§2. Szeregi potęgowe.

♡ ♡ ♡

1. Zbieżność szeregu potęgowego. *Szeregiem potęgowym* nazywamy szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n. \tag{1}$$

Liczby a_n nazywamy *współczynnikami szeregu* (1) zaś liczbę x_0 jego *środkiem* (ten geometryczny termin stanie się zrozumiały w dalszym ciągu wykładu). Zauważmy, że szereg (1) jest zawsze zbieżny dla $x = x_0$, gdyż wtedy redukuje się on do jednego wyrazu a_0.

Aby zbadać zbieżność szeregu (1) przy ustalonym $x \neq x_0$ spróbujmy zastosować kryterium Cauchy'ego dla szeregów o wyrazach stałych (rozdz. IV §2 twierdzenie 4) do szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|,$$

gdzie

$$u_n(x) = a_n(x-x_0)^n.$$

Mamy

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x-x_0|,$$

zatem jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lambda|x-x_0| \tag{2}$$

i, przy założeniu że $\lambda \neq 0$, na mocy kryterium Cauchy'ego szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny dla x spełniających nierówność

$$|x-x_0| < \frac{1}{\lambda} = R,$$

czyli leżących w przedziale otwartym

$$\mathbb{P}_R = (x_0-R, x_0+R)$$

(jest to przedział o długości $2R$ i środku x_0).

Dla x leżących poza przedziałem domkniętym $[x_0-R, x_0+R]$ mamy z uwagi na (2)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} > 1,$$

skąd wynika, że dla dużych n zachodzi nierówność

$$|u_n(x)| > 1,$$

szereg (1) nie może być zatem zbieżny, gdyż jego ogólny wyraz nie dąży do 0 (por. twierdzenie 8 rozdz. IV §1). Natomiast na końcach przedziału $\mathbb{P}_R$ kryterium Cauchy'ego nie pozwala rozstrzygnąć zbieżności szeregu (1), gdyż w tych punktach granica (2) jest równa 1. Dokładniejszy opis własności szeregu (1) daje następujące twierdzenie (por. rys. 96):

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że istnieje granica (skończona lub niewłaściwa)*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda. \tag{3}$$

Wówczas

(i) *gdy* $\lambda = \infty$, *szereg* (1) *jest rozbieżny dla każdego* $x \neq x_0$*;*

(ii) *gdy* $\lambda = 0$, *szereg* (1) *jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich* x *i jednostajnie zbieżny w każdym przedziale ograniczonym* $[a, b]$*;*

(iii) *gdy* $0 < \lambda < \infty$, *szereg* (1) *jest*

a.) *bezwzględnie zbieżny w przedziale otwartym*

$$\mathbb{P} = (x_0 - R, x_0 + R),$$

gdzie

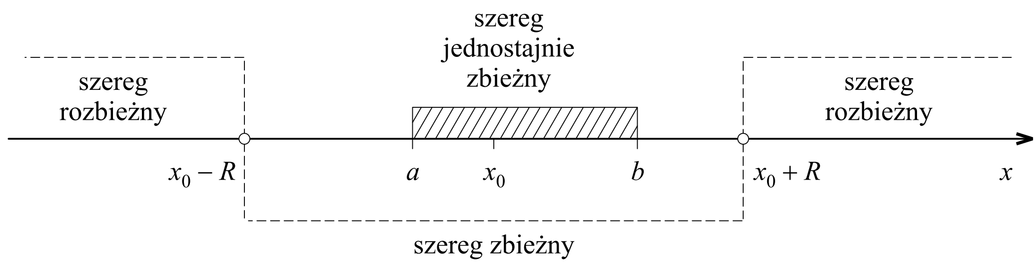
$$R = \frac{1}{\lambda}, \tag{4}$$

b.) *rozbieżny poza przedziałem domkniętym*

$$[x_0 - R, x_0 + R],$$

c.) *jednostajnie zbieżny w każdym przedziale*

$$[a, b] \subset \mathbb{P}.$$



[rys. 96]

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że w przypadku (i) z równości (2) wynika dla $x \neq x_0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \infty, \tag{5}$$

a stąd

$$|u_n(x)| > 1$$

dla dostatecznie dużych n. Szereg (1) nie może więc być zbieżny, gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności (por. rozdz. IV §1 twierdzenie 8). Natomiast w przypadku (ii) z równości (2) otrzymujemy dla dowolnego x

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = 0, \tag{6}$$

a to na mocy kryterium Cauchy'ego zapewnia bezwzględną zbieżność szeregu (1).

Przejdźmy do przypadku (iii). Jak już zauważyliśmy, z równości (2) wynika, że

1^0 szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny dla $x \in \mathbb{P}$ - co daje punkt a.) tezy

oraz

2^0 szereg (1) jest rozbieżny w każdym punkcie x należącym do zbioru

$$D = \mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R],$$

co daje punkt b.) tezy.

Pozostaje do udowodnienia jednostajna zbieżność szeregu (1). Wystarczy założyć (por. zadanie 5 §1), że przedział $[a, b]$ jest postaci

$$\mathbb{P}_d = [x_0 - d, x_0 + d],$$

gdzie d jest dowolną liczbą w przypadku (ii) lub $0 < d < R$ w przypadku (iii). Mamy wówczas dla $x \in \mathbb{P}_d$ oszacowanie

$$|u_n(x)| \leq |a_n| d^n = |u_n(x_0 + d)|. \tag{7}$$

Ponieważ, jak już wykazaliśmy, szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny dla $x = x_0 + d$, nierówność (7) zapewnia jednostajną zbieżność szeregu (1) w przedziale $\mathbb{P}_d$ na mocy kryterium Weierstrassa (twierdzenie 15 §1). □

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego (1) nazywamy

1^0 przedział

$$\mathbb{P} = (x_0 - R, x_0 + R) \qquad (R > 0),$$

jeżeli szereg jest bezwzględnie zbieżny dla $x \in \mathbb{P}$ i rozbieżny dla x leżących poza przedziałem domkniętym $[x_0 - R, x_0 + R]$;

2^0 przedział $(-\infty, \infty)$, jeżeli szereg jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Powtarzając rozumowanie przeprowadzone w dowodzie twierdzenia 1 stwierdzamy łatwo, że szereg (1) jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale domkniętym $[a, b]$ zawartym w przedziale zbieżności.

W przypadku 1^0 liczbę R nazywamy *promieniem zbieżności szeregu potęgowego* (1), w przypadku 2^0 mówimy, że *promień zbieżności* $R = \infty$. Jeżeli szereg (1) jest rozbieżny dla każdego $x \neq x_0$, to przyjmujemy, że *promień zbieżności* $R = 0$, przedział zbieżności redukuje się wówczas do jednego punktu x_0.

Z twierdzenia 1 wynika, że przy założeniu istnienia granicy (3) promień zbieżności szeregu (1) można obliczać posługując się wzorem (4) przy dodatkowej umowie, że

$$R = \infty, \quad \text{gdy} \quad \lambda = 0, \qquad R = 0, \quad \text{gdy} \quad \lambda = \infty. \tag{8}$$

Jeżeli wszystkie współczynniki a_n są różne od zera oraz istnieje granica

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \infty,$$

to (por. rozdz. IV §2) jest ona równa granicy (3). Promień zbieżności można wówczas obliczać ze wzoru (4) względnie (8), przyjmując

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \tag{9}$$

co może być wygodniejsze ze względów rachunkowych.

W dalszym ciągu (punkt 5) okażemy, że każdy szereg potęgowy ma promień zbieżności $0 \leq R \leq \infty$ oraz przedział zbieżności spełniający (przy $R > 0$) jeden z warunków 1^0, 2^0, również gdy nie istnieje granica (3.)

Przykład 1. Rozważmy szeregi potęgowe o środku $x_0 = 0$

$$(\alpha)\quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \qquad (\beta)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad (\gamma)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

ponieważ

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

wszystkie trzy szeregi mają ten sam promień zbieżności $R = 1$, zatem ich przedziałem zbieżności jest przedział otwarty

$$\mathbb{P} = (-1, 1).$$

Zbadamy zachowanie się szeregów na końcach tego przedziału. Dla $x = 1$ ogólny wyraz szeregu (α) przyjmuje postać $b_n = n$ zaś dla $x = -1$ jest równy $c_n = (-1)^n n$. Ciąg $\{b_n\}$ jest rozbieżny do ∞ zaś ciąg $\{c_n\}$ nie ma granicy (nawet niewłaściwej), zatem szereg (α) w obu punktach końcowych jest rozbieżny gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności (por. twierdzenie 8 rozdz. IV §1). Szereg (β) dla $x = -1$ ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

a więc jest zbieżny (por. Przykład 2 rozdz. IV §3) natomiast dla $x = 1$ staje się szeregiem harmonicznym a więc rozbieżnym (por. Przykład 4 rozdz. IV §1). Wreszcie szereg (γ) jest zbieżny w obu punktach końcowych przedziału $\mathbb{P}$. Dla $x = 1$ staje się on szeregiem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{10}$$

którego zbieżność udowodniliśmy w Przykładzie 6 rozdz. IV §1, natomiast dla $x = -1$ przyjmuje postać szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \tag{11}$$

którego zbieżność otrzymujemy natychmiast z nierówności

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

stosując kryterium porównawcze (twierdzenie 7 rozdz. IV §1) i korzystając ze zbieżności szeregu (10) (zbieżność szeregu (11) wynika również z twierdzenia Leibniza (twierdzenie 2 rozdz. IV §3).) □

2. Regularność sumy szeregu potęgowego. Suma $u(x)$ szeregu potęgowego (1) o dodatnim promieniu zbieżności jest funkcją określoną w przedziale zbieżności i ewentualnie na jego końcach. Zauważmy, że wyrazy szeregu są funkcjami ciągłymi w całym zbiorze liczb rzeczywistych i że szereg jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $[a, b]$ zawartym w przedziale zbieżności. Z twierdzenia o ciągłości sumy szeregu jednostajnie zbieżnego (twierdzenie 12 §1) wynika zatem, że *suma szeregu* (1) *jest funkcją ciągłą w całym przedziale zbieżności*, gdyż do każdego punktu $\bar{x} \in \mathbb{P}$ można dobrać przedział $[a, b]$ tak, by zachodziła relacja

$$\bar{x} \in [a, b] \subset \mathbb{P}.$$

Powstaje pytanie, czy można powiedzieć coś więcej o regularności funkcji $u(x)$ - na przykład, czy jest ona różniczkowalna. Aby zastosować twierdzenie o różniczkowaniu szeregu funkcyjnego (twierdzenie 14 §1) musimy zbadać szereg utworzony z szeregu (1) przez formalne zróżniczkowanie, czyli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \tag{12}$$

który dla $x \neq x_0$ można zapisać w postaci

$$\frac{1}{x - x_0} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n. \tag{13}$$

