

Zadania z programowania matematycznego i optymalizacji

Zadanie 1.

Zadanie polega na optymalizacji produkcji dwóch ciast: drożdżowego do którego potrzeba jednego jajka i 40 deko mąki oraz biszkoptowego do którego wymagane są dwa jajka i 20 deko mąki. Do produkcji ciast możemy zużyć co najwyżej 102 jajka oraz 20,4 kilo mąki. Producent chce uzyskać możliwie największy zysk, przy czym za ciasto drożdżowe może żądać 13 złotych, a za biszkoptowe 15 złotych. Przedstawić także interpretację graficzną. Wsk. Posłużyć się metodą sympleks do minimalizacji odpowiedniej funkcji zysku, przy zadanych ograniczeniach na ilości mąki i jajek.

Zadanie 2.

Sterując przyspieszeniem $u(t) \in \{-1, 1\}$ znaleźć rozwiązanie optymalne dla ruchu pojazdu o masie jeden opisanego równaniem

$$x''(t) = u(t)$$

tak aby z punktu $(-2, 0)$ dosterować do punktu $(0, 0)$ w przestrzeni fazowej (x, x') . Znaleźć punkt przełączenia sterowania i przedstawić interpretację geometryczną oprócz rozwiązania analitycznego. Wsk. Posłużyć się zasadą maksimum Potriagina.

Zadanie 3.

Kanał o głębokości opisanej funkcją $y = y(x)$ dla $x \in (0, 1)$ budujemy tak aby zminimalizować długość krzywej o wykresie $(x, y(x))$. Zakładamy, że $y(0) = y(1) = 0$ oraz $\int_0^1 y(x) dx = 1$. Posługując się metodą mnożników Lagrange'a dla odpowiedniego funkcjonału przy zadanym ograniczeniu wyznaczyć funkcję $y = y(x)$.

Zadanie 3a.

Wyznaczyć krzywą o minimalnej długości łączącą punkty $(0, 0)$ i $(1, 1)$. Wsk. Posłużyć się metodą minimalizacji odpowiedniego funkcjonału długości rozwiązując odpowiadające mu równanie Eulera-Lagrange'a.

Zadanie 4.

Dla zagadnienia poruszającego się pojazdu przy sterowaniu jego prędkością $u(t) \in \{0, 1\}$

$$x'(t) = u(t)$$

z punktu startu $x(0) = -3/4$ znaleźć sterowanie aby znaleźć się w punkcie $x = 0$ możliwie najmniejszym kosztem

$$\int_0^T |x(t)| dt .$$

Sformułować równanie Hamiltona-Jacobiego-Belmanna oraz zasadę maksimum Pontriagina.

Zadanie 5.

Znaleźć minimum funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ przy ograniczeniu $y = x^2$. Posłużyć się zarówno metodą mnożników Lagrange'a i porównać wynik z metodą bezpośrednią sprowadzając zadanie do minimalizacji funkcji jednej zmiennej.