Warsztaty z Równań Różniczkowych Cząstkowych
Toruń, 12-22 listopada 2002 roku

RÓWNANIE CIEPŁA

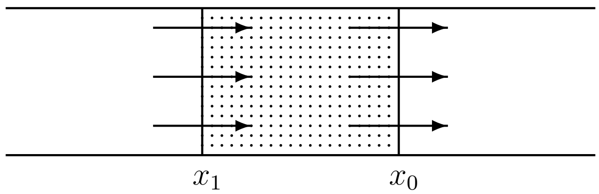
GRZEGORZ KARCH
Uniwersytet Wrocławski
oraz Polska Akademia Nauk (2002-2003)

Spis treści

e-mail: *karch@math.uni.wroc.pl*
WWW: *http://www.math.uni.wroc.pl/~karch*

1 Równanie dyfuzji – motywacje fizyczne

Wyobraźmy sobie nieruchomą ciecz (np. wodę) wypełniającą cienką prostą rurkę, do której wprowadzono pewną inną substancję (np. barwnik).



Następujące prawo opisuje zjawisko dyfuzji: *barwnik przechodzi z obszaru o wyższej koncentracji do obszaru o niższej koncentracji. Dodatkowo, prawo Ficka mówi, że ta prędkość przechodzenia jest proporcjonalna do gradientu koncentracji.*

Wyjaśnijmy to dokładniej. Niech $u(x,t)$ oznacza koncentrację (tj. masę na jednostkę długości) barwnika w punkcie x rurki i chwili t. Masa barwnika w odcinku rurki od x_0 do x_1 równa jest

$$M(t) = \int_{x_0}^{x_1} u(x,t)\,dx \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt}M(t) = \int_{x_0}^{x_1} u_t(x,t)\,dx.$$

Masa barwnika w tym odcinku rurki może zmieniać się tylko wpływając lub wypływając przez jej końce. Z prawa Ficka wynika więc, że

$$\frac{dM}{dt} = \text{wpływanie} - \text{wypływanie} = ku_x(x_1,t) - ku_x(x_0,t),$$

gdzie k jest stałą proporcjonalności. Różniczkując względem x_1 tożsamość

$$\int_{x_0}^{x_1} u_t(x,t)\,dx = ku_x(x_1,t) - ku_x(x_0,t),$$

otrzymamy jednowymiarowe równanie dyfuzji

$$u_t = ku_{xx}.$$

Aby wyprowadzić wielowymiarowe równanie dyfuzji potrzebny nam jest pewien fakt z rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych.

Twierdzenie 1 (Tw. Greena) *Niech Ω oznacza podzbiór $\mathbb{R}^n$ taki, że jego brzeg $\partial\Omega$ jest klasy C^1. Dla każdej funkcji*

$$f = (f_1, .., f_n) \ : \ \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$$

spełniającej $f_i \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $i = 1, ..., n$, prawdziwy jest wzór

$$\int_\Omega \nabla \cdot f\,dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot \bar{n}\,d\sigma,$$

gdzie $\nabla \cdot f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_k}$, wektor $\bar{n} = \bar{n}(x)$ jest zewnętrznym wektorem normalnym do $\partial\Omega$ w punkcie $x \in \partial\Omega$ oraz $d\sigma$ oznacza miarę powierzchniową na $\partial\Omega$. □

Rozpatrzmy równanie dyfuzji w trzech wymiarach. Funkcja koncentracji $u = u(x,y,z,t)$ spełnia (na podstawie prawa Ficka) równanie bilansu

$$\int\int\int_D u_t(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz = \int\int_{\partial D} k(\bar{n}\cdot\nabla u)\,d\sigma,$$

gdzie $D \subset I\!R^3$ jest dowolnym spójnym obszarem. Stosujemy Twierdzenie Greena do całki po prawej stronie, co prowadzi do równości

$$\int\int\int_D u_t(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_D \nabla\cdot k(\nabla u)\,dx\,dy\,dz.$$

