Wrocław, 24 czerwca 2019r.

Test Kwalifikacyjny do Kolegium Doktorskiego Matematyki Szkoły Doktorskiej Uniwersytetu Wrocławskiego

1. Rozstrzygnąć ze szczegółowym uzasadnieniem, czy podane porządki są izomorficzne. Poniżej $\leq$ oznacza standardowy porządek na liczbach całkowitych lub wymiernych, a $\leq_{lex}$ — porządek leksykograficzny zdefiniowany przy użyciu standardowego porządku na osiach.

(1) (1 pkt) $(\mathbb{Q}, \leq)$ i $(\mathbb{Z}, \leq)$.

(2) (2 pkt) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq_{lex})$ i $(\mathbb{Z}, \leq)$.

(3) (3 pkt) $(\mathbb{Q}, \leq)$ i $((0, +\infty) \cap \mathbb{Q}, \leq)$.

2. Przypomnijmy, że działanie grupy G na zbiorze S jest [ściśle] n-tranzytywne, jeśli dla każdych ciągów $(x_1, \ldots, x_n)$ oraz $(y_1, \ldots, y_n)$, z których każdy złożony jest z parami różnych elementów zbioru S, istnieje [dokładnie jeden, w wersji ze słowem "ściśle"] element $g \in G$, taki że dla każdego $i \leq n$ zachodzi $gx_i = y_i$.

(1) (2 pkt) Rozważmy grupę G wszystkich przekształceń prostej rzeczywistej postaci $x \mapsto ax+b$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$. Czy naturalne działanie G na $\mathbb{R}$ jest ściśle 2-tranzytywne? Odpowiedź szczegółowo uzasadnić.

(2) (4 pkt) Załóżmy, że grupa G działa 1-tranzytywnie na zbiorze S. Załóżmy, że dla pewnego $x \in S$ stabilizator $\mathrm{Stab}_G(x)$ działa ściśle 2-tranzytywnie na $S \setminus \{x\}$. Dowieść, że G działa ściśle 3-tranzytywnie na S.
Uwaga. Za poprawne pokazanie 3-tranzytywności przysługują 2 punkty.

3. Dana jest skończenie wymiarowa przestrzeń wektorowa W nad ciałem $\mathbb{R}$, oraz jej podprzestrzenie $U, V < W$. Będziemy stosować oznaczenie $X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$ na przestrzeń dualną do przestrzeni wektorowej X, złożoną z wszystkich funkcjonałów liniowych na X. Rozważmy odwzorowanie $h : W^* \to U^* \times V^*$ zadane wzorem $h(\phi) = (\phi|_U, \phi|_V)$, gdzie $\phi|_U, \phi|_V$ to obcięcia funkcjonału ϕ do podprzestrzeni U i V, odpowiednio. Uzasadnij, że jeśli h jest izomorfizmem, to W jest sumą prostą podprzestrzeni U i V, $W = U \oplus V$ (gdzie to ostatnie oznacza, że $U \cap V = \{0\}$ oraz $U + V = W$).

4. Na zbiorze ciągów zerojedynkowych $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ określamy metrykę wzorem

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x = y \\ \frac{1}{2^n} & \text{jeśli } x \neq y \text{ i } n = \min\{k \colon x(k) \neq y(k)\} \end{cases}$$

(1) (2 pkt) Czy zbiór tych ciągów, które przyjmują jedynkę dokładnie 2019 razy jest domknięty? Czy jest otwarty? Odpowiedź uzasadnij.

(2) (2 pkt) Czy przestrzeń $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest ośrodkowa? Odpowiedź uzasadnij.

(3) (2 pkt) Pokaż, że przestrzeń $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest zwarta.

5. Ciąg liczb $\{x_n\}$ ma rozkład jednostajny na $[0,1]$ jeżeli

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

zachodzi dla każdej funkcji f ciagłej na $[0,1]$.

Udowodnić, że własność $(*)$ jest równoważna warunkowi

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k = \frac{1}{k+1}.$$

6. Funkcja f jest klasy $C^3[0,1]$ (to znaczy trzykrotnie różniczkowalna w sposób ciągły na $[0,1]$). Rozważamy wielkości

$$\Delta_n = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$\Delta_n' = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right).$$

(1) (2 pkt) Udowodnić, że $\Delta_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, gdy $n \to \infty$.