Zakładając, że istnieje granica (3) możemy łatwo znaleźć promień zbieżności R_1 szeregu (13). Mamy mianowicie

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

i stąd

$$R_1 = R.$$

Wiemy, że szereg (12) jest zbieżny dla $x = x_0$ (gdyż wtedy redukuje się do jednego wyrazu a_1), zaś dla $x \neq x_0$ jego zbieżność jest równoważna zbieżności szeregu (13). Stąd wniosek, że promień zbieżności i przedział zbieżności szeregu (1) i szeregu (12) powstającego przez zróżniczkowanie go wyraz za wyrazem są takie same. Z przeprowadzonych rozważań wynika łatwo

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że istnieje granica* (3) *i że szereg potęgowy* (1) *ma dodatni promień zbieżności* $(0 < R \leq \infty)$. *Wówczas jego suma*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

jest funkcją klasy C^∞ *w przedziale zbieżności* $\mathbb{P}$ *i jej pochodne dowolnego rzędu dla* $x \in \mathbb{P}$ *obliczamy różniczkując szereg wyraz za wyrazem.*

DOWÓD. Szereg zróżniczkowany (12) jest szeregiem potęgowym, można więc do niego zastosować twierdzenie 1. Ponieważ, jak już zauważyliśmy, przedział zbieżności $\mathbb{P}$ jest ten sam dla obu szeregów, z twierdzenia 1 wynika, że w dowolnym przedziale $[a, b] \subset \mathbb{P}$ spełnione są założenia twierdzenia 14 §1. Wobec tego

$$u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad (x \in \mathbb{P}).$$

To samo rozumowanie możemy zastosować do szeregu (12), otrzymujemy

$$u''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \qquad (x \in \mathbb{P}).$$

Drogą indukcji łatwo stwierdzić, że po k-krotnym zróżniczkowaniu szeregu (1) otrzymujemy szereg potęgowy o tym samym przedziale zbieżności $\mathbb{P}$, którego suma jest równa $u^{(k)}$ dla $x \in \mathbb{P}$. Mamy zatem dla dowolnie ustalonego $k \in \mathbb{N}$

$$u^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k} \quad (x \in \mathbb{P}).$$

Na mocy twierdzenia 1 szereg potęgowy po prawej stronie jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $[a, b] \subset \mathbb{P}$, jego suma $u^{(k)}(x)$ jest więc ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbb{P}$ czyli ciągła w całym przedziale $\mathbb{P}$. $\square$

Uwaga. Nie zakładając istnienia granicy (3) łatwo okazać, że szereg (1) można w przedziale zbieżności różniczkować wyraz za wyrazem - zatem twierdzenie 2 pozostaje prawdziwe bez tego założenia (por. również punkt 5). Wynika to z następującego lematu:

Lemat. *Jeżeli szereg* (1) *jest zbieżny w punkcie* $c \neq x_0$, *to szereg* (12) *jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w każdym przedziale* $|x - x_0| \leq a$, *gdzie* $0 < a < |c - x_0|$.

DOWÓD. Na mocy założenia ogólny wyraz szeregu (1) dla $x = c$ dąży do zera (por. twierdzenie 8 rozdz. IV §1), istnieje zatem liczba $M > 0$ taka, że

$$|a_n (c - x_0)^n| \leq M \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mamy

$$n a_n (x - x_0)^n = n a_n (c - x_0)^n \frac{(x - x_0)^n}{(c - x_0)^n},$$

skąd przy oznaczeniu

$$\frac{a}{|c - x_0|} = q$$

wynika, że

$$|na_n(x - x_0^n| \leq nMq^n.$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$$

jest zbieżny dla $0 < q < 1$, co stwierdzamy łatwo, stosując kryterium d'Alemberta lub kryterium Cauchy'ego - por. rozdz. IV §2. Zatem ostatnia nierówność zapewnia bezwzględną i jednostajną zbieżność szeregu (13), a więc i szeregu (12), w przedziale $|x - x_0| \leq a$. $\square$

O zachowaniu się sumy szeregu potęgowego na końcach przedziału zbieżności mówi następujące

Twierdzenie 3 (Abela). *Załóżmy, że promień zbieżności R szeregu* (1) *spełnia nierówność $0 < R < \infty$. Wówczas w przypadku zbieżności szeregu* (1) *w punkcie końcowym przedziału zbieżności jego suma $u(x)$ jest funkcją jednostronnie ciągłą w tym punkcie tzn.*

a.) *jeżeli szereg* (1) *jest zbieżny dla $x = x_0 + R$, to*

$$\lim_{x \to (x_0 + R)-} u(x) = u(x_0 + R),$$

b.) *jeżeli szereg* (1) *jest zbieżny dla $x = x_0 - R$, to*

$$\lim_{x \to (x_0 - R)+} u(x) = u(x_0 - R).$$

DOWÓD. Aby udowodnić a.) zauważmy, że

$$a_n(x - x_0)^n = (a_n R^n) v_n(x), \tag{14}$$

gdzie

$$v_n(x) = \frac{(x - x_0)^n}{R^n}.$$

Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

jest z założenia zbieżny, zatem jako szereg o wyrazach stałych jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale (por zadanie 3 §1), natomiast ciąg $\{v_n(x)\}$ jest malejący przy dowolnie ustalonym $x \in B = [x_0, x_0 + R]$ i przy tym

$$|v_n(x)| \leq 1$$

dla $x \in B$, $n \in \mathbb{N}$. Korzystając z przedstawienia (14) możemy więc do szeregu (1) zastosować kryterium Abela (twierdzenie 16 §1), które zapewnia jego jednostajną zbieżność w przedziale B. Zgodnie z twierdzeniem o ciągłości sumy jednostajnie zbieżnego szeregu o wyrazach ciągłych (twierdzenie 12 §1) funkcja $u(x)$ jest ciągła w przedziale B, w szczególności lewostronnie ciągła w punkcie $x_0 + R$.

Dowód punktu b.) przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi. □

Przykład 2. Zbadajmy szereg potęgowy o środku $x_0 = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^\alpha} \qquad (\alpha \geq 0). \tag{15}$$

Ponieważ

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \alpha = 0, \\ \frac{1}{n^\alpha} & \text{dla} \quad \alpha > 0, \end{cases}$$

mamy dla $\alpha = 0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

oraz dla $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} = 1.$$

Zatem $\lambda = R = 1$ zgodnie ze wzorami (3), (4) i przedziałem zbieżności jest przedział

$$\mathbb{P} = (0, 2)$$

dla wszystkich $\alpha \geq 0$.

Zbadamy zachowanie się szeregu (15) na końcach przedziału $\mathbb{P}$. Dla $x = 0$ szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$$

Szereg ten jest

zbieżny dla $\alpha > 0$ jako szereg naprzemienny spełniający założenia twierdzenia Leibniza (twierdzenie 2 rozdz. IV §3),

rozbieżny dla $\alpha = 0$, gdyż wtedy ogólny wyraz nie dąży do zera, nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności (twierdzenie 8 rozdz. IV §1).

Natomiast dla $x = 2$ szereg (15) ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

jest więc (por. Przykład 1 rozdz. IV §2)

zbieżny dla $\alpha > 1$,

rozbieżny dla $0 \leq \alpha \leq 1$.

Przykład 3. Znajdziemy przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!} \tag{16}$$

o środku $x_0 = -1$. Do obliczenia liczby λ wygodniej będzie zastosować wzór (9). Otrzymujemy

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

zatem wobec (8) $R = \infty$ i przedziałem zbieżności jest cała prosta rzeczywista.

3. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy. Przypuśćmy, że funkcja f jest sumą szeregu potęgowego o środku x_0 i dodatnim promieniu zbieżności $0 < R \leq \infty$, zatem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{17}$$

dla $x \in \mathbb{P}$, gdzie $\mathbb{P}$ jest przedziałem zbieżności. Mówimy wówczas, że funkcja f została *rozwinięta w szereg potęgowy.* Na mocy twierdzenia 2 z przedstawienia (17) wynika, że f jest klasy C^∞ w przedziale $\mathbb{P}$ - zatem rozwijać w szereg potęgowy można tylko takie funkcje. Przedstawienie (17) pozwala wyrazić współczynniki a_n przez pochodne funkcji f w punkcie x_0. Różniczkując bowiem obustronnie otrzymujemy zgodnie z twierdzeniem 2

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1},$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2},$$

i ogólnie

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k} \tag{18}$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{P}$. Z równości (17), (18) wynika po podstawieniu $x = x_0$

$$f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k,$$

czyli (po zamianie wskaźnika k na n)

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{19}$$

(przypominamy, że $f^{(0)}(x) = f(x)$). Szereg potęgowy o środku x_0 i współczynnikach a_n określonych wzorem (19) nazywamy *szeregiem Taylora funkcji* f, w szczególności dla $x_0 = 0$ szereg ten nosi nazwę *szeregu Maclaurina funkcji* f.

Z przeprowadzonych rozważań wynika natychmiast

Twierdzenie 4 (o jednoznaczności rozwinięcia). *Jeżeli funkcja f rozwija się w pewnym otoczeniu punktu x_0 w szereg potęgowy* (17), *to ten szereg jest jej szeregiem Taylora tzn. współczynniki a_n są określone wzorem* (19).