Ponieważ D był dowolnym obszarem, więc otrzymujemy równanie dyfuzji

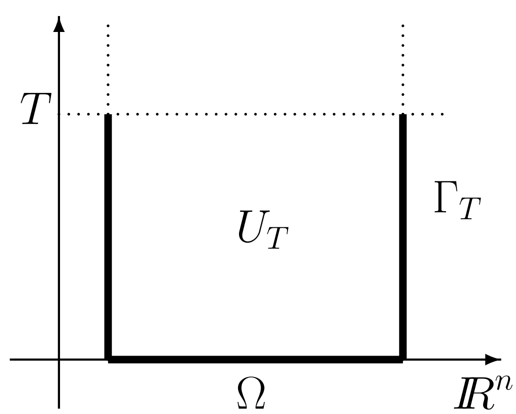
$$u_t = \nabla\cdot(k\nabla u) = k\sum_{i=k}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = k\Delta u.$$

Tak samo wyprowadza się *równanie ciepła* na rozkład temperatury $u = u(x,y,z,t)$. Stosuje się tutaj prawo Fouriera, które mówi, że potok ciepła z obszarów cieplejszych do obszarów zimniejszych jest proporcjonalny do gradientu temperatury.

2 Zasada maksimum i jednoznaczność rozwiązań

Niech Ω będzie ograniczonym obszarem w $I\!R^n$. Dla każdego $T > 0$ definiujemy

- *cylinder*: $U = U_T = \Omega\times(0,T)$ oraz jego
- *brzeg paraboliczny*: $\Gamma = \Gamma_T = \{(x,t)\in\bar{U}\ :\ x\in\partial\Omega \quad \text{lub} \quad t=0\}$.



Zdefiniujmy jeszcze dwie przestrzenie funkcyjne systematycznie używane w poniższych rozważaniach:

- $C(\bar{U})$ oznacza zbiór funkcji ciągłych na domknieciu zbioru U;
- $C^{2,1}(U)$ to zbiór funkcji $f = f(x,t)$ określonych na U takich, że wszystkie pochodne $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ $(i,j\in\{1,...,n\})$ są ciągłe.

Twierdzenie 2 (Słaba zasada maksimum) *Załóżmy, że funkcja* $u \in C^{2,1}(U) \cap C(\bar{U})$ *spełnia nierówność różniczkową*

$$\Delta u \geq u_t \quad w\ cylindrze \quad U.$$

Wówczas $u = u(x,t)$ *przyjmuje swoje maksimum na brzegu parabolicznym* Γ*:*

$$\max_{(x,t)\in \bar{U}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in \Gamma} u(x,t).$$

Dowód. Krok 1. Załóżmy najpierw, że $\Delta u > u_t$ w cylindrze U. Dla $0 < \tau < T$ rozważamy

$$U_\tau = \Omega \times (0,\tau), \quad \Gamma_\tau = \{(x,t) \in \bar{U}_\tau \ :\ x \in \partial\Omega \quad \text{lub} \quad t = 0\}.$$

Jeżeli maksimum funkcji $u(x,t)$ na cylindrze $\bar{U}_\tau$ jest przybierane w $x \in \Omega$ i $t = \tau$, to w tym punkcie

$$u_t(x,\tau) \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \Delta u(x,\tau) \leq 0.$$

Zatem $\Delta u(x,\tau) \leq u_t(x,\tau)$, a to jest sprzeczne z założeniem.