(2) (2 pkt) Obliczyć $\lim_{n\to\infty} n\Delta_n$.

(3) (2 pkt) Udowodnić, że $\Delta_n' = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, gdy $n \to \infty$.

Wskazówka: warto zastosować twierdzenie Taylora.

7. Zbadać, ile zer dla $t \geq 0$ może mieć rozwiązanie równania

$$x'' + x' + kx = 0$$

w zależności od parametru $k \geq 0$.

8. Niech f i g będą funkcjami całkowitymi, to znaczy holomorficznymi na $\mathbb{C}$. Załóżmy, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi nierówność $|g(z)| \leq |f(z)|$. Wykaż, że istnieje stała $\alpha \in \mathbb{C}$, taka że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ mamy $g(z) = \alpha f(z)$.

9. Rozważmy rozkład Gamma o gęstości

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta^2} x \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right).$$

(1) (1 pkt) Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję tego rozkładu.

(2) (1 pkt) Dysponując n-elementową próbą niezależnych obserwacji z tego rozkładu: $x_1, \ldots, x_n$ wyznacz estymator największej wiarygodności $\hat{\theta}$ parametru θ.

(3) (1 pkt) Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję $\hat{\theta}$.

(4) (2 pkt) Do jakiego rozkładu dąży rozkład zmiennej losowej $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ gdy $n \to \infty$? Odpowiedź uzasadnij.

(5) (1 pkt) Wyznacz asymptotyczny 95% przedział ufności dla θ, jeżeli $n = 50$ a $\frac{\sum_{i=1}^{50} x_i}{50} = 5$.

10. W urnie znajduje się jedna biała kula. Wykonujemy nieskończony ciąg doświadczeń: w każdym kroku losujemy z urny kulę, po czym wrzucamy ją z powrotem do urny dokładając jednocześnie czarną kulę. W pierwszym kroku wylosujemy więc kulę białą, w drugim białą lub czarną z prawdopodobieństwem $1/2$, itd.

(1) (2 pkt) Uzasadnij, że z prawdopodobieństwem 1 biała kula zostanie wylosowana nieskończenie wiele razy.

(2) (2 pkt) Niech X_n oznacza liczbę losowań do czasu n włącznie, w których wylosowaliśmy białą kulę. Oblicz $\mathbb{E}X_n$ oraz $\mathrm{Var}(X_n)$.

(3) (2 pkt) Pokaż, że ciąg $\{X_n/\log n\}_{n\geq 1}$ zbiega według prawdopodobieństwa do 1.

Uwaga: przypomnijmy, że ciąg $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ *zbiega do stałej.*

11. W urnie znajdują się dwie kule: czerwona i zielona. W każdym kroku losujemy jednostajnie jedną z kul, sprawdzamy jej kolor, zwracamy ją do urny, a następnie dokładamy do urny kolejną kulę tego samego koloru. Niech M_n oznacza stosunek liczby kul czerwonych do wszystkich kul w kroku n, $M_0 = 1/2$.

(1) (2 pkt) Pokaż, że $\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] = M_n$ (oznacza to, że ciąg $\{M_n\}_{n\geq 0}$ jest martyngałem).

(2) (2 pkt) Uzasadnij, że dla każdego n, rozkład M_n jest jednostajny na zbiorze $\{\frac{1}{n+2}, \frac{2}{n+2}, \dots, \frac{n+1}{n+2}\}$ (*Wskazówka: dowód można przeprowadzić indukcyjnie*).

(3) (2 pkt) Uzasadnij, że ciąg $\{M_n\}_{n\geq 0}$ jest zbieżny według rokładu. Wyznacz jego granicę.

12. Zając porusza się ze stałą prędkością jednostkową po prostej L zawartej w płaszczyźnie Π, w chwili $t = 0$ znajdując się w punkcie A. Pies porusza się z tą samą prędkością po płaszczyźnie Π, w każdej chwili w kierunku aktualnego położenia zająca, przy czym w chwili $t = 0$ znajduje się on w punkcie $B \neq A$ takim, że odcinek AB jest prostopadły do L. Wiadomo, że trajektoria psa jest gładką funkcją $P : [0, \infty) \to \Pi$ stanowiącą rozwiązanie odpowiedniego równania różniczkowego zwyczajnego.

