skąd wynika (55). □

Przejdźmy teraz do sformułowania i dowodu dalszych kryteriów jednostajnej zbieżności.

Twierdzenie 16 (kryterium Abela). *Załóżmy, że*
(i) *ciąg $\{a_n(x)\}$ jest monotoniczny przy dowolnie ustalonym $x \in \mathbb{P}$,*
(ii) *istnieje stała $K > 0$ taka, że*

$$|a_n(x)| \leq K \quad dla \quad x \in \mathbb{P},\ n \in \mathbb{N},$$

(iii) *szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \tag{56}$$

jest jednostajnie zbieżny w przedziale $\mathbb{P}$.
Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{57}$$

jest również jednostajnie zbieżny w przedziale $\mathbb{P}$.

DOWÓD. Jako sumę podlegającą przekształceniu Abela obierzemy odcinek szeregu (57)

$$S_{n,m}(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{n+j}(x) b_{n+j}(x).$$

Przyjmując

$$\alpha_j(x) = a_{n+j}(x), \qquad \beta_j(x) = b_{n+1}(x)$$

mamy

$$B_r(x) = b_{n+1}(x) + \cdots + b_{n+r}(x).$$

Z założenia (iii) wynika zgodnie z twierdzeniem 10, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n > N$, dowolnego $r \in \mathbb{N}$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$ zachodziła nierówność

$$|B_r(x)| < \frac{\varepsilon}{3K} = M.$$

Z udowodnionego lematu i założenia (ii) wynika zatem, że

$$|S_{n,m}| < \frac{\varepsilon}{3K}(|a_{n+1}(x) + 2|a_{n+m}(x)|) \le \varepsilon$$

dla $n > N$, dowolnego $m \in \mathbb{N}$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$, przy czym liczba N jest dobrana tylko do ε i nie zależy od x. Oznacza to, że szereg (57) spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego a więc jest jednostajnie zbieżny w przedziale $\mathbb{P}$. □

Przykład 9. Zbadamy jednostajną zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{x}{n}}{n^{x+\pi}} \tag{58}$$

w przedziale $\mathbb{P} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ponieważ dla $x \in \mathbb{P}$

$$x + \pi \ge \frac{\pi}{2} > 1,$$

szereg o wyrazie ogólnym

$$b_n(x) = \frac{1}{n^{x+\pi}}$$

jest jednostajnie zbieżny w przedziale $\mathbb{P}$ (por. Przykład 8). Natomiast ciąg

$$a_n(x) = \cos \frac{x}{n}$$

jest rosnący dla dowolnie ustalonego $x \in \mathbb{P}$ i przy tym

$$\left| \cos \frac{x}{n} \right| \le 1 \qquad (x \in \mathbb{P}, \quad n \in \mathbb{N}).$$

Na podstawie kryterium Abela wnioskujemy, że szereg (58) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $\mathbb{P}$.

Twierdzenie 17 (kryterium Dirichleta). *Załóżmy, że*

(i) $a_n \rightrightarrows 0$ *w przedziale* $\mathbb{P}$,

(ii) *przy dowolnie ustalonym* $x \in \mathbb{P}$ *ciąg* $\{a_n(x)\}$ *jest monotoniczny,*

(iii) *ciąg sum częściowych szeregu* (56) *jest ograniczony w przedziale* $\mathbb{P}$ *tzn. istnieje stała* $K > 0$ *taka, że*

$$|S_n(x)| \leq K \quad dla \quad x \in \mathbb{P},\ n \in \mathbb{N},$$

gdzie

$$S_n(x) = b_1(x) + \cdots + b_n(x).$$

Wówczas szereg (57) *jest jednostajnie zbieżny w przedziale* $\mathbb{P}$.

