HANNA MARCINKOWSKA

ZASTOSOWANIE CAŁKI KRZYWOLINIOWEJ DO OBLICZANIA POLA OBSZARU

Przez *krzywą* na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ będziemy rozumieli zbiór K punktów $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ określony równaniami

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad (a \le t \le b), \tag{1}$$

gdzie funkcje $x(t),\ y(t)$ są ciągłe w przedziale $[a,b]$. Zmienną t nazywamy *parametrem* zaś układ równań (1) - *opisem parametrycznym* krzywej K. Opis parametryczny (1) wyznacza kierunek, w jakim punkt $(x(t), y(t))$ porusza się po krzywej K przy rosnącym t. Mówimy, że opis (1) wyznacza *orientację* krzywej K. Punkt $A = (x(a), y(a))$ nazywamy *początkiem* krzywej K, punkt $B = (x(b), y(b))$ - *końcem* krzywej K.

Niech $P(x,y)$ będzie funkcją określoną i ciągłą na krzywej K mającej opis parametryczny (1). Wprowadzając podział przedziału $[a,b]$

$$\Pi : \qquad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$$

i obierając punkty pośrednie

$$\tau_j \in [t_{j-1}, t_j], \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

utworzymy sumę przybliżoną

$$S(P, \Pi, \tau(\Pi)) = \sum_{j=1}^{r} P(x(\tau_j), y(\tau_j)) \Delta x_j, \tag{2}$$

gdzie

$$\Delta x_j = x(t_j) - x(t_{j-1}).$$

Średnicą podziału Π nazywamy liczbę

$$d(\Pi) = \max_j (t_j - t_{j-1}),$$

zaś ciąg podziałów $\{\Pi_n\}$ spełniający warunek

$$\lim_{n\to\infty} d(\Pi_n) = 0$$

nazywamy *ciągiem normalnym podziałów.*

Jeżeli istnieje liczba A taka, że dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a,b]$ i dowolnego układu punktów pośrednich $\tau(\Pi_n)$

$$\lim_{n\to\infty} S(P, \Pi_n, \tau(\Pi_n)) = A,$$

to mówimy, że istnieje *całka krzywoliniowa*

$$\int_K P(x,y)\,dx \tag{3}$$

(czytamy: całka krzywoliniowa po krzywej K funkcji $P(x,y)$ względem x) i przyjmujemy

$$\int_K P(x,y)\,dx = A.$$

Mamy zatem

$$\int_K P(x,y)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(P,\Pi_n,\tau(\Pi_n))$$

niezależnie od sposobu, w jaki obraliśmy ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ i punkty pośrednie $\tau(\Pi_n)$. Zupełnie podobnie możemy dla funkcji $Q(x,y)$ określonej i ciągłej na krzywej K wprowadzić sumę przybliżoną

$$\tilde{S}(Q,\Pi,\tau(\Pi)) = \sum_{j=1}^{r} Q(x(\tau_j),y(\tau_j))\,\Delta y_j, \tag{4}$$

gdzie

$$\Delta y_j = y(t_j) - y(t_{j-1}).$$

Jeżeli istnieje liczba B taka, że dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a,b]$ i dowolnego układu punktów pośrednich $\tau(\Pi_n)$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}(Q,\Pi_n,\tau(\Pi_n)) = B,$$

to mówimy, że istnieje *całka krzywoliniowa*

$$\int_K Q(x,y)\,dy \tag{5}$$

(czytamy: całka krzywoliniowa po krzywej K funkcji $Q(x,y)$ względem y) i przyjmujemy

$$\int_K Q(x,y)\,dy = B.$$

Funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ możemy uważać za składowe pola wektorowego

$$\vec{v}(x,y) = [P(x,y),Q(x,y)].$$

Jeżeli istnieją obie całki (3), (5), to ich sumę nazywamy *całką krzywoliniową po krzywej K pola wektorowego $\vec{v}$* i oznaczamy symbolem

$$\int_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{6}$$

Mamy zatem

$$\int_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\Big(S(P,\Pi_n,\tau(\Pi_n)) + \tilde{S}(Q,\Pi_n,\tau(\Pi_n))\Big), \tag{7}$$

gdzie $\{\Pi_n\}$ jest dowolnie obranym ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a,b]$, zaś punkty pośrednie $\tau(\Pi_n)$ są dowolnie ustalone.