(1) (1 pkt) Dobierz dogodny układ współrzędnych na płaszczyźnie Π, i wyznacz w nim równanie różniczkowe na trajektorię $P(t)$.

(2) (1 pkt) Korzystając z jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych (przy ustalonym warunku początkowym) uzasadnij, że trajektoria psa jest rozłączna z prostą L.

(3) (2 pkt) Uzasadnij, że odległość zająca od rzutu prostokątnego punktu położenia psa na prostą L cały czas rośnie. Wywnioskuj stąd, że odległość pomiędzy zającem i psem nie dąży do zera gdy $t \to \infty$.

(4) (2 pkt) Korzystając ze znanej własności, że dla różniczkowalnej funkcji $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zachodzi związek

$$(|X|^2)' = \langle X', X\rangle$$

(gdzie $\langle \cdot, \cdot\rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^2$, zaś $|X|^2 = \langle X, X\rangle$) uzasadnij, że odległość pomiędzy zającem i psem cały czas się zmniejsza.

Wrocław, 24th June, 2019

Qualifying Test
College of Mathematics
Doctoral School at Wrocław University

1. Determine (providing detailed justifications) whether the following orders are isomorphic. Below $\leq$ denotes the standard order on the integer or rational numbers, and $\leq_{lex}$ is the lexicographical order defined with respect to the standard orders.

(1) (1 pt) $(\mathbb{Q}, \leq)$ and $(\mathbb{Z}, \leq)$.

(2) (2 pts) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq_{lex})$ and $(\mathbb{Z}, \leq)$.

(3) (3 pts) $(\mathbb{Q}, \leq)$ and $((0, +\infty) \cap \mathbb{Q}, \leq)$.

2. Recall that an action of a group G on a set S is [strictly] n-transitive if for any two sequences $(x_1, \dots, x_n)$ and $(y_1, \dots, y_n)$, each of which consisting of pairwise distinct elements of S, there exists [exactly one, in the version with the word "strictly"] element $g \in G$ such that $gx_i = y_i$ for every $i \leq n$.

(1) (2 pts) Consider the group G of all transformations of the real line which are of the form $x \mapsto ax + b$ with $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $b \in \mathbb{R}$. Is the action of G on $\mathbb{R}$ strictly 2-transitive? Provide a detailed justification.

(2) (4 pts) Assume that a group G acts 1-transitively on a set S. Assume that for some $x \in S$ the stabilizer $\mathrm{Stab}_G(x)$ acts strictly 2-transitively on $S \setminus \{x\}$. Prove that G acts strictly 3-transitively on S.
Remark. Two points will be given for a correct proof of 3-transitivity.

3. Consider the following metric defined on the set of all zero-one sequences $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ by

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ \frac{1}{2^n} & \text{if } x \neq y \text{ and } n = \min\{k \colon x(k) \neq y(k)\} \end{cases}$$

(1) (2 pts) Consider the set of those sequences which take 1 exactly 2019 times. Is it closed? Is it open? Explain your answer.

(2) (2 pts) Is $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ separable? Explain your answer.

(3) (2 pts) Show that the space $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ is compact.

4. Let W be a finite dimensional vector space over the field $\mathbb{R}$, and let U, V be its subspaces. We use the notation $X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$ for the dual space of a vector space X, which consists of all linear functionals $\phi : X \to R$. Consider the map $h : W^* \to U^* \times V^*$ given by $h(\phi) = (\phi|_U, \phi|_V)$, where $\phi|_U, \phi|_V$ denote the restrictions of the functional ϕ to the subspaces U and V, respectively. Show that if h is an isomorphism (i.e. a bijective linear map) then W is the direct sum of the subspaces U and V, which we denote $W = U \oplus V$, and which means that $U \cap V = \{0\}$ and $U + V = W$.

5. The sequence $\{x_n\}$ has *uniform distribution* on the interval $[0,1]$ if the condition

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

is satisfied for each function f continuous on $[0,1]$.

Prove that the property $(*)$ is equivalent to the condition

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k = \frac{1}{k+1}.$$

6. The function f is $C^3[0,1]$ (three times continuously differentiable on $[0,1]$). Consider the quantities

$$\Delta_n = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$\Delta_n' = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right).$$

(1) (2 pts) Show that $\Delta_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, when $n \to \infty$.

