

Wrocław, 23 czerwca 2020r.

TEST KWALIFIKACYJNY
DO KOLEGIUM DOKTORSKIEGO MATEMATYKI
SZKOŁY DOKTORSKIEJ UNIwersYTETU WROCLAWSKIEGO

1. Rozważamy płaszczyznę z metryką euklidesową.

- (1) (3 pkt) Udowodnij, że żaden niepusty podzbiór otwarty płaszczyzny nie zawiera się w przeliczalnej sumie odcinków.
- (2) (3 pkt) O zbiorze $G \subseteq \mathbb{R}^2$ powiemy, że jest *bardzo gęsty*, jeśli $G \cap U$ jest nieprzeliczalny dla każdego niepustego otwartego $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Pokaż, że istnieje zbiór borelowski G bardzo gęsty, którego dopełnienie również jest bardzo gęste.

W rozwiązaniu podpunktu (2) można użyć stwierdzenia z podpunktu (1) nawet, jeśli się go nie udowodniło.

2. Powiemy, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest *prawie ciągła*, jeśli dla każdego $r \in \mathbb{R}$ istnieje granica $\lim_{x \rightarrow r} f(x)$ (aczkolwiek może być ona różna od $f(r)$).

- (1) (2 pkt) Pokaż, że funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $g(r) = \lim_{x \rightarrow r} f(x)$ jest ciągła.
- (2) (2 pkt) Pokaż, że funkcja prawie ciągła może mieć tylko przeliczalnie wiele punktów nieciągłości.
- (3) (2 pkt) Znajdź moc zbioru funkcji prawie ciągłych (wraz z uzasadnieniem). Można użyć faktu, że moc zbioru funkcji ciągłych wynosi $\mathfrak{c}$, nie dowodząc go.

W rozwiązaniach poszczególnych podpunktów można używać stwierdzeń sformułowanych w innych podpunktach nawet, jeśli się ich nie udowodniło.

3. Przypomnijmy, że działanie grupy G na zbiorze X nazywamy *2-tranzytywnym*, gdy dla każdych $x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in X$, takich że $x_1 \neq x_2$ oraz $x'_1 \neq x'_2$, istnieje $g \in G$, takie że $gx_1 = x'_1$ oraz $gx_2 = x'_2$. Przypomnijmy też, że *klasę sprzężenia* elementu a grupy H nazywamy zbiór $a^H := \{hah^{-1} : h \in H\}$.

Niech H będzie dowolną nietrywialną grupą z elementem neutralnym e . Niech $\circ$ będzie działaniem grupy $G := H \times H$ na zbiorze $X := H$ zadany przez $(g, h) \circ x := gxh^{-1}$.

- (1) (1 pkt) Udowodnić, że działanie $\circ$ jest tranzytywne.
- (2) (2 pkt) Udowodnić, że jeśli działanie $\circ$ jest 2-tranzytywne, to H ma dokładnie jedną nietrywialną klasę sprzężenia (tzn. $H = a^H \sqcup \{e\}$ dla pewnego $a \in H$, gdzie $\sqcup$ oznacza sumę rozłączną).
- (3) (3 pkt) Udowodnić, że jeśli H ma dokładnie jedną nietrywialną klasę sprzężenia, to działanie $\circ$ jest 2-tranzytywne.

4. Dane jest liniowe przekształcenie $F : V \times W \rightarrow Z$. Oznaczmy przez $F_V : V \rightarrow Z$ i $F_W : W \rightarrow Z$ przekształcenia zadane wzorami $F_V(v) := F(v, 0)$, $F_W(w) := F(0, w)$. Oznaczmy też przez W_0 podprzestrzeń $\{0\} \times W < V \times W$. Załóżmy też, że $F_W : W \rightarrow Z$ jest izomorfizmem.

- (1) (2 pkt) Uzasadnij, że $V \times W = W_0 \oplus \ker F$, tzn. $W_0 \cap \ker F = \{0\}$ oraz $W_0 + \ker F = V \times W$ (lub równoważnie, dowolny $x \in V \times W$ przedstawia się jednoznacznie w postaci $x = a + b$, gdzie $a \in W_0$, $b \in \ker F$).
- (2) (2 pkt) Uzasadnij, że odwzorowanie $h : V \rightarrow W$ określone jako $h = -F_W^{-1} \circ F_V$ spełnia warunek $F(v, h(v)) = 0$ dla każdego $v \in V$.
- (3) (2 pkt) Uzasadnij, że odwzorowanie $h : V \rightarrow W$ spełniające warunek jak w tezie punktu (2) jest jedyne, i że jest ono liniowe.

5.

- (1) (3 pkt) Udowodnij, że dla $\alpha \geq 1$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1} + \dots + (n-1)^{\alpha-1}}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

- (2) (3 pkt) Udowodnij powyższy wzór dla $0 < \alpha < 1$. Odpowiedź szczegółowo uzasadnij.

6. Niech $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji niemalejących na przedziale otwartym $(0, 1)$ i niech $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że $E \subset (0, 1)$ jest gęstym podzbiorem przedziału $(0, 1)$, takim że:

$$\left(\forall x \in E \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \right).$$

- (1) (5 pkt) Wykaż, że zbieżność f_n do f jest jednostajna na każdym przedziale domkniętym $[a, b] \subset (0, 1)$.
- (2) (1 pkt) Czy f_n zbiega jednostajnie na $(0, 1)$ do funkcji f ? Odpowiedź uzasadnij.