Dla ustalenia uwagi zajmiemy się w dalszym ciągu całką (3). Oczywiście wszystkie rozważania przenoszą się łatwo na przypadek całki (5). Przy dowolnym opisie parametrycznym (1) całka ta może nie istnieć, łatwo jednak podać warunki dostateczne dla jej istnienia:

(i) funkcja $x(t)$ jest funkcją o wahaniu skończonym, wówczas całka (3) jest całką Riemanna-Stieltjesa.

(ii) funkcja $x(t)$ jest klasy C^1. Sumę przybliżoną (2) możemy przekształcić stosując twierdzenie o wartości średniej. Mamy bowiem

$$\Delta x_j = \dot{x}(\bar{\tau}_j)\Delta t_j,$$

gdzie

$$\Delta t_j = t_j - t_{j-1}, \qquad \bar{\tau}_j \in (t_{j-1}, t_j)$$

i stąd

$$S(P,\Pi,\tau(\Pi)) = \sum_{j=1}^{r} P(x(\tau_j), y(\tau_j))\,\dot{x}(\bar{\tau}_j)\Delta t_j. \tag{8}$$

Zauważmy, że w przypadku gdy

$$\tau_j = \bar{\tau}_j, \tag{9}$$

wyrażenie po prawej stronie (8) jest sumą przybliżoną

$$T(P,\Pi,\tau(\Pi)) = \sum_{j=1}^{r} P(x(\tau_j), y(\tau_j))\dot{x}(\tau_j)\Delta t_j$$

całki

$$\int_a^b P(x(t), y(t))\dot{x}(t)\,dt. \tag{10}$$

Oczywiście równość (9) naogół nie zachodzi, gdyż liczby τ_j były dowolnie obrane, natomiast liczby $\bar{\tau}_j$ są narzucone przez twierdzenie o wartości średniej. Łatwo jednak okazać, że sumy S i T różnią się mało, jeżeli podział Π ma dostatecznie małą średnicę. Istotnie, uwzględniając (8) dostajemy

$$|S(P,\Pi,\tau(\Pi)) - T(P,\Pi,\tau(\Pi))| \leq \sum_{j=1}^{r} |P(x(\tau_j), y(\tau_j))|\, |\dot{x}(\bar{\tau}_j) - \dot{x}(\tau_j)|\, \Delta t_j. \tag{11}$$

Funkcja złożona $P(x(t), y(t))$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, jest więc w tym przedziale ograniczona. Istnieje zatem liczba $M > 0$ taka, że

$$|P(x(t), y(t))| \leq M \qquad \text{dla} \quad t \in [a, b], \tag{12}$$

natomiast z jednostajnej ciągłości pochodnej $\dot{x}(t)$ w przedziale $[a, b]$ wynika, że do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by

$$|\dot{x}(\bar{\tau}_j) - \dot{x}(\tau_j)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{13}$$

jeżeli

$$|\bar{\tau}_j - \tau_j| < \delta.$$

Z (11), (12), (13) dostajemy oszacowanie

$$|S(P,\Pi,\tau(\Pi)) - T(P,\Pi,\tau(\pi))| < \varepsilon$$

o ile $d(\Pi) < \delta$. Jeżeli wobec tego $\{\Pi_n\}$ jest dowolnie obranym ciągiem normalnym podziałów, to do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$|S(P,\Pi_n,\tau(\Pi_n)) - T(P,\Pi_n,\tau(\Pi_n))| < \varepsilon$$

a to oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} S(P,\Pi_n,\tau(\Pi_n)) = \lim_{n\to\infty} T(P,\Pi_n,\tau(\Pi_n))$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} S(P,\Pi_n,\tau(\Pi_n)) = \int_a^b P(x(t), y(t))\dot{x}(t)\, dt.$$