DOWÓD. Z założenia funkcja f spełnia (17) dla $x \in (a, b)$, gdzie

$$a < x_0 < b,$$

zatem przedział (a, b) jest zawarty w przedziale zbieżności szeregu potęgowego i rachunek prowadzący do wzoru (19) pozostaje w mocy. $\square$

♡ ♡ ♡

Szereg Taylora można utworzyć dla każdej funkcji f określonej w otoczeniu punktu x_0 i mającej w tym punkcie pochodne wszystkich rzędów. Może się jednak zdarzyć, że nie przedstawia on funkcji f tzn. że w przedziale zbieżności szeregu o współczynnikach a_n określonych wzorem (19) nie zachodzi równość (17). Dowodzi tego następujący

Przykład 4. Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Okażemy, że $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ i przy tym

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Zaczniemy od obliczenia pochodnych funkcji f. Dla $x \neq 0$ możemy zastosować znane reguły różniczkowania funkcji elementarnych i ich superpozycji, co daje

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

i ogólnie

$$f^{(n)}(x) = w_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \neq 0), \tag{21}$$

gdzie w_n jest wielomianem - łatwy dowód indukcyjny pozostawiamy Czytelnikowi. Pochodne w punkcie $x = 0$ obliczymy opierając się na definicji, przy czym wygodnie będzie znaleźć najpierw lewostronną i prawostronną granicę ilorazu różnicowego. Mamy zatem

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}},$$

skąd po podstawieniu

$$t = \frac{1}{h} \tag{22}$$

dostajemy

$$f'_{+}(0) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} \tag{23}$$

i podobnie

$$f'_{-}(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{1}{h}e^{-\frac{1}{h^2}} = \lim_{t\to -\infty} \frac{t}{e^{t^2}}. \tag{24}$$

Obie granice (23), (24) stanowią nieoznaczoności typu $\frac{\infty}{\infty}$ i obliczamy je stosując regułę de l'Hospitala (twierdzenie 19 rozdz. III §4), co daje

$$f'_{+}(0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0, \qquad f'_{-}(0) = \lim_{t\to -\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0.$$

Ponieważ pochodne jednostronne są równe, pochodna $f'(0)$ istnieje i przy tym

$$f'(0) = 0 \tag{25}$$

(por. twierdzenie 1 rozdz.III §4). Równość (20) udowodnimy metodą indukcji. Przyjmując (20) jako założenie indukcyjne mamy

$$f_{+}^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f^{(n)}(h)}{h}, \qquad f_{-}^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f^{(n)}(h)}{h}$$

skąd, uwzględniając (21) i stosując podstawienie (22), dostajemy

$$f_{+}^{(n+1)}(0) = \lim_{t\to\infty} \frac{tw_n(t)}{e^{t^2}}, \qquad f_{-}^{(n+1)}(0) = \lim_{t\to -\infty} \frac{tw_n(t)}{e^{t^2}}.$$

Do obliczenia ostatnich granic zastosujemy p-krotnie stosowaną przed chwilą regułę de l'Hospitala (gdzie p jest stopniem wielomianu $tw_n(t)$). Daje to

$$f_{+}^{(n+1)}(0) = \lim_{t\to\infty} \frac{c}{(e^{t^2})^{(p)}}, \qquad f_{-}^{(n+1)}(0) = \lim_{t\to -\infty} \frac{c}{(e^{t^2})^{(p)}} \tag{26}$$

przy czym, jak łatwo zauważyć,

$$\left(e^{t^2}\right)^{(p)} = v_p(t)e^{t^2},$$

gdzie c jest stałą a v_p wielomianem. Ponieważ

$$\lim_{t\to\infty} v_p(t) = \pm\infty = \lim_{t\to -\infty} v_p(t)$$

(znak zależnie od stopnia wielomianu i znaku współczynnika przy najwyższej potędze - por. zadanie 17 rozdz.III §2), równości (26) dają ostatecznie

$$f_{+}^{(n+1)}(0) = f_{-}^{(n+1)}(0) = 0,$$

czyli

$$f^{(n+1)}(0) = 0,$$

co kończy dowód indukcyjny (20). Okazaliśmy jednocześnie, że funkcja f ma pochodne wszystkich rzędów w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ czyli jest klasy $C^\infty(\mathbb{R})$. Z definicji funkcji f i równości (20) wynika, że wszystkie współczynniki a_n jej szeregu Taylora o środku $x_0 = 0$ (określone wzorem (19)) są równe zeru. Przedziałem zbieżności takiego szeregu jest cała oś rzeczywista, ale w żadnym punkcie $x \neq 0$ nie może zachodzić równość (17). □

Mówimy, że funkcja f jest *analityczna* w punkcie x_0, jeżeli daje się w pewnym otoczeniu tego punktu przedstawić jako suma szeregu potęgowego (z twierdzenia 4 wynika, że szereg ten jest jej szeregiem Taylora). W Przykładzie 4 mamy przykład funkcji klasy C^∞ która nie jest analityczna w punkcie $x_0 = 0$.

♡ ♡ ♡

4. Rozwinięcia w szereg pewnych funkcji. Jeżeli funkcja f daje się w pewnym otoczeniu (a, b) punktu x_0 rozwinąć w szereg potęgowy, to z twierdzenia 1 wynika, że szereg ten jest jednostajnie zbieżny do f w każdym przedziale domkniętym $[c, d] \subset (a, b)$. Inaczej mówiąc, do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, że dla $n > N$ zachodzi dla wszystkich $x \in [c, d]$ nierówność

$$\Big| f(x) - g_n(x) \Big| < \varepsilon,$$

gdzie

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

Zatem przedstawienie funkcji f w postaci (17) implikuje możliwość aproksymowania jej w całym przedziale $[c, d]$ ze z góry określoną dokładnością przez wielomian g_n.

Zajmiemy się teraz rozwinięciem w szereg potęgowy pewnych poznanych wcześniej funkcji.

Jeżeli f jest funkcją klasy C^∞ w otoczeniu punktu x_0, to dla dowolnego n prawdziwy jest wzór Taylora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_n(x), \tag{27}$$

gdzie

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\bar{x}) \tag{28}$$

jest resztą w postaci Lagrange'a zaś $\bar{x}$ punktem leżącym między punktami x_0, x (por. twierdzenie 2 rozdz.III §5). Suma po prawej stronie (27) jest sumą częściową szeregu Taylora funkcji f. Zatem rozwinięcie (17) jest prawdziwe w przedziale $\mathbb{P}_d$ określonym nierównością

$$|x - x_0| \leq d$$

jeżeli spełniony jest warunek

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P}_d, \tag{29}$$

do tego zaś wystarczy, by pochodne funkcji f były *wspólnie ograniczone* w przedziale $\mathbb{P}_d$ tzn. by istniała stała $M > 0$ taka, że

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P}_d,\ n \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Wówczas bowiem

$$|R_n(x)| \leq M \frac{d^n}{n!}. \tag{31}$$

Jak łatwo sprawdzić, stosując kryterium d'Alemberta, szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{n!}$$

jest zbieżny i wobec tego jego ogólny wyraz dąży do zera. Oszacowanie (30), które implikuje (31), zapewnia więc warunek (29) rozwijalności funkcji f w szereg Taylora.

Przykład 5. Przyjmijmy $x_0 = 0$ i niech

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = e^x.$$

Ustalając dowolnie $d > 0$ mamy dla $|x| \leq d$

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq 1, \quad \left| g^{(n)}(x) \right| \leq 1, \quad \left| h^{(n)}(x) \right| \leq e^d,$$

warunek (30) jest więc spełniony i wszystkie trzy funkcje rozwijają się w szereg Maclaurina w każdym przedziale $\mathbb{P}_d$, czyli w całym zbiorze liczb rzeczywistych. Aby znaleźć współczynniki rozwinięcia skorzystamy ze wzoru (19) dla $x_0 = 0$. Mamy

$$h^{(n)}(x) = e^x \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

następnie

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x & \text{dla} \quad n = 2k, \\ (-1)^k \cos x & \text{dla} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

oraz

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{dla} \quad n = 2k, \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{dla} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots$. Wobec tego

$$h^{(n)}(0) = 1 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 2k, \\ (-1)^k & \text{dla} \quad n = 2k+1, \end{cases}$$

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k & \text{dla} \quad n = 2k, \\ 0 & \text{dla} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

i szukane rozwinięcia mają postać

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \tag{32}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \tag{33}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \tag{34}$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Łatwo sprawdzić, stosując kryterium d'Alemberta, że każdy z szeregów po prawej stronie jest bezwzględnie zbieżny przy dowolnie ustalonym x. Wynika stąd, że promień zbieżności tych szeregów jest równy ∞, zaś przedziałem zbieżności jest cała oś rzeczywista.

Promień zbieżności szeregów (32) - (34) możemy również obliczyć bezpośrednim rachunkiem.
W przypadku szeregu (32) mamy

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

zatem wzór (9) daje

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

i stąd $R = \infty$ zgodnie z (8).

W szeregu (33) mamy

$$a_{2n} = 0, \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

zatem

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = 0, \qquad \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)!}}.$$

Zauważmy, że przyjmując

$$b_n = \frac{1}{n!}$$

mamy (por. rozdz. IV §2)

$$\lim_{n to \infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!},$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0,$$

a stąd na mocy twierdzenia o podciągach (twierdzenie 3 rozdz. II §2) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0.$$

Zatem w przypadku szeregu (33) ciąg $\{ \sqrt[n]{|a_n|}\}$ jest przeplatanką dwóch ciągów zbieżnych do tej samej granicy. Wobec tego (por. zadanie 4 rozdz. II §1) istnieje granica

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

co zgodnie z (8) daje $R = \infty$.
Podobne rozumowanie można zastosować do szeregu (34), szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

Przykład 6. Rozwiniemy w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x) = \log(1+x) \qquad (x > -1).$$

Zauważmy najpierw, że znamy rozwinięcie pochodnej $f'(x)$, bowiem ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego (por. Przykład 1 rozdz. IV §1) wynika, że

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \quad \text{dla} \quad |t| < 1.$$

Otrzymany szereg potęgowy jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale o końcach 0, x dla $|x| < 1$ (por. twierdzenie 1), wobec tego zgodnie z twierdzeniem 13 §1 można go w tym przedziale całkować wyraz za wyrazem, co daje

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{dla} \quad |x| < 1. \tag{35}$$

Posługując się wzorami (3), (4) łatwo znaleźć promień zbieżności po prawej stronie (35). Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

stąd

$$\lambda = R = 1.$$

Szereg (35) jest zbieżny dla $x = 1$ jako szereg anharmoniczny (por. Przykład 2 rozdz. IV §3), wobec tego z twierdzenia 3 i z ciągłości lewej strony dla $x = 1$ wynika, że równość (35) zachodzi w całym przedziale $(-1, 1]$. Zmieniając wskaźnik sumacyjny możemy szukane rozwinięcie zapisać w postaci

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (-1 < x \leq 1). \tag{36}$$

Ponieważ przedziałem zbieżności otrzymanego szeregu jest przedział $(-1, 1)$, równość (36) nie może zachodzić dla $x > 1$ pomimo, że lewa strona jest określona dla wszystkich $x > -1$.

Przyjmując $x = 1$ w (36) dostajemy

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Po prawej stronie mamy szereg anharmoniczny, którego zbieżność udowodniliśmy wcześniej (Przykład 2 rozdz. IV §3) - teraz znaleźliśmy jego sumę.