DOWÓD. Przy oznaczeniach wprowadzonych w dowodzie twierdzenia 16 mamy

$$B_r(x) = S_{n+r}(x) - S_n(x),$$

zatem z założenia (iii)

$$|B_r(x)| \leq 2K = M \qquad (r = 1, \ldots, m),$$

ponadto z założenia (i) wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n > N$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$ zachodziła nierówność

$$|\alpha_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3K} \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

Stosując lemat otrzymujemy zatem

$$|S_{n,m}(x)| \leq 2K(|\alpha_1(x)| + 2|\alpha_m(x)|) < 2K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$$

dla $n > N$, dowolnego $m \in \mathbb{N}$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$, przy czym liczba N jest dobrana tylko do ε i nie zależy pd x. Oznacza to, że szereg (57) spełnia w przedziale $\mathbb{P}$ jednostajny warunek Cauchy'ego, jest więc jednostajnie zbieżny w tym przedziale. □

W przypadku, gdy $\{a_n\}$ jest ciągiem o stałych wyrazach, kryterium Dirichleta przybiera prostszą postać:

Twierdzenie 18. *Załóżmy, że*

1^0 *ciąg* $\{a_n\}$ *jest monotoniczny i zbieżny do zera,*

2^0 *spełnione jest założenie* (iii) *twierdzenia* 17.

Wówczas szereg (57) *jest jednostajnie zbieżny.*

DOWÓD wynika natychmiast z twierdzenia 17, wystarczy zauważyć, że ciąg zbieżny o stałych wyrazach jest jednostajnie zbieżny (por. zadanie 3). □

Przykład 10. Opierając się na kryterium Dirichleta udowodnimy jednostajną zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{59}$$

gdzie $\{a_n\}$ jest ciągiem monotonicznym i zbieżnym do zera. Niech

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \sin nx, \qquad T_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \cos nx.$$

Jak wykazaliśmy w Przykładzie 1 rozdz. IV §3, zachodzą nierówności

$$|S_k| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \qquad |T_k| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$$

dla $x \neq 2r\pi$ (r całkowite), wobec tego założenie (iii) twierdzenia 17 jest spełnione w każdym przedziale

$$\mathbb{P}_r = [2\pi r + \alpha, 2\pi(r+1) - \alpha] \qquad (\alpha > 0, \quad r \quad \text{całkowite}).$$

Zgodnie z twierdzeniem 18 w każdym z tych przedziałów oba szeregi (59) są jednostajnie zbieżne.

Zadania.

1. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach nieujemnych zbieżnym do zera i niech

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{P}.$$

Udowodnić, że

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{w przedziale} \quad \mathbb{P}.$$

2. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem jednostajnie zbieżnym w przedziale $\mathbb{P}$ a g funkcją ograniczoną w tym przedziale. Udowodnić, że ciąg $\{gf_n\}$ jest również jednostajnie zbieżny.

3. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji określonych w przedziale $\mathbb{P}$ takim, że

$$f_n(x) = b_n \qquad (x \in \mathbb{P})$$

począwszy od pewnego $n = n_0$. Udowodnić, że

1^0 ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo w $\mathbb{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{b_n\}$ jest zbieżny;

2^0 jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g,$$

to ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie w $\mathbb{P}$ do funkcji stałej

$$f(x) = g \qquad (x \in \mathbb{P}).$$

4. Udowodnić, że ciąg jednostajnie zbieżny w każdym z przedziałów $[a, b]$, $[b, c]$ jest również jednostajnie zbieżny w przedziale $[a, c]$. Uogólnić na przypadek dowolnej skończonej ilości przedziałów.

5. Udowodnić, że ciąg jednostajnie zbieżny w przedziale $\mathbb{P}$ jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}$.

6. Zbadać zbieżność ciągu

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}$$

(punktową i jednostajną) w następujących przedziałach:

$$\mathbb{P}_1 = [0, \infty), \quad \mathbb{P}_2 = [a, \infty), \quad \mathbb{P}_3 = (-\infty, -a], \quad \mathbb{P}_4 = (-\infty, 0] \qquad (a > 0).$$

Wskazówka. Zacząć od naszkicowania wykresu funkcji f_n. W dowodzie jednostajnej zbieżności oprzeć się na zadaniu 1.