(iii) krzywa K jest wykresem funkcji ciągłej $f(x)$ w przedziale $[a, b]$, opis parametryczny (1) ma wówczas postać

$$x = t, \qquad y = f(t), \qquad (a \leq t \leq b)$$

zaś suma przybliżona (2)

$$\sum P(\tau_j, f(\tau_j))\Delta tj$$

jest sumą przybliżoną całki funkcji ciągłej $P(x, f(x))$, zatem w rozważanym przypadku

$$\int_K P(x, y)\, dx = \int_a^b P(x, f(x))\, dx.$$

Twierdzenie 1 (o podziale krzywej całkowania). *Załóżmy, że krzywa K mająca opis parametryczny (1) została podzielona na dwie krzywe*

K_1 o opisie parametrycznym (1) dla $a \le t \le c$

oraz

K_2 o opisie parametrycznym (1) dla $c \le t \le b$,

gdzie $c \in (a,b)$. Niech $P(x,y)$ będzie funkcją określoną i ciągłą na krzywej K. Wówczas z istnienia całek po krzywych K_j (j=1,2) wynika istnienie całki po krzywej K i zachodzi równość

$$\int_K P(x,y)\,dx = \int_{K_1} P(x,y)\,dx + \int_{K_2} P(x,y)\,dx.$$

DOWÓD. Ustalając podział

$$\Pi: \quad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$$

przedziału $[a,b]$ i punkty pośrednie $\tau(\Pi)$ przyjmijmy, że $c \in (t_{s-1}, t_s]$. Jeżeli

1^0 $c = t_s$ jest jednym z punktów podziału

lub

2^0 $t_{s-1} < c < t_s$ ale $\tau_s = c$,

to

$$S(P,\Pi,\tau(\Pi)) = S_1(P,\Pi_1,\tau(\Pi_1)) + S_2(P,\Pi_2,\tau(\Pi_2)), \tag{14}$$

gdzie

$$\Pi_1: \quad a = t_0 < \cdots < c \qquad \text{oraz} \qquad \Pi_2: \quad c < t_{s+1} < \cdots < b$$

są podziałami przedziałów $[a,c]$ oraz $[c,b]$ odpowiednio. Gdy nie jest spełniony żaden z warunków 1^0, 2^0, to $t_{s-1} < c < t_s$ i zachodzi jedna z nierówności

$$t_{s-1} \le \tau_s < c \qquad \text{lub} \qquad c < \tau_s \le t_s.$$

Załóżmy, że spełniona jest pierwsza z nich, w przypadku drugiej nierówności rozumowanie jest podobne i pozostawiamy je Czytelnikowi. Wprowadzając dodatkowy punkt pośredni $\bar{\tau}_s \in [c, t_s]$ mamy

$$S(P,\Pi,\tau(\Pi)) = S_1(P,\Pi_1,\tau(\Pi_1)) + S_2(P,\Pi_2,\tau(\Pi_2)) + A(\Pi) \tag{15}$$

gdzie

$$A(\Pi) = \Big(P(x(\tau_s), y(\tau_s)) - P(x(\bar{\tau}_s), y(\bar{\tau}_s))\Big)(x(t_s) - x(c)).$$

Z ciągłości funkcji $P(x,y)$ wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by przy $d(\Pi) < \delta$ zachodziło oszacowanie

$$|A(\Pi)| \le \varepsilon(M - m),$$

gdzie M, m oznaczają kres górny i dolny funkcji $x(t)$.

Jeżeli teraz Π_n jest ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$, to z (14), (15) wynika, że

$$S(P, \Pi_n, \tau(\Pi_n)) = S_1(P, \Pi_{1,n}, \tau(\Pi_{1,n}) + S_2(P, \Pi_{2,n}, \tau(\Pi_{2,n})) + A(\Pi_n)$$

przy czym

$$\lim_{n\to\infty} A(\Pi_n) = 0. \tag{16}$$

Przechodząc do granicy przy $n \to \infty$ w równości (16) otrzymujemy tezę twierdzenia.