Uwaga. Wróćmy do rozwinięcia (36) i niech $\mathbb{P}_d$ będzie przedziałem określonym nierównością

$$|x| \leq d \qquad (0 < d < 1).$$

Przyjmując

$$f(x) = \log(1+x)$$

mamy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

(proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie dowodu indukcyjnego), zatem dla $x \in \mathbb{P}_d$ zachodzi oszacowanie

$$\frac{1}{c_n} = \frac{(n-1)!}{(1+d)^n} \leq \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{(n-1)!}{(1-d)^n}.$$

Stosując kryterium d'Alemberta stwierdzamy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

jest zbieżny, stąd (por. twierdzenie 8 rozdz. IV §1) ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny do zera, zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = \infty$$

i wobec tego z otrzymanego oszacowania dla pochodnych $f^{(n)}(x)$ wynika, że nie mogą być one wspólnie ograniczone w żadnym przedziale $\mathbb{P}_d$. Widzimy więc, że warunek (30) jest jedynie warunkiem dostatecznym rozwijalności funkcji f w szereg potęgowy, ale nie jest to warunek konieczny.

Przykład 7. Rozwiniemy w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x) = (1+x)^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ x > -1). \tag{37}$$

Zaczniemy od obliczenia współczynników a_n posługując się wzorem (19) przy $x_0 = 0$. Mamy

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \qquad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

i ogólnie

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

skąd

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

zatem

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad a_0 = 1. \tag{38}$$

W przypadku gdy α jest liczbą naturalną $(\alpha = m)$, otrzymujemy ze wzorów (38)

$$a_n = \begin{cases} \binom{m}{n} & \text{dla} \quad 0 \le n \le m \\ 0 \quad \text{dla} & n > m, \end{cases}$$

gdzie $\binom{m}{n}$ oznacza współczynnik dwumianowy (por. (17) rozdz. I §1). Szereg Maclaurina jest wówczas sumą skończoną i szukane rozwinięcie daje wzór dwumianowy Newtona

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(por. (19) rozdz. I §1). Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ wyrażenie (38) nazywamy *uogólnionym współczynnikiem dwumianowym* i przyjmujemy oznaczenia

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \binom{\alpha}{0} = 1. \tag{39}$$

Szereg Maclaurina funkcji (37) ma więc postać

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = g(x), \tag{40}$$

a jego promień zbieżności dla $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ łatwo obliczyć ze wzorów (4), (9) (wiemy, że dla α naturalnych oraz $\alpha = 0$ szereg jest skończoną sumą). Wobec (39) dostajemy dla $n > \alpha$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n-\alpha}{n+1},$$

skąd

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{n-\alpha}{n+1} = 1, \qquad R = 1.$$

Przedziałem zbieżności szeregu (40) jest więc przedział (-1,1).

Z przeprowadzonego rozumowania nie wynika jednak, że suma szeregu Maclaurina funkcji (37) jest równa tej funkcji - por. Przykład 4. Aby to udowodnić musimy wykazać, że

$$g(x) = (1+x)^{\alpha}, \tag{41}$$

(gdzie funkcja g jest określona w przedziale $(-1, 1)$ równością (40)) albo, w równoważnej postaci, że

$$h(x) = (1+x)^{-\alpha} g(x) = 1 \quad \text{dla} \quad |x| < 1. \tag{42}$$

Ponieważ

$$h(0) = 1$$

wystarczy stwierdzić, że h jest funkcją stałą w przedziale $(-1, 1)$ czyli że jej pochodna $h'(x)$ jest w tym przedziale równa zeru. Różniczkując otrzymujemy z (42)

$$h'(x) = (1+x)^{-\alpha-1} p(x), \tag{43}$$

gdzie

$$p(x) = (1+x)g'(x) - \alpha g(x),$$

pozostaje więc okazać, że

$$p(x) = 0 \quad \text{dla} \quad |x| < 1. \tag{44}$$

Ostatnia równość wynika łatwo z definicji funkcji g. Po zróżniczkowaniu (40) mamy

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n, \tag{45}$$

zatem

$$x g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n \tag{46}$$

i po dodaniu (45), (46)

$$(1+x)g'(x) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \tag{47}$$

gdzie

$$b_n = (n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}.$$

Z definicji (39) uogólnionego współczynnika dwumianowego wynika, że

$$b_n = \frac{1}{n!}\Big(\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)+n\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\Big) = \binom{\alpha}{n}(\alpha-n+n) = \alpha\binom{\alpha}{n},$$

co wobec (40) i (47) daje

$$(1+x)g'(x) = \alpha g(x),$$

czyli (44), skąd wynika (41). Szukane rozwinięcie ma więc postać

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \qquad (|x|<1), \tag{48}$$

przy czym współczynniki $\binom{\alpha}{n}$ są określone wzorami (39).

Przykład 8. Rozważymy szczególne przypadki rozwinięcia (48). Dla $\alpha = \frac{1}{2}$, $n \geq 2$ mamy

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1) = \frac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$$

i stąd

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n \qquad (|x|<1), \tag{49}$$

czyli w rozwiniętej postaci

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots \qquad (|x|<1). \tag{50}$$

Natomiast dla $\alpha = -\frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1) = \frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)},$$

zatem

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n \qquad (|x|<1), \tag{51}$$

czyli w postaci rozwiniętej

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1). \tag{52}$$

Szereg występujący po prawe stronie (49) można przedstawić jako iloczyn

$$x^2 r(x),$$

gdzie $r(x)$ jest funkcją ciągłą, a więc ograniczoną w otoczeniu zera. Używając symboli Landau'a (rozdz. III §4 punkt 10) możemy więc rozwinięcie (49) zapisać w postaci

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2) \quad \text{przy} \quad x \to 0. \tag{53}$$

Podobnie z (51) wynika, że

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2) \quad \text{przy} \quad x \to 0, \tag{54}$$

zatem oba wyrażenia

$$\sqrt{1+x}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

można dla małych $|x|$ zastąpić w przybliżeniu przez funkcje liniowe.

Przykład 9. Ze wzoru (51) łatwo otrzymać rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji

$$f(x) = \arcsin x.$$

Zastępując x przez $-t^2$ dostajemy

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} t^{2n} \qquad (|t| < 1).$$

Ustalając $x \in (-1, 1)$ stwierdzamy po zastosowaniu kryterium Wierstrassa (twierdzenie 15 §1), że otrzymany szereg jest jednostajnie zbieżny w przedziale o końcach 0, x, możemy go zatem w tym przedziale scałkować wyraz za wyrazem (por. twierdzenie 13 §1). Mamy

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$$

i stąd

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1). \tag{55}$$

Aby zbadać zbieżność szeregu (55) oznaczmy przez $u_n(x)$ jego n-ty wyraz i zastosujmy kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|.$$

Mamy po skróceniu

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} \cdot |x|^2,$$

zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x|^2,$$

skąd wynika, że szereg (55) jest bezwzględnie zbieżny dla $|x| < 1$. Jeżeli $|x| > 1$, to ustalając liczbę q spełniającą nierówność $1 < q < |x|^2$ mamy dla dostatecznie dużych n

$$|u_{n+1}(x)| > q|u_n(x)|,$$

a stąd drogą indukcji łatwo wykazać, że

$$|u_{n+p}(x)| > |u_n(x)|q^p \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Z nierówności tej wynika, że ciąg $\{u_n(x)\}$ nie może być zbieżny do zera, zatem szereg (55) jest rozbieżny dla $|x| > 1$, gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności (por. twierdzenie 8 rozdz. IV §1). Z przedstawionych rozważań wynika, że przedziałem zbieżności szeregu (55) jest przedział $(-1, 1)$, zaś promień zbieżności $R = 1$.

Przykład 10. W podobny sposób znajdujemy rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji

$$f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego (Przykład 1 rozdz.IV §1) wynika, że

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \qquad (|t| < 1)$$

skąd po scałkowaniu w przedziale o końcach 0, x dla $|x| < 1$ dostajemy

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{56}$$

Badanie zbieżności szeregu (56) przebiega podobnie, jak badanie zbieżności szeregu (55). Oznaczając n-ty wyraz szeregu (56) przez $v_n(x)$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|v_{n+1}(x)|}{|v_n(x)|} = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = |x|^2.$$

Powtarzając rozumowanie przeprowadzone w przykładzie 9 stwierdzamy, że przedziałem zbieżności szeregu (56) jest przedział $(-1,1)$, zaś promień zbieżności $R=1$.

Szereg jest również zbieżny dla $x=\pm 1$ jako szereg naprzemienny spełniający założenia twierdzenia Leibniza (twierdzenie 2 rozdz.IV §3) i wobec tego zgodnie z twierdzeniem Abela (twierdzenie 3) jego suma jest w tych punktach funkcją ciągłą. Zatem *rozwinięcie* (56) *jest prawdziwe w całym przedziale domkniętym* $[-1,1]$. Zauważmy, że wprawdzie funkcja $\operatorname{arctg} x$ jest określona na całej osi rzeczywistej, jednak równość (56) nie zachodzi dla $|x|>1$ gdyż dla takich x szereg po prawej stronie jest rozbieżny. Ponieważ $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$, przyjmując $x=1$ w (56) dostajemy przedstawienie liczby π jako sumy szeregu nieskończonego

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

zwanego *szeregiem Leibniza* (por. zadanie 19).
♡ ♡ ♡

5. Wzór Cauchy'ego - Hadamarda. W dowodach twierdzeń 1, 2 korzystaliśmy z założenia, że istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lambda,$$

co w przypadku $\lambda\neq 0$ pozwoliło określić promień zbieżności szeregu potęgowego (1) wzorem (4). Okażemy teraz, że udowodnione twierdzenia pozostają słuszne bez tego założenia, jeżeli przyjmiemy

$$\lambda=\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|},\quad R=\frac{1}{\lambda}, \tag{57}$$

gdy $0<\lambda<\infty$ oraz

$$R=0,\quad \text{gdy}\quad \lambda=\infty,\qquad R=\infty,\quad \text{gdy}\quad \lambda=0. \tag{58}$$

Zauważmy, że granica górna (57) (być może niewłaściwa) istnieje zawsze, mamy bowiem

$$0\le b_n=\sqrt[n]{|a_n|}$$

zatem na mocy twierdzeń 13, 14 rozdz.II §2 mamy

$0\le\lambda<\infty$ gdy ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z góry oraz

$\lambda=\infty$ w przeciwnym wypadku.