Podobnie otrzymuje się sprzeczność dla $x \in \Omega$ i $0 < t < \tau$. Zatem dla zbioru U_τ mamy

$$\max_{(x,t)\in \bar{U}_\tau} u(x,t) = \max_{(x,t)\in \Gamma_\tau} u(x,t).$$

Ponieważ $\max_{\Gamma_\tau} u(x,t) \leq \max_{\Gamma} u(x,t)$, więc z ciągłości funkcji u wynika, że

$$\max_{\bar{U}} u = \lim_{\tau\to T} \max_{\bar{U}_\tau} u = \lim_{\tau\to T} \max_{\Gamma_\tau} u = \max_{\Gamma} u.$$

Krok 2. Zakładamy teraz, że $\Delta u \geq u_t$ na zbiorze U. Definiujemy nową funkcję $v(x,t) = u(x,t) - \kappa t$ dla pewnego ustalonego $\kappa > 0$. Łatwo jest sprawdzić następujące nierówności

$$v \leq u \quad \text{oraz} \quad \Delta v - v_t = \Delta u - u_t + \kappa > 0$$

na zbiorze U. Stosujemy Krok 1 do funkcji $v(x,t)$ i otrzymujemy

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\bar{U}}(v + \kappa t) \leq \max_{\bar{U}} v + \kappa T = \max_{\Gamma} v + \kappa T \leq \max_{\Gamma} u + \kappa T.$$

Przechodzimy teraz do granicy $\kappa \to 0$ i otrzymujemy nierówność

$$\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\Gamma} u.$$

Nierówność przeciwna jest oczywista i to kończy dowód. □

Wniosek 1 (Słaba Zasada Minimum) *Założenia* $u \in C^{2,1}(U)\cap C(\bar{U})$ *oraz* $\Delta u \leq u_t$ *implikują*

$$\min_{\bar{U}} u(x,t) = \min_{\Gamma} u(x,t).$$

Dowód. Wystarczy w zasadzie maksimum zastąpić $u(x,t)$ przez $-u(x,t)$. □

Uwaga: Najważniejszą w naszych rozważaniach będzie oczywista obserwacja, że rozwiązania równania ciepła $u_t = \Delta u$ spełniają zarówno zasadę minimum jak i zasadę maksimum. □

Zasady minimum i maksimum są podstawowym narzędziem w dowodach jednoznaczności rozwiązań zagadnienia brzegowo-początkowego dla niejednorodnego równania ciepła

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + f(x,t), \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x,t) &= h(x,t), \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Funkcje f, g, h są tutaj zadane, a niewiadomą jest $u = u(x,t)$.

Twierdzenie 3 (Jednoznaczność rozwiązań) *Zagadnienie brzegowo-początkowe (1) może mieć co najwyżej jedno rozwiązanie $u \in C^{2,1}(U) \cap C(\bar{U})$.*

Dowód. Przypuśćmy, że mamy dwa rozwiązania $u, \tilde{u} \in C^{2,1}(U) \cap C(\bar{U})$. Wtedy ich różnica $w = u - \tilde{u}$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{aligned} w_t &= \Delta w, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ w(x,0) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ w(x,t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

Z zasad minimum i maksimum łatwo wynika, że $w(x,t) = 0$ dla wszystkich $(x,t) \in \bar{U}$, bo $\min_{\bar{U}} w = \max_{\bar{U}} w = 0$. Zatem $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$. □

Uwaga: (Stabilność rozwiązań) Niech $u_1(x,t)$ i $u_2(x,t)$ będą rozwiązaniami zagadnienia (1) z tymi samymi funkcjami f i h, ale z różnymi warunkami początkowymi:

$$u_1(x,0) = g_1(x) \quad \text{oraz} \quad u_2(x,0) = g_2(x).$$

Wtedy różnica $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ przyjmuje warunek początkowy $w(x,0) = g_1(x) - g_2(x)$, a zatem z zasady maksimum dla $w(x,t)$ wynika, że

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) \le \max_{x\in\Omega}(g_1(x) - g_2(x)) \le \max_{x\in\Omega} |g_1(x) - g_2(x)|.$$

Stosując zasadę minimum dla $w(x,t)$ otrzymujemy

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) \ge -\min_{\Omega} |g_1(x) - g_2(x)|.$$