W definicji całki krzywoliniowej korzystamy zs opisu parametrycznego (1) krzywej K. Powstaje pytanie, jak zachowa się całka, jeżeli użyjemy innego opisu parametrycznego wprowadzając we wzorach (1) nowy parametr s przy pomocy podstawienia $t = t(s)$. Nowy opis parametryczny krzywej K ma zatem postać

$$x = x(t(s)), \qquad y = y(t(s)). \tag{17}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(t)\int_K, \qquad (s)\int_K$$

dla całki krzywoliniowej zdefiniowanej przy użyciu opisu parametrycznego (1) względnie (17) możemy sformułować twierdzenie

Twierdzenie 2. *Niech $P(x, y)$ będzie funkcją ciągłą określoną na krzywej K zaś $t(s)$ funkcją ściśle monotoniczną i ciągłą w przedziale $[c, d]$. Wówczas z istnienia całki określonej przy użyciu parametru t wynika istnienie całki określonej przy użyciu parametru s i zachodzą równości*

(i) jeżeli funkcja $t(s)$ jest ściśle rosnąca, to

$$(s)\int_K P(x, y)\,dx = (t)\int_K P(x, y)\,dx,$$

(ii) jeżeli funkcja $t(s)$ jest ściśle malejąca, to

$$(s)\int_K P(x, y)\,dx = -(t)\int_K P(x, y)\,dx.$$

DOWÓD Obierzmy dowolnie podział

$$\Pi: \quad c = s_o < s_1 < \cdots < s_r = d$$

przedziału $[c, d]$ oraz punkty pośrednie $\sigma_j \in [s_{j-1}, s_j]$ i niech

$$t_j = t(s_j), \qquad \tau_j = t(\sigma_j).$$

W przypadku (i) mamy

$$S(P, \Pi, \sigma(\Pi)) = S(P, \Pi_1^*, \tau\Pi_1^*)), \tag{18}$$

gdzie

$$\Pi_1^*: \quad t(c) = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = t(d)$$

zaś w przypadku (ii) zachodzi równość

$$S(P, \Pi, \sigma(\Pi)) = -S(P, \Pi_2^*, \tau(\Pi_2^*)), \tag{19}$$

gdzie

$$\Pi_2^*: \quad t(d) = t_r < t_{r-1} < \cdots < t_o = t(c).$$

Funkcja $t(s)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[c, d]$, zatem jest w tym przedziale jednostajnie ciągła. Wynika stąd, że jeżeli $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów, to tą samą własność mają ciągi $\{\Pi_{1,n}^*\}$, $\{\Pi_{2,n}^*\}$. W oparciu o (18), (19) dostajemy równości

$$S(P, \Pi_n, \sigma(\Pi_n)) = S(P, \Pi_{1,n}^*, \tau(\Pi_{1,n}^*))$$

oraz

$$S(P, \Pi_n, \sigma(\Pi_n)) = -S(P, \Pi_{2,n}^*, \tau(\Pi_{2,n}^*)),$$

z których po przejściu do granicy przy $n \to \infty$ wynika teza twierdzenia.

Jak wiemy, opis parametryczny wyznacza kierunek, w jakim punkt porusza się po krzywej wraz ze wzrostem parametru, czyli orientację krzywej. Jeżeli funkcja $t(s)$ jest ściśle rosnąca, to oba opisy (1) i (17) wyznaczają tę samą orientację krzywej K. Jeżeli natomiast funkcja $t(s)$ jest ściśle malejąca, to opis (17) wyznacza orientację przeciwną do tej, jaką nadaje krzywej K opis (1); krzywą z orientacją nadaną jej przez opis (17) oznaczamy wówczas przez $-K$. Z drugiej części twierdzenia 2 wynika więc

$$\int_{-K} P(x, y)\, dx = -\int_K P(x, y)\, dx. \tag{20}$$

Niech $\mathbb{D}$ będzie obszarem ograniczonym krzywą K. Mówimy, że krzywa K jest *zorientowana dodatnio względem obszaru* $\mathbb{D}$, jeżeli poruszając się po niej zgodnie z jej orientacją mamy obszar $\mathbb{D}$ po lewej stronie.