7. Zbadać zbieżność punktową ciągu

$$f_n(x) = nx(1 - x)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

w przedziale

$$\text{a.)} \quad \mathbb{P} = [0, 2], \qquad \text{b.)} \quad \mathbb{P} = (-\infty, 0), \qquad \text{c.)} \quad \mathbb{P} = (2, \infty).$$

W jakich przedziałach zbieżność ta jest jednostajna?
Wskazówka. W punkcie a.) zbadać najpierw zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

W celu zbadania jednostajnej zbieżności naszkicować wykres funkcji f_n przy ustalonym n, następnie skorzystać z zadań 1 i 3.

8. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu

$$\text{a.)} \quad f_n(x) = (1 - x^2)^n, \qquad \text{b.)} \quad f_n(x) = x^n(1 - x^n),$$
$$\text{c.)} \quad f_n(x) = x^n(1 - x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Wskazówka. W celu zbadania jednostajnej zbieżności naszkicować wykres funkcji f_n przy ustalonym n, następnie skorzystać z zadań 1, 3.

9. Znaleźć granicę punktową dla $x \in \mathbb{R}$ ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$$

i wykazać, że zbieżność jest jednostajna na całej osi rzeczywistej.
Wskazówka. Zacząć od narysowania wykresu funkcji f_n przy ustalonym n. W dowodzie jednostajnej zbieżności oprzeć się na zadaniu 1.

10. Znaleźć granicę punktową f ciągu funkcyjnego

$$\text{a.)}\quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \qquad \text{b.)}\quad f_n(x) = \mathrm{arctg}\, nx \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Wykazać, że zbieżność nie jest jednostajna na całej osi rzeczywistej, natomiast jest jednostajna w każdym przedziale (ograniczonym lub nie) nie zawierającym zera. W punkcie a.) obliczyć dla dowolnego $c > 0$

$$\int_0^c f(x)\,dx \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^c f_n(x)\,dx$$

i porównać wynik z twierdzeniem 3.
Wskazówka. Zacząć od narysowania wykresu funkcji f_n przy ustalonym n. W dowodzie jednostajnej zbieżności oprzeć się na zadaniu 1.

11. Rozważmy ciągi funkcyjne

$$\text{(i)}\quad f_n(x) = \begin{cases} nx(\frac{1}{n} - x) & \text{dla} \quad 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla} \quad \frac{1}{n} < x \le 1; \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad f_n(x) = \begin{cases} n^2x(\frac{1}{n} - x) & \text{dla} \quad 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla} \quad \frac{1}{n} < x \le 1; \end{cases}$$

(iii) f_n jest funkcją liniową w każdym z przedziałów

$$[0, \frac{1}{2^{n+1}}], \quad [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}], \quad [\frac{1}{2^n}, 1]$$

spełniającą warunki

$$f_n(0) = f_n(\frac{1}{2^n}) = f_n(1) = 0, \qquad f_n(\frac{1}{2^{n+1}}) = 1;$$

(iv) $f_n(\frac{1}{2^{n+1}}) = 2^{n+1}$, poza tym jak w punkcie (iii).

Obliczyć granicę punktową

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (x \in [0,1])$$

i granicę całek

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Sprawdzić

a.) czy zbieżność jest jednostajna,

b.) czy zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Porównać z twierdzeniem 3.
Wskazówka. Punkt a.) zacząć od sporządzenia wykresu funkcji f_n przy ustalonym n.