Z obu nierówności wynika zatem

$$\max_{x\in\Omega} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \max_{x\in\Omega} |g_1(x) - g_2(x)|$$

dla każdego $t > 0$. Ostatnia nierówność mówi, że *mała zmiana warunku początkowego prowadzi do małej zmiany rozwiązania.* Jest to, tzw. stabilność rozwiązań względem warunków początkowych. □

Definicja 1 *Mówimy, że zagadnienie (tj. równanie różniczkowe i dodatkowe warunki) jest dobrze postawione w pewnej przestrzeni funkcyjnej $\mathcal{X}$, jeżeli*

1. *istnieje rozwiązanie należące do $\mathcal{X}$;*
2. *jest to jedyne rozwiązanie w przestrzeni $\mathcal{X}$;*
3. *rozwiązanie zależy w sposób ciągły od dodatkowych warunków (tj. rozwiązanie jest stabilne).*

Uwaga: Dotychczas, udowodniliśmy tylko jednoznaczność i stabilność rozwiązań zagadnienia (1). Teoria półgrup operatorów liniowych jest jedną z możliwych dróg dowodzenia istnienia rozwiązań. Zainteresowanego czytelnika odsyłam do wykładu D. Wrzoska. □

3 Zagadnienie Cauchy'ego

Zagadnieniem Cauchy'ego nazywamy równanie ciepła w całej przestrzeni $I\!R^n$ uzupełnione warunkiem początkowym:

$$u_t = \Delta u, \quad x \in I\!R^n, t > 0,$$
$$u(x,0) = g(x), \quad x \in I\!R^n.$$

Naszym pierwszym celem będzie konstrukcja rozwiązań tego zagadnienia.

3.1 Transformata Fouriera

Dla funkcji $g \in C_c^\infty(I\!R^n)$ (funkcja gładka o zwartym nośniku) definiujemy jej *transformatę Fouriera* wzorem

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} e^{-ix\xi} g(x)\, dx.$$

Uwaga: Dla $x, \xi \in I\!R^n$, iloczyn skalarny oznaczamy jako $x\xi = x \cdot \xi = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$. □

Powyższa całka jest zbieżna dla każdego $\xi \in I\!R^n$, ponieważ $g(x)$ ma zwarty nośnik, więc funkcja $\widehat{g}(\xi)$ jest dobrze zdefiniowana. Dodatkowo, $\widehat{g}(\xi)$ jest różniczkowalna i różniczkując ją pod znakiem całki otrzymamy wzór:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} e^{-ix\xi} (-ix_k) g(x)\, dx.$$

Łatwo zauważyć, że całka po prawej stronie tego równania jest również jest zbieżna, ponieważ funkcja $x_k g(x)$ jest ciągła i ma zwarty nośnik.

Zdefiniujmy teraz wielowskaźnik $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, gdzie $\alpha_i \in \{0, 1, 2, ...\}$, oraz operator różniczkowania

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Indukcyjnie łatwo sprawdza się, że

$$D_\xi^\alpha \widehat{g}(\xi) = [(-ix)^\alpha g(x)]\widehat{\ }(\xi) \tag{3}$$

gdzie $(-ix)^\alpha = (-ix_1)^{\alpha_1} \cdot ... \cdot (-ix_n)^{\alpha_n}$. Całkując przez części, podobnie dowodzi się, że

$$(\widehat{D_x^\alpha g})(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{g}(\xi). \tag{4}$$

Podsumujmy powyższe ważne własności transformaty Fouriera.