Niech g, h będą funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$, przy czym $g(x) < h(x)$ dla $x \in (a, b)$. Obszar $\mathbb{D}$ określony nierównościami

$$a \leq x \leq b, \qquad g(x) \leq y \leq h(x)$$

nazywamy *obszarem normalnym względem osi xów.* Brzeg K obszaru $\mathbb{D}$ jest sumą

$$K = (-K_1) \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4, \tag{21}$$

gdzie krzywe K_1, K_3 są wykresami funkcji h, g odpowiednio zorientowanymi w kierunku rosnącej współrzędnej x zaś krzywe K_2, K_4 stanowią odcinki prostych $x = a$, $x = b$ zorientowane tak, by krzywa K była zorientowana dodatnio względem obszaru $\mathbb{D}$ (proponujemy zrobienie rysunku). W dalszym ciągu rachunku będziemy zakładali, $\mathbb{D}$ jest takim obszarem.

Załóżmy teraz, że $P(x, y)$ jest funkcją klasy C^1 w obszarze $\mathbb{D}$. Zamieniając całkę podwójną na całkę iterowaną mamy

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy,$$

co po wykonaniu całkowania daje

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b P(x, h(x))\, dx - \int_a^b P(x, g(x))\, dx$$

czyli, zgodnie z (iii),

$$\iint_{bfD} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{K_1} P(x, y)\, dx - \int_{K_3} P(x, y)\, dx. \tag{22}$$

Zauważmy, że całki po odcinkach $K_2, , K_4$ są równe zeru, możemy je więc dodać do prawej strony (22). Opierając się na twierdzeniu 1 i korzystając z (20), (21) dostajemy ostatecznie

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_K P(x, y)\, dx.$$

Zamieniając role zmiennych x, y możemy zdefiniować *obszar normalny względem osi y-ów* jako obszar określony nierównościami

$$c \leq y \leq d, \qquad p(y) \leq x \leq q(y),$$

gdzie funkcje p, q są ciągłe w przedziale $[c, d]$ i spełniają nierówność $p(y) < q(y)$ dla $y \in (c, d)$. Powtarzając przeprowadzone wyżej rozumowanie z zastąpieniem x przez y dochodzimy do twierdzenia Greena:

Twierdzenie 3 (Greena). *Niech* $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ *będzie obszarem normalnym względem obu osi układu współrzędnych i niech ograniczająca go krzywa* K *będzie zorientowana dodatnio względem tego obszaru. Jeżeli* $P(x,y)$, $Q(x,y)$ *są funkcjami klasy* C^1 *w obszarze* $\mathbb{D}$, *to*

$$\iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_K P\, dx + Q\, dy. \tag{23}$$

Przy założeniach twierdzenia Greena łatwo z (23) otrzymać wzór pozwalający obliczyć pole $|\mathbb{D}|$ obszaru $|\mathbb{D}|$. Wystarczy przyjąć $P(x,y) = -y$ oraz $Q(x,y) = x$ i skorzystać z równości

$$|\mathbb{D}| = \iint_{\mathbb{D}} dx\, dy,$$

co daje

$$|\mathbb{D}| = \frac{1}{2} \int_K x\, dy - y\, dx. \tag{24}$$

Zastosujemy wzór (24) do obliczenia pola obszaru $|\mathbb{D}|$ ograniczonego elipsą o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (a > b > 0). \tag{25}$$

Rozwiązując (25) względem x i względem y sprawdzamy łatwo, że jest to obszar normalny względem obu osi. Zgodnie z twierdzeniem 2 całka po elipsie nie ulegnie zmianie, jeżeli użyjemy dowolnego opisu parametrycznego ciągłego zachowującego orientację krzywej. Przyjmując

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

i stosując (10) oraz analogiczny wzór z zastąpieniem x przez y dostajemy z (24)

$$|\mathbb{D}| = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = \pi ab$$

zgodnie ze znanym wzorem na pole elipsy.