12. Rozważmy ciąg funkcyjny

$$\text{(i)}\quad f_n(x) = \begin{cases} 2nx^2 & \text{dla}\quad 0 \le x \le \frac{1}{2n}, \\ -2nx^2 + 4x - \frac{1}{n} & \text{dla}\quad \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{n} & \text{dla}\quad \frac{1}{n} \le x \le 1; \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad f_n(x) = \begin{cases} n(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}nx^3) & \text{dla}\quad 0 \le x < \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{6n} & \text{dla}\frac{1}{n} \le x \le 1; \end{cases}$$

$$\text{(iii)}\quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}n^2x^2 & \text{dla}\quad 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 2nx - \frac{1}{2}n^2x^2 - 1 & \text{dla}\quad \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 1 & \text{dla}\quad \frac{2}{n} \le x \le 1; \end{cases}$$

$$(n \ge 2).$$

Sprawdzić, że

a.) przy ustalonym n funkcja f_n jest klasy C^1 w przedziale $[0,1]$,

b.) istnieją granice punktowe

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) \qquad (x \in [0,1]).$$

Następnie zbadać, czy ciągi $\{f_n\}$, $\{f_n'\}$ są zbieżne jednostajnie oraz czy zachodzi równość

$$f'(x) = g(x) \qquad (x \in [0,1]).$$

Porównać z twierdzeniem 4.

13. Ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ nazywamy *niemal jednostajnie zbieżnym* w przedziale $\mathbb{P}$, jeżeli jest on jednostajnie zbieżny w każdym przedziale domkniętym i ograniczonym $[a,b] \subset \mathbb{P}$. Udowodnić, że granica ciągu funkcji ciągłych niemal jednostajnie zbieżnego w przedziale $\mathbb{P}$ jest również ciągła w $\mathbb{P}$.
Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 1.

14. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$. Oznaczmy przy ustalonym $n \in \mathbb{N}$

$$d_n = \frac{b-a}{n}, \qquad x_k = a + kd_n \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

i niech f_n będzie funkcją liniową w każdym z przedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ spełniającą warunki

$$f_n(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Podać sens geometryczny funkcji f_n i udowodnić, że

$$f_n \rightrightarrows f$$

w przedziale $[a,b]$. Narysować wykres f_n dla $n = 1, 2, 3$.
Wskazówka. Wykorzystać jednostajną ciągłość funkcji f (por. rozdz.III §3 punkt 5, w szczególności twierdzenie 9).

15. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym punktowo do funkcji f w przedziale $[a,b]$. Zakładamy, że
1^0 funkcje f_n, f są ciągłe w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalne wewnątrz tego przedziału,
2^0 istnieje stała $A > 0$ taka, że

$$|f_n'(x)| \leq A, \qquad |f'(x)| \leq A \qquad \text{dla} \quad x \in (a,b), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{w przedziale} \quad [a,b].$$

Wskazówka. Zacząć od przypadku

$$f(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in [a,b]$$

i zauważyć, że funkcje f_n są jednakowo ciągłe tzn. do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, że z warunku

$$x_1, x_2 \in [a,b], \qquad |x_1 - x_2| < \delta$$

wynika nierówność

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

16*. Mówimy, że $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji o wahaniu wspólnie ograniczonym w przedziale $[a,b]$ jeżeli istnieje stała $A > 0$ taka, że

$$W_a^b(f_n) \leq A \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podać przykład ciągu $\{f_n\}$ funkcji kawałkami gładkich o wahaniu wspólnie ograniczonym w przedziale $[0,1]$ zbieżnego punktowo ale nie jednostajnie do funkcji stałej. Porównać z zadaniem 14.

17*. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji o wahaniu skończonym w przedziale $[a,b]$ takim, że dla pewnego $x_0 \in [a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0.$$

a.) Udowodnić, że z warunku

$$\lim_{n\to\infty} W_a^b(f_n) = 0$$

wynika

$$f_n \rightrightarrows 0 \quad \text{w przedziale} \quad [a,b].$$

b.) Na przykładzie ciągu

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx \qquad (x \in [0,\pi])$$

pokazać, że wynikanie odwrotne nie zachodzi.

Wskazówka. W punkcie b.) oszacować z dołu wahanie $W_0^\pi(f_n)$ dobierając odpowiednio podział odcinka $[0,\pi]$. W dowodzie jednostajnej zbieżności oprzeć się na zadaniu 1.