Wzór (57) określający promień zbieżności R nazywamy wzorem *Cauchy'ego - Hadamarda.*[1] Aby udowodnić, prawdziwość twierdzeń 1,2 w przypadku, gdy liczby λ, R są określone wzorami (57), (58) wystarczy okazać, że

[1] Jacques Salomon Hadamard (1865 -1963), matematyk francuski, przedmiotem jego badań były równania różniczkowe cząstkowe, funkcje analityczne, teoria liczb oraz mechanika teoretyczna; od 1912 r. był członkiem Paryskiej Akademii Nauk, od 1956 r. członkiem zagranicznym Polskiej Akademii Nauk.

A.) jeżeli $0 < \lambda < \infty$, to

(i) szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny, gdy

$$|x - x_0| < \frac{1}{\lambda} \tag{59}$$

oraz

(ii) szereg (1) jest rozbieżny, gdy

$$|x - x_0| > \frac{1}{\lambda}; \tag{60}$$

B.) jeżeli $\lambda = 0$, to szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$;

C.) jeżeli $\lambda = \infty$, to szereg (1) jest rozbieżny dla $x \neq x_0$;

D.) jeżeli λ_1 odpowiada szeregowi (13) otrzymanemu przez formalne zróżniczkowanie szeregu (1) czyli

$$\lambda_1 = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{n|a_n|}$$

to

$$\lambda = \lambda_1. \tag{61}$$

W dowodzie punktu A.) oprzemy się na twierdzeniu 15 rozdz.II §2. Aby udowodnić (i) załóżmy, że spełniona jest nierówność (59) i niech

$$u_n(x) = a_n(x - x_0)^n.$$

Obierając ε_0 tak, by

$$\lambda + \varepsilon_0 < \frac{1}{|x - x_0|} \tag{62}$$

mamy

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \lambda + \varepsilon_0$$

i stąd

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| < (\lambda + \varepsilon_0)|x - x_0| = q \tag{63}$$

dla $n > n_0$. Z (63) wynika, że przy ustalonym x zachodzi nierówność

$$|u_n(x)| < q^n \tag{64}$$

przy czym

$$0 < q < 1 \tag{65}$$

wobec (62). Ponieważ szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

jest zbieżny dla q spełniających (65), z nierówności (64) po zastosowaniu kryterium porównawczego wynika zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|. \tag{66}$$

Dla dowodu (ii) załóżmy, że spełniona jest nierówność (60) i niech liczba ε_0 będzie dobrana tak, by

$$\lambda - \varepsilon_0 > \frac{1}{|x - x_0|}. \tag{67}$$

Dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \lambda - \varepsilon_0$$

z której wynika na mocy (67), że

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} > (\lambda - \varepsilon_0)|x - x_0| > 1.$$

Wobec tego szereg (1) nie może być zbieżny, gdyż jego ogólny wyraz nie dąży do zera przy $n \to \infty$, nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności (por. twierdzenie 8 rozdz. IV §1).

Przechodząc do dowodu punktu B.) mamy

$$0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon$$

dla prawie wszystkich n, ale to oznacza, że istnieje granica (3) i przy tym

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

zatem założenie uczynione w twierdzeniach 1 - 2 jest spełnione. Natomiast w punkcie C.), na mocy definicji niewłaściwej granicy górnej, istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ taki, że

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \infty.$$

Wówczas przy dowolnie ustalonym $x \neq x_0$ istnieje k_0 takie, że dla $k > k_0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x - x_0|}$$

co implikuje oszacowanie

$$|u_{n_k}(x)| > 1 \qquad (k > k_0)$$

z którego wynika, że szereg (1) nie może być zbieżny, gdyż jego ogólny wyraz nie dąży do zera przy $n \to \infty$ (por. twierdzenie 8 rozdz.IV §1).

Pozostały do udowodnienia punkt D.) wynika łatwo z definicji granicy górnej. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

granice (właściwa lub równa ∞) podciągów wyjętych z ciągów $\{ \sqrt[n]{|a_n|}\}$ oraz $\{ \sqrt[n]{n}\, \sqrt[n]{|a_n|}\}$ są te same i to implikuje (61).

Dowody twierdzeń 1, 2 w oparciu o wykazane stwierdzenia A.) - D.) przebiegają podobnie jak poprzednio i pozostawiamy je Czytelnikowi.

Przykład 11. Wróćmy do Przykładu 9 - okazaliśmy tam, że promień zbieżności szeregu (55) wynosi $R = 1$. Sprawdzimy, że ten sam wynik można otrzymać stosując wzór Cauchy'ego - Hadamarda (57). Mamy

$$a_{2n} = 0, \qquad a_{2n+1} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

skąd

(68) $$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = 0, \qquad \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = c_n \sqrt[2n+1]{b_n},$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{\sqrt[2n+1]{2n+1}}, \qquad b_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}.$$

Zauważmy, że

(68') $$\sqrt[2n+1]{b_n} = (d_n)^{\frac{n}{2n+1}}, \quad \text{gdzie} \quad d_n = \sqrt[n]{b_n}.$$

Aby obliczyć granicę ciągu $\{d_n\}$ zastosujemy twierdzenie o średniej geometrycznej (por. rozdz. III §3 zadanie 2). Mamy

$$d_n = \sqrt[n]{\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdots\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_1}{1}}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n} = 1,$$

zatem również

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 1.$$

Zgodnie z (68')

$$\sqrt[2n+1]{b_n} = e^{r_n \log d_n}, \quad \text{gdzie} \quad r_n = \frac{n}{2n+1},$$

zatem przechodząc do granicy przy $n \to \infty$ oraz wykorzystując ciągłość funkcji wykładniczej i logarytmu dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{b_n} = e^0 = 1. \tag{68''}$$

Ponadto, stosując twierdzenie o podciągach (twierdzenie 3 rozdz. II §2) do ciągu $\{\sqrt[n]{n}\}$ stwierdzamy, (por. Przykład 14 rozdz. II §1), że

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1,$$

co zgodnie z (68") i drugim wzorem (68) daje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 1,$$

natomiast z pierwszego wzoru (68) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = 0.$$

Widzimy więc, że ciąg $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ jest przeplatanką dwóch ciągów, z których jeden jest zbieżny do 0, a drugi do 1. Oznacza to, że

$$\lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

i stąd $R = 1$.

Przykład 12. W Przykładzie 10 okazaliśmy, że promień zbieżności szeregu (56) wynosi $R = 1$. Mamy

$$a_{2n} = 0, \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

i stąd

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = 0, \qquad \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \frac{1}{\sqrt[2n+1]{2n+1}},$$

zatem (por. twierdzenie 3 rozdz. II §2 oraz Przykład 14 rozdz. II §1)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = 0.$$

Podobnie, jak w Przykładzie 11, ciąg $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ jest przeplatanką dwóch ciągów, zbieżnych odpowiednio do 0 i do 1, a więc zgodnie ze wzorem Cauchy'ego - Hadamarda (57)

$$\lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

co daje otrzymany poprzednio wynik $R = 1$.

♡ ♡ ♡

6. Działania na szeregach potęgowych. Rozważmy dwa szeregi potęgowe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

o promieniach zbieżności R_1, R_2 odpowiednio, przy czym

$$0 < R_1 \leq R_2 \leq \infty.$$

Przyjmując oznaczenia

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \text{dla} \quad |x-x_0| < R_1,$$
$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \quad \text{dla} \quad |x-x_0| < R_2$$

dostajemy na mocy twierdzeń 2, 3 rozdz.IV §1

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n = A(x)+B(x)$$

dla $|x-x_0| < R = \min(R_1, R_2)$ oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n(x-x_0)^n = cA(x)$$

dla $|x-x_0| < R_1$ i dowolnego $c \in \mathbb{R}$. Zatem szeregi potęgowe o tym samym środku dodajemy i mnożymy przez liczbę tak jak zwykłe wielomiany, oczywiście przy założeniu, że x należy do części wspólnej przedziałów zbieżności obu szeregów.

Przechodząc do mnożenia szeregów utwórzmy ich iloczyn Cauchy'ego. Przyjmując dla ustalonego x

$$u_n = a_n(x-x_0)^n, \qquad v_n = b_n(x-x_0)^n$$

i oznaczając przez w_n ogólny wyraz iloczynu Cauchy'ego dostajemy zgodnie ze wzorem (28) rozdz. IV §3

$$w_n = c_n(x-x_0)^n,$$

gdzie

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0. \tag{69}$$

Ponieważ szereg potęgowy jest bezwzględnie zbieżny w każdym punkcie swojego przedziału zbieżności, dla $|x - x_0| < R = \min(R_1, R_2)$ oba szeregi spełniają założenia twierdzenia 8 rozdz.IV §3, zatem

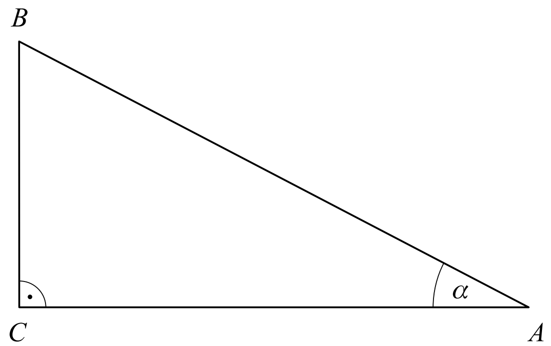
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = A(x)B(x) \quad \text{dla} \quad |x - x_0| < R = \min(R_1, R_2)$$

(c_n określone wzorem (69)), przy czym szereg po lewej stronie jest bezwzględnie zbieżny. Iloczyn Cauchy'ego szeregów potęgowych o tym samym środku x_0 jest więc również szeregiem potęgowym o środku x_0 i jego promień zbieżności jest co najmniej równy $\min(R_1, R_2)$.

♡ ♡ ♡

7*. Analityczna definicja funkcji trygonometrycznych. W kursie szkolnym określamy funkcje trygonometryczne kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym ABC (rys. 97) jako

$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|}, \qquad \cos\alpha = \frac{|AC|}{AB|}.$$



[rys. 97]

Wprowadzając następnie układ współrzędnych na płaszczyźnie i rozważając kąty między dwoma promieniami okręgu jednostkowego o środku w początku układu rozszerzamy tę definicję na przypadek kąta, którego miara łukowa może być dowolną liczbą rzeczywistą. Definicję tą przypomnieliśmy w rozdz.III §1 punkt 9 i na niej opieraliśmy dalszy ciąg wykładu, co ostatecznie doprowadziło do rozwinięć funkcji $\sin x$ i $\cos x$ w szereg potęgowy określonych wzorami (33), (34). Powstaje pytanie, czy wspomniane funkcje można określić w sposób czysto analityczny bez odwoływania się do rysunków i intuicji geometrycznych. Odpowiedź jest twierdząca - wzory (33), (34) mogą posłużyć jako definicja funkcji $\sin x$ i $\cos x$, z której można wyprowadzić wszystkie znane własności tych funkcji.