Wniosek 2 *Transformata Fouriera zamienia różniczkowanie na mnożenie przez zmienną i na odwrót.*

Zauważmy, że pracując z transformatą Fouriera nie musimy ograniczać się do zbioru $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Jest ona, na przykład, dobrze zdefiniowana dla każdej funkcji $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Okazuje się jednak, że oba te zbiory nie są zamknięte na obliczanie transformaty Fouriera, gdyż dla dowolnej funkcji $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, jej transformata nigdy nie ma zwartego nośnika (z wyjątkiem funkcji $g \equiv 0$). Można też podać przykłady funkcji z $L^1(\mathbb{R}^n)$, których transformata Fouriera nie należy do $L^1(\mathbb{R}^n)$. Natomiast, klasa Schwartza zdefiniowana poniżej jest zamknięta na operację obliczania transformaty Fouriera.

Definicja 2 *Klasą Schwartza nazywamy zbiór*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ : \ \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad |x|^k D_x^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Łatwo zauważyć, że $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Proponuję, jako proste ćwiczenie, sprawdzić, że $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lemat 1 *i) Jeżeli $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $\widehat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*
ii) Jeżeli $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to $\widehat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dowód. Fakt sformułowany w (i) wynika natychmiast z nierówności

$$|\widehat{g}(\xi)| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\, dx < \infty.$$

Aby udowodnić (ii) należy najpierw zauważyć, że $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ oraz $x_i^k \frac{\partial^\ell}{\partial x_j^\ell} g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnej funkcji $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, wszystkich $k, \ell \in \mathbb{N}$ oraz $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Korzystamy teraz ze wzorów (3) i (4) aby otrzymać

$$\xi_i^k \frac{\partial^\ell}{\partial \xi_j} \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k (-ix_j)^\ell g(x)\, dx.$$

Stosujemy następnie punkt (i) aby wywnioskować, że prawa strona powyższej równości należy do $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Definicja 3 *Dla każdej funkcji $g \in L^1(I\!R^n)$ definiujemy jej odwrotną transformatę Fouriera wzorem*

$$\check{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} \int_{I\!R^n} e^{ix\xi} g(x)\, dx.$$

Wiemy już, że

$$g \in \mathcal{S}(I\!R^n) \quad \Longrightarrow \quad \widehat{g} \in \mathcal{S}(I\!R^n).$$

Podobnie sprawdza się, że

$$g \in \mathcal{S}(I\!R^n) \quad \Longrightarrow \quad \check{g} \in \mathcal{S}(I\!R^n).$$

Dlatego dla każdej funkcji $g \in \mathcal{S}(I\!R^n)$ otrzymujemy $(\widehat{g})\check{} \in \mathcal{S}(I\!R^n)$.

Twierdzenie 4 *Jeżeli $g \in \mathcal{S}(I\!R^n)$, to $(\widehat{g})\check{} = g$.*

Dowód można znaleźć w książkach Steina i Weissa [11] oraz Yosidy [15].

Definicja 4 *Niech $f, g \in \mathcal{S}(I\!R^n)$. Splotem funkcji f i g nazywamy funkcję zdefiniowaną wzorem*

$$(f * g)(x) = \int_{I\!R^n} f(x-y) g(y)\, dy.$$

Proponuję samodzielnie sprawdzić następujące własności splotu.

- $f, g \in \mathcal{S}(I\!R^n) \Longrightarrow f * g \in S(I\!R^n)$;
- $(\widehat{f * g}) = (2\pi)^{-n/2} \widehat{f}\widehat{g}$;
- $(2\pi)^{-n/2} (\widehat{fg}) = \widehat{f} * \widehat{g}$.

Zatem transformata Fouriera zamienia splot na mnożenie a mnożenie na splot.

3.2 Konstrukcja rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego

Załóżmy, że $u = u(x,t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego

$$u_t = \Delta u, \quad x \in I\!R^n, t > 0, \tag{5}$$
$$u(x,0) = g(x), \tag{6}$$

z warunkiem początkowym $g \in \mathcal{S}(I\!R^n)$. Nie wiemy czy funkcja u jest dostatecznie regularna aby obliczać jej transformatę Fouriera, dlatego poniższe rachunki nie są do końca uzasadnione. Później zajmiemy się tym problemem.