18*. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych zbieżnym punktowo do funkcji ciągłej f w przedziale $[a,b]$. Udowodnić, że dla dowolnej funkcji g kawałkami stałej w przedziale $[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, dg = \int_a^b f\, dg.$$

Wskazówka. Oprzeć się na wniosku 1 rozdz.V §7.

19*. Niech $\{g_n\}$ będzie ciągiem funkcji o wahaniu wspólnie ograniczonym (por. zadanie 16) zbieżnym punktowo w przedziale $[a,b]$ do funkcji stałej. Udowodnić, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f\, dg_n = 0.$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 7, następnie skorzystać z zadania 6 rozdz. V §7.

20*. Niech g będzie funkcją o wahaniu skończonym w przedziale $[a,b]$ i niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych względem funkcji g na tym przedziale (por. rozdz. V §7) zbieżnym jednostajnie do funkcji f. Udowodnić, że

1^0 funkcja f również jest całkowalna względem funkcji g na przedziale $[a,b]$,

2^0 zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, dg = \int_a^b f\, dg.$$

Wskazówka. Zacząć od przypadku gdy g jest funkcją rosnącą i zmodyfikować dowód twierdzenia 9.

21*. Niech

$$\text{a.)}\quad f_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{x}\,(1-nx) & \text{dla} \quad 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla} \quad \frac{1}{n} < x \le 1, \end{cases} \qquad g(x) = x\sqrt{x};$$

$$\text{b.)}\quad f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{dla} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2n}, \\ 1-nx & \text{dla} \quad \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla} \quad \frac{1}{n} \le x \le 1, \end{cases} \qquad g(x) = 2x+1;$$

c.) f_n jak w punkcie b.), $g(x) = x^2$.
Opierając się na twierdzeniu 11 rozdz. V §7 obliczyć całkę

$$K_n = \int_0^1 f_n\, dg$$

i znaleźć

$$\lim_{n\to\infty} K_n.$$

Następnie znaleźć granice ciągów funkcyjnych $\{f_n\}$ oraz $\{f_n g'\}$ i zbadać rodzaj zbieżności. Wynik porównać z twierdzeniem 6.
Wskazówka. Naszkicować wykres funkcji f_n i $h_n = f_n g'$ przy ustalonym n.

22. Niech

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

Dla dowolnie ustalonego $x \in \mathbb{R}$ znaleźć granicę

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

i wykazać, że zbieżność ta nie jest jednostajna w żadnym przedziale $[0, a]$, natomiast jest jednostajna w każdym przedziale $(-\infty, -a]$ oraz $[a, \infty)$ (gdzie $a > 0$). Następnie obliczyć całki

$$K_n = \int_0^1 f_n\, dx, \qquad K = \int_0^1 f\, dx$$

i sprawdzić, że zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} K_n = K.$$

Porównać z twierdzeniem 9.
Wskazówka. Zacząć od narysowania wykresu funkcji f_n przy ustalonym n. W dowodzie jednostajnej zbieżności skorzystać z zadania 1. Przy obliczaniu całki K oprzeć się na twierdzeniu 20 rozdz. V §5

23*. Zbadać zachowanie się ciągów

$$f_n(x) = \cos(2\pi nx), \qquad g_n(x) = \sin(2\pi nx)$$

w zależności od $x \in \mathbb{R}$ i wykazać, że
a.) ciąg $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny tylko wtedy, gdy x jest liczbą całkowitą,
b.) ciąg $\{g_n(x)\}$ jest zbieżny tylko wtedy, gdy $x = \frac{p}{2}$ gdzie p jest liczbą całkowitą.
Wskazówka. Oprzeć się na własnościach ciągu $a_n = \{nx\}$ omówionych w rozdz. II §2 punkt 8 i na wzorach redukcyjnych

$$\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha), \quad \sin\alpha = \sin(\pi - \alpha), \quad \sin(2\pi - \alpha) = \sin(\pi + \alpha).$$