7. Rozważamy równanie wahadła matematycznego $\ddot{x} + x = 0$ z warunkami początkowymi $x(0) = A \sin \varphi$, $\dot{x}(0) = A \cos \varphi$; A jest tu amplitudą drgań, φ — początkową fazą. Wyznaczyć dla $t > 0$ rozkład prawdopodobieństwa współrzędnej $x(t) \in [-A, A]$ dla $t > 0$ (jego gęstość lub dystrybuantę) jeżeli początkowa faza φ ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\pi, \pi)$. Dla jakich $x \in [-A, A]$ ta gęstość jest mała, a dla jakich duża?

8. Zbadać kiedy zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego zwyczajnego

$$\dot{x} = \sqrt{|x|} + x^2$$

dla $t > 0$, $x(0) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, ma rozwiązanie jednoznaczne, a kiedy globalne w czasie (tzn. dla wszystkich $t > 0$).

9. Niech π będzie jednostajnie wybraną losową permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Mówimy, że $\pi(k)$ jest rekordem, jeżeli $\pi(k) > \pi(j)$ dla $j = 1, \dots, k-1$.

- (1) (2 pkt) Niech A_k oznacza zdarzenie $\{\pi(k) \text{ jest rekordem}\}$. Oblicz $\mathbb{P}[A_k]$.
- (2) (2 pkt) Udowodnij, że zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ są niezależne.
- (3) (2 pkt) Niech X_n oznacza liczbę rekordów. Oblicz $\mathbb{E}X_n$ oraz $\text{Var}X_n$.

W rozwiązaniu podpunktu (3) można użyć stwierdzenia z podpunktu (2) nawet, jeśli się go nie udowodniło.

10. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i wszystkie mają rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$. Zdefiniujmy

$$T = \inf\{n : X_1 + \dots + X_n \geq 1\}.$$

- (1) (3 pkt) Pokaż, że T jest skończone prawie wszędzie.
- (2) (3 pkt) Wyznacz rozkład T . (Wskazówka: oblicz $\mathbb{P}[T > k]$)

11. Niech $X = \mu + W$, gdzie $W \sim N(0, 1)$. Ponadto, $\mu = \gamma Z$, gdzie W, Z i γ są niezależnymi zmiennymi losowymi, $Z \sim N(0, \sigma^2 = 2)$ a $P(\gamma = 0) = 3/4 = 1 - P(\gamma = 1)$.

- (1) (1 pkt) Wyznacz warunkowe rozkłady X pod warunkiem $\gamma = 0$ i $\gamma = 1$.
- (2) (1 pkt) Wyznacz $P(\mu = 0|X)$.
- (3) (1 pkt) Hipoteza $H_0 : \mu = 0$ jest odrzucana gdy $P(\mu = 0|X) < 0.5$. Wyznacz krytyczną wartość tego testu w terminach $|X|$ (tzn. wyznacz najmniejszą wartość $|X|$ dla której H_0 jest odrzucana).
- (4) (1 pkt) Wyznacz p-stwo pierwszego rodzaju dla tego testu, zadane wzorem

$$t_1 = P(H_0 \text{ odrzucona} | H_0 \text{ prawdziwa}) .$$

- (5) (1 pkt) Wyznacz p-stwo drugiego rodzaju dla tego testu, zadane wzorem

$$t_2 = P(H_0 \text{ przyjęta} | H_0 \text{ fałszywa}) .$$

- (6) (1 pkt) Wyznacz warunkową frakcję fałszywych odkryć, zadaną wzorem

$$pFDR = P(H_0 \text{ prawdziwa} | H_0 \text{ odrzucona}) .$$

12. Niech (X, Ω, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $\mathcal{F}$ będzie pewną rodziną funkcji mierzalnych z X w $[0, 1]$. Dla funkcji mierzalnych $f, g: X \rightarrow [0, 1]$ nierówność $f \leq_\mu g$ będzie oznaczać, że $f \leq g$ prawie wszędzie względem miary μ . Powiemy, że funkcja mierzalna $f: X \rightarrow [0, 1]$ jest *istotnym supremum* rodziny $\mathcal{F}$, gdy $g \leq_\mu f$ dla wszystkich $g \in \mathcal{F}$ oraz dla każdej funkcji mierzalnej $h: X \rightarrow [0, 1]$, która spełnia $g \leq_\mu h$ dla wszystkich $g \in \mathcal{F}$, zachodzi $f \leq_\mu h$.

- (1) (2pkt) Podać przykład rodziny $\mathcal{F}$ (dla pewnej przestrzeni probabilistycznej), której zwykle supremum nie jest istotnym supremum.
- (2) (2pkt) Udowodnić, że jeśli rodzina $\mathcal{F}$ jest przeliczalna, to zwykle supremum tej rodziny jest jej istotnym supremum.
- (3) (2pkt) Udowodnić, że jeśli rodzina $\mathcal{F}$ jest dobrze uporządkowana przez $\leq_\mu$ (tzn. $(\mathcal{F}, \leq_\mu)$ jest dobrym porządkiem), to jest ona przeliczalna.