Aby pójść tą drogą wprowadźmy funkcje określone jako sumy szeregów potęgowych (33), (34) przyjmując

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \tag{70}$$

Jak wykazaliśmy w Przykładzie 5, oba szeregi są bezwzględnie zbieżne dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Pozostaje sprawdzić, że

$$S(t) = \sin t, \quad C(t) = \cos t \quad \text{dla} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{71}$$

jeżeli przez sin, cos rozumiemy funkcje trygonometryczne rozważane w kursie szkolnym.

Ze wzorów (70) wynikają natychmiast równości

$$S(0) = 0, \qquad C(0) = 1 \tag{72}$$

oraz

$$S(-x) = -S(x), \qquad C(-x) = C(x) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{73}$$

Ponadto z twierdzenia o różniczkowaniu szeregów potęgowych (twierdzenie 2) dostajemy relacje

$$S'(x) = C(x), \qquad C'(x) = -S(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{74}$$

zaś obliczając iloczyn Cauchy'ego szeregów (70) (por. punkt 6) dochodzimy do tożsamości

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y), \tag{75}$$
$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y), \tag{76}$$
$$(x, y) \in \mathbb{R})$$

(szczegółowy rachunek pozostawiamy Czytelnikowi). Podstawienie $y = -x$ w równości (76) daje po wykorzystaniu relacji (72), (73)

$$S^2(x) + C^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{77}$$

Udowodnimy teraz następjącą własność funkcji $C(x)$:

Stwierdzenie 1. *Funkcja $C(x)$ jest ściśle malejąca w przedziale $[0, 2]$ i ma dokładnie jedno miejsce zerowe $a \in (0, 2)$.*

DOWÓD. Zgodnie z drugim wzorem (74) wystarczy okazać,że

$$S(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in (0, 2). \tag{78}$$

Łącząc w nawiasy po dwa wyrazy w rozwinięciu (70) dostajemy

$$S(x) = x\Big(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\Big) + \frac{x^5}{5!}\Big(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\Big) + \frac{x^9}{9!}\Big(1 - \frac{x^2}{10 \cdot 11}\Big) + \cdots .$$

Dla $x \in (0, 2)$ każdy z ułamków jest < 1, więc każdy nawias przedstawia liczbę dodatnią i stąd (78). Zatem funkcja $C(x)$ jest ściśle malejąca w przedziale $[0, 2]$, może więc mieć conajwyżej jedno miejsce zerowe w tym przedziale. Łącząc nawiasami wyrazy w rozwinięciu (70) dla $x = 2$ otrzymujemy

$$C(2) = \Big(1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!}\Big) + \Big(-\frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!}\Big) + \Big(-\frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!}\Big) + \cdots$$

czyli

$$C(2) = -\frac{1}{3} + \frac{2^6}{6!}\Big(\frac{4}{7 \cdot 8} - 1\Big) + \frac{2^{10}}{10!}\Big(\frac{4}{11 \cdot 12} - 1\Big) + \cdots .$$

Ponieważ ułamki w nawiasach są < 1, każdy z tych nawiasów przedstawia liczbę ujemną i stąd $C(2) < 0$. Ponieważ $C(0) = 1 > 0$, w przedziale $(0, 2)$ funkcja $C(x)$ musi przyjmować wartość 0, gdyż jako funkcja ciągła ma własność Darboux tzn. przechodzi od jednej wartości do drugiej przez wszystkie wartości pośrednie (por. rozdz.III §3 punkt 7). $\square$

Mamy więc

$$S(a) = 1, \qquad C(a) = 0 \tag{79}$$

(druga równość wynika z definicji liczby a, natomiast pierwszą dostajemy z tożsamości (77) po uwzględnieniu (78). Korzystając z równości (75), (76), (79) otrzymujemy kolejno wzory redukcyjne (proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie rachunku)

$$\begin{aligned} &S(x+a) = C(x), && C(x+a) = -S(x),\\ &S(x+2a) = -S(x), && C(x+2a) = -C(x),\\ &S(x+3a) = -C(x), && C(x+3a) = S(x),\\ &S(x+4a) = S(x), && C(x+4a) = C(x),\\ &(x \in \mathbb{R}). && \end{aligned} \tag{80}$$

Z ostatniej pary wzorów (80) wynika, że obie funkcje S, C mają okres $4a$. Udowodnimy teraz

Stwierdzenie 2. *Żadna z funkcji S, C nie ma okresu mniejszego od $4a$.*

DOWOD. Korzystając z (74) i ze wzorów redukcyjnych (80) dostajemy dla $0 < x < a$

$$\frac{d}{dx}C(x+a) = C'(x+a) = -S(x+a) = -C(x),$$

zatem

$$\frac{d}{dx}C(x+a) < 0 \qquad (0 < x < a),$$

gdyż ze Stwierdzenia 1 wynika, że funkcja C jest dodatnia w przedziale $(0, a)$. Wobec tego funkcja C jest ściśle malejąca w przedziale $[0, 2a]$. Ponieważ funkcja C jest dodatnia w przedziale $(0, a)$ i ujemna w przedziale $(a, 2a)$, z pierwszego wzoru (74) wynika, że funkcja S jest ściśle rosnąca w przedziale $(0, a)$ i ściśle malejąca w przedziale $(a, 2a)$, a stąd wobec

(72), (79) i wzorów redukcyjnych (80) wynika, że $S(x) > 0$ dla $x \in (0, 2a)$. Korzystając z (74) i wzorów redukcyjnych (80) dostajemy

$$\frac{d}{dx}C(x+2a) = C'(x+2a) = -S(x+2a) = S(x) \qquad \text{dla} \quad 0 < x < 2a,$$

zatem

$$\frac{d}{dx}C(x+2a) > 0 \qquad (0 < x < 2a),$$

a to oznacza, że funkcja C jest ściśle rosnąca w przedziale $[2a, 4a]$. Udowodniona monotoniczność funkcji C w każdym z przedziałów $[0, 2a]$ i $[2a, 4a]$ zapewnia nierówność

$$C(x) < 1 \qquad (0 < x < 4a).$$

Ponieważ $C(0) = 1$ zgodnie z (72), z ostatniej nierówności wynika, że żadna liczba mniejsza od $4a$ nie może być okresem funkcji C. Zauważmy ponadto, że zgodnie z pierwszym wzorem (74) każdy okres funkcji S jest okresem funkcji C - zatem również funkcja S nie ma okresu mniejszego od $4a$. $\square$

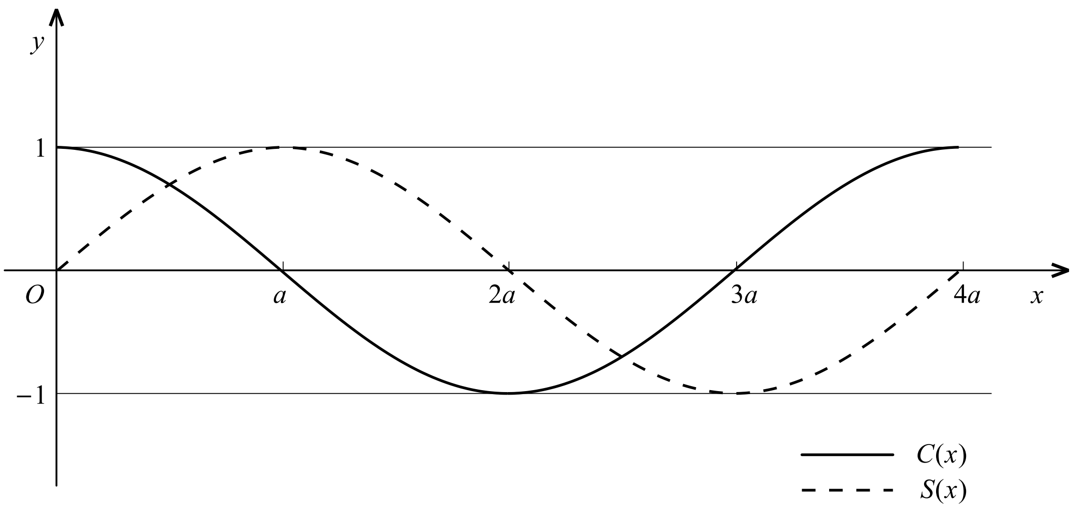
Stwierdzenie 3. *Do dowolnych liczb rzeczywistych u, v spełniających warunek*

$$u^2 + v^2 = 1$$

istnieje dokładnie jedno $x \in [0, 4a)$ takie, że

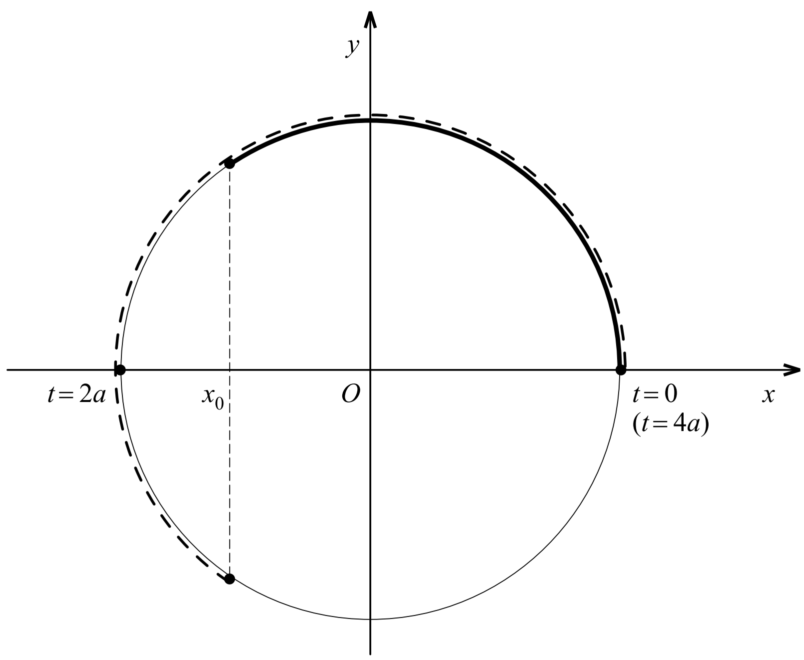
$$u = C(x), \qquad v = S(x)$$

DOWÓD. Zacznijmy od przypadku $u = 0$, wówczas $v^2 = 1$, a stąd $x = a$, gdy $v = 1$ oraz $x = 3a$, gdy $v = -1$. Jeżeli zaś $v = 0$, to $u^2 = 1$, zatem $x = 0$, gdy $u = 1$ oraz $x = 2a$, gdy $u = -1$. Dalszy dowód oparty jest na twierdzeniu 13 rozdz. III §3, z którego wynika, że funkcja C ma własność Darboux w przedziale $[0, 4a]$ i wobec tego przechodzi od wartości 0 do wartości 1 przez wszystkie wartości pośrednie. Jeżeli $0 < u < 1$, to liczba x spełniająca warunki twierdzenia należy do przedziału $(0, a)$, gdy $v > 0$ oraz do przedziału $(3a, 4a)$, gdy $v < 0$. Jeżeli zaś $-1 < u < 0$, to liczba x należy do przedziału $(a, 2a)$, gdy $v > 0$ oraz $(2a, 3a)$, gdy $v < 0$. Jedyność liczby x wynika z wykazanej w dowodzie Stwierdzenia 2 ścisłej monotoniczności funkcji C w odpowiednich przedziałach. $\square$



[rys. 98]

Przeprowadzone rozumowania ilustruje rys. 98, na którym zostały podane wykresy funkcji S, C.