24. Znaleźć sumy szeregów

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Wskazówka. Wprowadzając pomocnicze funkcje

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k, \qquad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k,$$

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^k, \qquad j_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^k$$

zauważyć najpierw, że wyrażenia

$$g_n(\frac{1}{2}), \quad h_n(\frac{1}{2}), \quad j_n(\frac{1}{2})$$

stanowią stanowią sumy częściowe podanych szeregów - zadanie sprowadza się zatem do obliczenia granicy ciągów funkcyjnych $\{g_n\}$, $\{h_n\}$, $\{j_n\}$ w punkcie $x = \frac{1}{2}$. Następnie zauważyć, że związki

$$g_n(x) = xf_n'(x), \quad h_n(x) = xg_n'(x), \quad j_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt + x$$

pozwalają obliczyć sumy $g_n(x)$, $h_n(x)$, $j_n(x)$. Przy obliczaniu granic ciągów $\{g_n(\frac{1}{2})\}$, $\{h_n(\frac{1}{2})\}$ wykorzystać zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

dla $x = \frac{1}{2}$, natomiast przy obliczaniu granicy ciągu $\{j_n(\frac{1}{2})\}$ oprzeć się na twierdzeniu 3 i skorzystać z zadania 1.

25. Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}.$$

W jakich przedziałach jest on zbieżny jednostajnie?

26. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)(1+2x^2)\cdots(1+nx^2)}$$

jest
a.) bezwzględnie zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
b.) jednostajnie zbieżny w każdym przedziale ograniczonym nie zawierającym zera.

27. Niech

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(\frac{1}{x^2} + n)n(n+1)(n+2)\Big]^{-\frac{1}{3}}.$$

Okazać, że
a.) funkcja g jest określona dla wszystkich $x \neq 0$ (tzn. szereg jest zbieżny dla tych wartości x),

b.) $\lim_{x\to 0} g(x) = 0.$

Wskazówka. Zauważyć, że po odpowiednim przekształceniu n-tego wyrazu otrzymujemy szereg jednostajnie zbieżny na całej osi rzeczywistej, następnie oprzeć się na twierdzeniu 12.

28. Udowodnić, że funkcja

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+(nx)^2}$$

jest
a.) określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
b.) ciągła dla $x \neq 0$, nieciągła w punkcie $x = 0$.
Wskazówka. Udowodnić jednostajną zbieżność szeregu w każdym przedziale nie zawierającym zera, następnie wykazać nierówność

$$g(\frac{1}{m}) > \frac{1}{2} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

29. Opierając się na równości

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} = \frac{x}{1+x} \qquad (x > 1)$$

(uzasadnić ją!) okazać, że

$$\log \frac{b(1+a)}{a(1+b)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{b^n} - \frac{1}{a^n} \right)$$

dla dowolnych $1 < a < b$.
Wskazówka. Okazać najpierw, że szereg jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[a, b]$.

30. Udowodnić bezwzględną i jednostajną zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{x}{n}) \sin(nx)}{n^2}$$

na całej osi rzeczywistej.

31. Udowodnić jednostajną zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos \frac{x}{n}}{n!}$$

w każdym przedziale ograniczonym, stosując
  a.) kryterium Weierstrassa,
  b.) kryterium Abela.

32. Udowodnić jednostajną zbieżność szeregu

$$\text{a.)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{1+nx} \quad \text{w przedziale} \quad [0, 1],$$

$$\text{b.)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n} \quad \text{w przedziale} \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

$$\text{c.)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x+n}{n^2} \quad \text{w każdym przedziale} \quad [0, a], a > 0.$$

33. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin x}{n} \qquad x \in \mathbb{P} = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$$

jest w przedziale $\mathbb{P}$ zbieżny jednostajnie ale nie jest w tym przedziale bezwzględnie zbieżny.