(2) (2 pts) Compute the limit $\lim_{n\to\infty} n\Delta_n$.

(3) (2 pts) Show that $\Delta_n' = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, when $n \to \infty$.

Hint: use the Taylor theorem.

7. Consider solutions of the differential equation

$$x'' + x' + kx = 0$$

with $k \geq 0$. Determine how many zeros may have a solution — depending on the parameter k.

8. Let f i g be entire functions, that is, holomorphic on $\mathbb{C}$. Assume that for every $z \in \mathbb{C}$ the following inequality holds $|g(z)| \leq |f(z)|$. Prove that there is a constant $\alpha \in \mathbb{C}$, such that for every $z \in \mathbb{C}$ one has $g(z) = \alpha f(z)$. Argue your answer.

9. Consider Gamma distribution with the density

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta^2} x \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) .$$

(1) (1 pt) Calculate the expected value and the variance of this distribution.

(2) (1 pt) Based on a sample of independent observations $x_1, \ldots, x_n$ from this distribution calculate the maximum likelihood estimator $\hat{\theta}$ of θ.

(3) (1 pt) Calculate the expected value and the variance of $\hat{\theta}$.

(4) (2 pts) What is the limiting distribution of $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ when $n \to \infty$? Justify your answer.

(5) (1 pt) Calculate 95% asymptotic confidence interval for θ if $n = 50$ and $\frac{\sum_{i=1}^{50} x_i}{50} = 5$.

10. An urn contains one white ball. At each step a ball is chosen at random from the urn; the color is checked; and then the ball is returned to the urn and an additional black ball is added to the urn. At the first step we draw a white ball, at the second step white or black with probability 1/2, and so on.

(1) (2 pts) Prove that with probability one the white ball will be picked up infinitely many times.

(2) (2 pts) Let X_n denotes the number of draws up to step n, in which the white ball was chosen. Compute $\mathbb{E}X_n$ and $\mathrm{Var}(X_n)$.

(3) (2 pts) Show that the sequence $\{X_n/\log n\}_{n\geq 1}$ converges in probability to 1.

Remark: recall that the sequence $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n$ *converges to a constant.*

11. An urn contains one red and one green ball. At each step a ball is chosen at random from the urn, the color is checked, and then the ball is returned to the urn together with an another ball of the same color. Let M_n denotes the ratio of the number of red balls to all balls after step n, $M_0 = 1/2$.

(1) (2 pts) Prove that $\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] = M_n$ (i.e. $\{M_n\}_{n\geq 0}$ is a martingale).

(2) (2 pts) Show that for any n, the distribution of M_n is uniform on the set $\{\frac{1}{n+2}, \frac{2}{n+2}, \ldots, \frac{n+1}{n+2}\}$ (*Hint: one can proceed inductively*).

(3) (2 pts) Prove that the sequence $\{M_n\}_{n\geq 0}$ is convergent in distribution. Compute its limit.

12. A rabbit moves with constant speed 1 along a line L in a plane Π, so that at $t = 0$ it is at point A. A dog moves in the plane Π, with the same speed, at each moment in the direction of the current position of the rabbit, and at $t = 0$ it occupies point $B \neq A$ such that AB is perpendicular to L. It is known that the trajectory of the dog is a smooth function $P : [0, \infty) \to \Pi$ which is a solution of an appropriate ordinary differential equation.

(1) (1 pt) Choose a convenient coordinate system in Π and derive the ordinary differential equation for the trajectory $P(t)$.

(2) (1 pt) By referring to the uniqueness of solutions of ordinary differential equations (under fixed initial conditions), show that the trajectory of the dog does not intersect the line L.

(3) (2 pts) Show that the distance between the rabbit and the orthogonal projection to L of the position point of the dog is an increasing function. Deduce that the distance between the rabbit and the dog does not converge to 0 as $t \to \infty$.

(4) (2 pts) Using the well known fact that for a differentiable function $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ we have

$$(|X|^2)' = \langle X', X\rangle$$

(where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the standard scalar product in $\mathbb{R}^2$, and where $|X|^2 = \langle X, X\rangle$) prove that the distance between the rabbit and the dog is all the time decreasing.