[rys. 99]

Rozważmy teraz zbiór K punktów płaszczyzny postaci

$$x = C(t), \quad y = S(t) \qquad (0 \le t < 4a). \tag{81}$$

Z relacji (77) i Stwierdzenia 3 wynika, że K jest okręgiem jednostkowym o środku w początku układu. Obliczymy teraz długość łuku K_0 okręgu K o końcach $(1, 0)$ oraz (x_0, y_0) gdzie

$$x_0 = C(t_0), \qquad y_0 = S(t_0)$$

(rys. 99), korzystając ze wzoru (10) rozdz.V §3. Dla $t_0 \in (0, 2a)$ punkt (x_0, y_0) leży na górnej połowie okręgu K o równaniu

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \tag{82}$$

stąd

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

zatem

$$|K_0| = \int_{x_0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Podstawienie

$$x = C(t) \tag{83}$$

w całce po uwzględnieniu (74), (81), (82) daje

$$dx = -S(t)\, dt = -y\, dt = -\sqrt{1-x^2}\, dt,$$

skąd

$$|K_0| = -\int_{t_0}^{0} dt = t_0. \tag{84}$$

Przyjmując $t_0 = 2a$ dostajemy w taki sam sposób długość górnego półokręgu, zatem z (84) wynika, że $2a = \pi$ czyli

$$a = \frac{\pi}{2}.$$

Obie funkcje S, C mają więc okres $4a = 2\pi$. Podobny rachunek możemy przeprowadzić przy założeniu, że $t_0 \in (2a, 4a)$. Punkt (x_0, y_0) leży teraz na dolnej części okręgu K określonej równaniem

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

zaś długość łuku K_0 określona jest jako

$$|K_0| = 2a + \int_{-1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Po podstawieniu (83) dostajemy

$$dx = -S(t)\, dt = -y\, dt = \sqrt{1-x^2}\, dt$$

i stąd

$$|K_0| = 2a + \int_{2a}^{t_0} dt = t_0 \tag{85}$$

podobnie jak poprzednio. Z otrzymanych równości (84), (85) wynika, że parametr t stanowi miarę łukową kąta między osią x-ów a półprostą łączącą początek układu z punktem

$$(x, y) = (C(t), S(t)) \tag{86}$$

leżącym na okręgu K. Z drugiej strony na mocy przyjętej w szkole definicji funkcji sin, cos mamy

$$(x, y) = (\cos t, \sin t). \tag{87}$$

Równości (86), (87) dają (71). □

Uwaga. W punkcie 9 rozdz. III §1 udowodniliśmy nierówność

$$0 < \sin\alpha < \alpha$$

dla $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ opierając się na szkolnej definicji funkcji $\sin\alpha$ i na odpowiednim rysunku (rys. 4). Łatwo okazać, że nierówność ta może być otrzymana dla funkcji $S(x)$ w sposób analityczny bez odwoływania się do intuicji geometrycznych. Istotnie, stosując twierdzenie Lagrange'a (twierdzenie 11 rozdz. III §4) dostajemy dla $0 < x < \frac{1}{2}\pi$

$$S(x) - S(0) = xS'(\bar{x}),$$

gdzie $0 < \bar{x} < x$, czyli wobec (72), (74), (78)

$$0 < S(x) = xC(\bar{x}).$$

Zatem

$$0 < S(x) < x,$$

gdyż z drugiej równości (72) i stwierdzenia 1 wynika, że $C(\bar{x}) < 1$. □

♡ ♡ ♡

8. Wzory Eulera. Czytelnik na pewno zauważył podobieństwo rozwinięć w szereg Maclaurina funkcji e^x, $\sin x$, $\cos x$ (wzory (32) - (34)). Okazuje się, że funkcje te są ze sobą ściśle związane, jeżeli przejdziemy do argumentów zespolonych. Przypominamy[2], że liczbę zespoloną zapisujemy w postaci

$$z = x + iy,$$

[2] Podstawowe wiadomości dotyczące liczb zespolonych można znaleźć w podręcznikach: B. Gleichgewicht, Algebra, Warszawa 1983 oraz A. Mostowski, M. Stark, Elementy algebry wyższej, Warszawa 1975.

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ zaś $i^2 = -1$. Na płaszczyźnie z wprowadzonym układem współrzędnych liczbie z przyporządkowujemy punkt (x, y). W szczególności *liczbie rzeczywistej* $z = x$ odpowiada punkt $(x, 0)$ leżący na osi x-ów, zaś *liczbie czysto urojonej* $z = iy$ - punkt $(0, y)$ na osi y-ów. Wartość funkcji wykładniczej oraz funkcji sin, cos dla argumentów zespolonych określamy zastępując formalnie x przez z w rozwinięciach (32) - (34). Mamy zatem

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$
$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

dla wszystkich zespolonych z (można udowodnić, że szeregi po prawej stronie są zbieżne). Przyjmijmy w szczególności $z = iy$, wówczas

$$z^n = \begin{cases} (-1)^k y^{2k} & \text{dla} \quad n = 2k, \\ (-1)^k i y^{2k+1} & \text{dla} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

i stąd po uwzględnieniu wzorów (33), (34) wynika, że

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{88}$$

zgodnie z regułą dodawania szeregów i mnożenia ich przez liczbę (reguły te są takie same dla szeregów o wyrazach zespolonych jak dla szeregów rzeczywistych). Zastępując y przez $-y$ we wzorze (88) otrzymujemy

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

zaś dodanie dwóch ostatnich równości daje

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}), \qquad \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}). \tag{89}$$

Wzory (88), (89) noszą nazwę *wzorów Eulera.*

9. Zastosowanie rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy do przybliżonego obliczania jej wartości. Ponieważ, jak okazaliśmy (Przykład 5)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{90}$$

sumę częściową szeregu

$$S_{k-1}(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{x^n}{n!}$$

przy ustalonym x możemy uważać za przybliżoną wartość wyrażenia e^x przy czym błąd przybliżenia wynosi

$$r_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Aby oszacować go zauważmy, że

$$|r_k(x)| \leq \frac{|x|^k}{k!}\left(1 + \frac{|x|}{k+1} + \frac{|x|^2}{(k+1)(k+2)} + \cdots\right)$$

co po zmniejszeniu mianowników daje

$$|r_k(x)| \leq \frac{|x|^k}{k!}\left(1 + \frac{|x|}{k+1} + \frac{|x|^2}{(k+1)^2} + \cdots\right).$$

Wyrażenie w nawiasie przedstawia szereg geometryczny o ilorazie

$$q = \frac{|x|}{k+1}.$$

Dla $k+1 > |x|$ szereg ten jest zbieżny i jego suma wynosi

$$\frac{1}{1-q} = \frac{k+1}{k+1-|x|}$$

(por. Przykład 1 rozdz.IV §1), zatem

$$|r_k(x)| \leq \frac{(k+1)|x|^k}{(k+1-|x|)k!}. \tag{91}$$

Przykład 13. Przyjmując $x = 1$ w rozwinięciu (90) otrzymujemy przedstawienie liczby e w postaci sumy szeregu

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

zaś oszacowanie błędu (91) przyjmuje postać

$$0 < r_k(1) \leq \frac{k+1}{k(k!)} \quad (k \in \mathbb{N})$$

skąd dostajemy kolejno

$$r_2 \leq \frac{3}{4}, \quad r_3 \leq \frac{2}{9}, \quad r_4 \leq \frac{5}{96} < \frac{1}{10}, \quad r_5 \leq \frac{1}{100}.$$

Zatem

$$S_3 = \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!}$$

daje przybliżenie e z błędem $< 0,1$,

$$S_4 = \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n!}$$

daje przybliżenie e z błędem $< 0,01$ (proponujemy Czytelnikowi obliczenie tych sum).

Przechodząc do przybliżonego obliczania wartości logarytmu naturalnego przypomnijmy rozwinięcie (Przykład 6)

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (-1 < x \leq 1) \tag{92}$$

z którego po zastąpieniu x przez $-x$ dostajemy

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad (-1 \leq x < 1) \tag{93}$$

zaś po odjęciu stronami (92), (93)

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1). \tag{94}$$

Zastępując wyrażenie po lewej stronie (94) przez sumę częściową

$$S_{k-1}(x) = 2\sum_{n=0}^{k-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

popełniamy błąd

$$r_k(x) = 2\sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

który oszacujemy przy $x \in (-1,1)$. Zmniejszając mianowniki po prawej stronie dostajemy

$$|r_k(x)| \leq 2\frac{|x|^{2k+1}}{2k+1}(1 + x^2 + x^4 + \cdots),$$

co po zsumowaniu szeregu geometrycznego w nawiasie daje

$$|r_k(x)| \leq \frac{2|x|^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)} \qquad (|x| < 1). \tag{95}$$

Przykład 14. Znajdziemy przybliżoną wartość $\log 2$ (jest to jednocześnie suma szeregu anharmonicznego - por. Przykład 6). Należy w rozwinięciu (94) przyjąć $x = \frac{1}{3}$, wówczas lewa strona jest równa $\log 2$. Oszacowanie (95) przyjmuje postać

$$|r_k(\frac{1}{3})| \le \frac{1}{4 \cdot (2k+1) \cdot 3^{2k-1}}$$

co daje kolejno

$$|r_1(\frac{1}{3})| \le \frac{1}{36} < \frac{1}{10}, \qquad |r_2| \le \frac{1}{540} < \frac{2}{10^3}, \qquad |r_3| \le \frac{1}{6700} < \frac{2}{10^4}.$$

Wobec tego

$$S_0 = \frac{2}{3}$$

daje przybliżenie $\log 2$ z błędem $< 0,1$,

$$S_1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^4}$$

daje przybliżenie $\log 2$ z błędem $< 0,002$,

$$S_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{5 \cdot 3^5}$$

daje przybliżenie $\log 2$ z błędem $< 0,0002$ (proponujemy Czytelnikowi obliczenie tych sum).
♡ ♡ ♡

Zadania.

1. Znaleźć promień zbieżności i przedział zbieżności szeregów potęgowych

$$\text{a.)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n+1}, \qquad \text{b.)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{n}(x+1)^n,$$

$$\text{c.)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3n^2+2}, \qquad \text{d.)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n.$$

2. Znaleźć promień zbieżności szeregów potęgowych

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n} x^n \quad (0 < a \le b), \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^{\sqrt{n}}}$$

i zbadać ich zbieżność na końcach przedziału zbieżności.

Wskazówka. W punkcie (ii) przy obliczaniu promienia zbieżności zlogarytmować wyrażenie $\sqrt[n]{a_n}$ i skorzystać z Przykładu 31 rozdz.III §4.

3. Przy ustalonym $c \in \mathbb{R}$ znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}} x^n.$$

Wskazówka. Zacząć od przypadku $c = 1$ i skorzystać z zadania 3 rozdz.III §3.

4. Znaleźć promień zbieżności i przedział zbieżności szeregów potęgowych

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{3n-1}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{5n}, \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x+2)^{(n^2)}.$$

Zbadać zbieżność tych szeregów na końcach przedziału zbieżności.
Wskazówka. Można badać zbieżność podanych szeregów przy ustalonym x lub zastosować wzór Cauchy'ego - Hadamarda (57).

5. Podstawiając $x = 1$ w rozwinięciu (32) otrzymujemy przedstawienie liczby e jako sumy szeregu. Opierając się na tym przedstawieniu okazać, że e jest liczbą niewymierną.
Wskazówka. Udowodnić najpierw nierówność

$$0 < e - S_n < \frac{1}{n(n!)} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

gdzie S_n oznacza n-tą sumę częściową szeregu. Następnie z przypuszczenia, że e jest liczbą wymierną wywnioskować, że przedział $(0,1)$ zawiera liczbę całkowitą.

6. Udowodnić prawdziwość rozwinięć (36) i (48) opierając się na wzorze Taylora.
Wskazówka. Należy okazać, że

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad |x| < 1.$$

W tym celu korzystamy z postaci Lagrange'a reszty $R_n(x)$ gdy $x > 0$ oraz z postaci Cauchy'ego (zadanie 10 rozdz.III §5) gdy $x < 0$. W obu przypadkach przedstawiamy resztę $R_n(x)$ w postaci

$$R_n(x) = b_n(x) h_n(x),$$

gdzie przy ustalonym $x \in (-1,1)$ ciąg $b_n(x)$ jest zbieżny do zera a ciąg $h_n(x)$ jest ograniczony. Aby okazać, że

$$\lim_{n\to\infty} b_n(x) = 0$$

wystarczy udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(x)|.$$

7. Znaleźć rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^m} \qquad (m \in \mathbb{N}, |x| < 1)$$

wychodząc ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego (Przykład 1 rozdz.IV §1) i różniczkując otrzymany szereg. Porównać z rozwinięciem określonym wzorami (39), (48).

8. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x)$, jeżeli

$$\text{(i)} \quad f(x) = e^{(x^p)} \quad (p = 2, 3, 4, \ldots), \qquad \text{(ii)} \quad f(x) = \cos(2x^3),$$
$$\text{(iii)} \quad f(x) = \log(1 - x^2), \qquad \text{(iv)} \quad f(x) = \sqrt{1 - x^3},$$
$$\text{(v)} \quad f(x) = \frac{1}{ax+b} \quad (b \neq 0), \qquad \text{(vi)} \quad f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1},$$
$$\text{(vii)} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}, \qquad \text{(viii)} \quad f(x) = \sin x \cos x.$$

Sprawdzić, w jakim przedziale prawdziwe jest otrzymane rozwinięcie i znaleźć $f^{(k)}(0)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.
Wskazówka. Zastosować odpowiednie podstawienie w rozwinięciach omawianych w punkcie 4. W (vi) rozłożyć wyrażenie po prawej stronie na ułamki proste (por. rozdz.V §2 punkty 5, 6).

9. Rozwinąć funkcję $f(x)$ w szereg Taylora o środku x_0, jeżeli

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sin x, \quad x_0 = \pi, \qquad \text{(ii)} \quad f(x) = \frac{1}{ax+b}, \quad x_0 \ \text{dowolne}$$
$$\text{(iii)} \quad f(x) = \log(ax+b), \quad x_0 \ \text{dowolne}, \qquad \text{(iv)} \quad f(x) = e^{2x}, \quad x_0 = 1.$$

Sprawdzić, w jakim przedziale prawdziwe jest otrzymane rozwinięcie i znaleźć $f^{(k)}(x_0)$ dla $k \in \mathbb{N}$. Co trzeba założyć o współczynnikach a, b w (ii) i (iii)?
Wskazówka - jak w zadaniu 8.

10. Znaleźć sumy szeregów

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad \text{(iii)} \quad -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$$
$$\text{(iv)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{(v)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!}$$

Wskazówka. Skorzystać z rozwinięć w szereg Maclaurina omawianych w punkcie 4.

11. Znaleźć przybliżoną wartość wyrażeń

$$a = \sqrt{e}, \qquad b = \sqrt[3]{e^2}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

z błędem nie przekraczającym

$$\text{(i)}\quad 0,1 \qquad\qquad \text{(ii)}\quad 0,01.$$

Wskazówka. Oprzeć się na oszacowaniu (91).

12. Udowodnić, że dowolną liczbę $a > 0$ można zapisać w postaci

$$a = \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{gdzie} \quad |x| < 1.$$

13. Znaleźć przybliżoną wartość wyrażeń

$$\alpha = \log 3, \qquad \beta = \log 5$$

z błędem nie przekraczającym

$$\text{(i)}\quad 0,1 \qquad\qquad \text{(ii)}\quad 0,01$$

Wskazówka. Skorzystać z zadania 12 i z oszacowania błędu (95).

14. Niech $r_k(x)$ oznacza błąd, jaki popełniamy, zastępując funkcję po lewej stronie rozwinięcia (55) względnie (56) przez sumę częściową szeregu $S_{k-1}(x)$. Okazać, że

$$|r_k(x)| \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)} \qquad (|x| < 1,\ k \in \mathbb{N}).$$

15. Opierając się na rozwinięciu (55) znaleźć przybliżoną wartość π z błędem nie przekraczającym

$$\text{(i)}\quad 0,1 \qquad \text{(ii)}\quad 0,001 \qquad \text{(iii)}\quad 0,001.$$

Wskazówka. Przyjąć $x = \frac{1}{2}$ i skorzystać z oszacowania otrzymanego w zadaniu 14.

16. Znaleźć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\text{(i)}\quad \text{arctg}\frac{1}{2} \qquad \text{(ii)}\quad \text{arctg}2$$

z błędem nie przekraczającym 0, 1.
Wskazówka. Oprzeć się na oszacowaniu błędu otrzymanym w zadaniu 14. W części (ii) skorzystać z tożsamości (uzasadnić ją!)

$$\text{arctg}\, y = \frac{\pi}{4} + \text{arctg}\, x \qquad (y > 1),$$

gdzie

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

oraz z przybliżenia liczby π (por. zadania 14, 15).

17. Sprawdzić, że rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji

$$f(x) = \sqrt[p]{1+x} \quad (p = 2, 3, 4, \dots)$$

ma postać

$$\sqrt[p]{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (|x| < 1), \tag{96}$$

gdzie

$$c_n = (-1)^{n-1} \frac{(p-1)(2p-1)\cdots((n-1)p-1)}{n!p^n},$$

przy czym

$$|c_n| < \frac{1}{n}.$$

Okazać, że błąd $r_k(x)$, jaki popełniamy zastępując $f(x)$ przez sumę częściową $S_{k-1}(x)$ szeregu (96) daje się oszacować następująco:

$$|r_k(x)| \leq \frac{|x|^k}{k(1-x)}.$$

18. Opierając się na zadaniu 17 znaleźć przybliżone wartości wyrażeń

$$\text{(i)} \quad \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \qquad \text{(ii)} \quad \sqrt[4]{\frac{7}{4}} \qquad \text{(iii)} \quad \sqrt{\frac{3}{4}}$$

z błędem nie przekraczającym

$$\text{a.)} \quad 0,1 \qquad \text{b.)} \quad 0,01.$$

19. Podstawiając $x = 1$ w rozwinięciu (56) otrzymujemy przedstawienie liczby π jako sumy szeregu (zwanego szeregiem Leibniza)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{2n+1}$$

czyli

$$\pi = S_{p-1} + r_p \tag{97}$$

gdzie S_p oznacza p-tą sumę częściową szeregu zaś r_p jego p-tą resztę. Udowodnić, że

$$0 < r_{2k} < \frac{1}{k}, \qquad -\frac{1}{k} < r_{2k+1} < 0 \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{98}$$

Następnie korzystając z równości (97) i oszacowań (98) sprawdzić, ile wyrazów szeregu trzeba zsumować, aby obliczyć liczbę π z nadmiarem i z niedomiarem z błędem nie przekraczającym

(i) $0,1$ (ii) $0,01$ (iii) $0,001$.

20. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

i znaleźć jego sumę.
Wskazówka. Przyjmijmy oznaczenie

$$\prod_{k=1}^{n} d_k = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n.$$

Oznaczając przez u_n ogólny wyraz szeregu okazać najpierw, że

$$u_n = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{a_n},$$

gdzie

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right).$$

Następnie, przyjmując

$$b_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

sprawdzić, że

$$a_n \cdot b_n = 2n+1.$$

Ponieważ $b_n < a_n$, z ostatniej równości otrzymujemy oszacowanie zapewniające zbieżność szeregu.
W celu znalezienia sumy szeregu wykorzystać Przykład 9 i oprzeć się na twierdzeniu 3 oraz rozważaniach punktu 5.

21. Wyrazić sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

(por. Przykład 1) jako funkcję zmiennej $x \in (-1, 1)$.
Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 2 zróżniczkować obie strony równości

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$