Nakładamy transformatę Fouriera względem x obustronnie na równanie (5). Ponieważ

$$\widehat{u}_t(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} e^{-ix\xi} u_t(x,t)\, dx = \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(\xi, t)$$

oraz

$$\widehat{\Delta u}(\xi,t) = \sum_{j=1}^{n} (i\xi_j)^2 \widehat{u}(\xi,t) = -|\xi|^2 \widehat{u}(\xi,t),$$

zatem po przetransformowaniu równanie ciepła (5) przybiera postać

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\xi,t) = -|\xi|^2 \widehat{u}(\xi,t).$$

Ustalamy teraz ξ i rozwiązujemy powyższe równanie różniczkowe *zwyczajne* względem t. Rozwiązaniem jest

$$\widehat{u}(\xi,t) = Ce^{-t|\xi|^2},$$

gdzie "stałą" C wyznaczamy z warunku początkowego

$$C = \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{g}(\xi).$$

Zatem $\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{g}(\xi)e^{-t|\xi|^2}$ i rozwiązanie znajdujemy obliczając tranformatę odwrotną

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} e^{ix\xi} \widehat{g}(\xi) e^{-t|\xi|^2}\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{I\!R^n} \int_{I\!R^n} e^{i(x-y)\xi - t|\xi|^2} g(y)\, dy\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{I\!R^n} \left(\int_{I\!R^n} e^{i(x-y)\xi - t|\xi|^2}\, d\xi \right) g(y)\, dy. \end{aligned}$$

Pozostaje do obliczenia całka

$$G(x-y,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{I\!R^n} e^{i(x-y)\xi - t|\xi|^2}\, d\xi. \tag{7}$$

Zauważmy, że funkcja podcałkowa należy do $\mathcal{S}(I\!R^n)$ dla wszystkich $x, y \in I\!R^n$. Podstawiając

$$\xi = \frac{i(x-y)}{2t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\eta,$$

otrzymujemy

$$d\xi = t^{-n/2} d\eta \quad \text{oraz} \quad i(x-y)\xi - t|\xi|^2 = \frac{-|x-y|^2}{4t} - |\eta|^2.$$

Zatem

$$\begin{aligned} G(x-y,t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{I\!R^n} e^{-|x-y|^2/(4t)} e^{-|\eta|^2} t^{-n/2}\, d\eta = \\ &= (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x-y|^2/(4t)}, \end{aligned}$$

ponieważ $\int_{I\!R^n} e^{-|\eta|^2}\, d\eta = \pi^{n/2}$.

Definicja 5 *Funkcja*

$$G(x-y,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)$$

nazywa się jądrem Gaussa-Weierstrassa, jądrem ciepła lub jądrem gaussowskim.

Udowodnimy teraz kilka ważnych własności jądra $G(x-y,t)$.

Lemat 2

i) $G(z,t) = t^{-n/2} G(z/\sqrt{t}, 1)$*;*
ii) $G(x-y,t) \in C^\infty$ *dla* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *i* $t > 0$*;*
iii) $G_t - \Delta_x G = 0$ *dla* $t > 0$*;*
iv) $G(x-y,t) > 0$*;*
v) $\int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\, dy = 1$*;*
vi) dla każdego $\delta > 0$

$$\lim_{t\to 0} \int_{|y-x|>\delta} G(x-y,t)\, dy = 0$$

jednostajnie względem x*.*

Dowód. Własność (i) wynika natychmiast z postaci jądra G. (ii) oraz (iii) to proste ćwiczenie z rachunku różniczkowego. (iv) jest oczywiste. Podstawiając $y = x + (4t)^{1/2} z$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\, dy &= \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2}\, dz = \\ &= \pi^{-n/2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\, ds \right)^n = 1, \end{aligned}$$

a więc (v) jest udowodnione. Aby otrzymać (vi), podstawienie $y = x + (4t)^{1/2} z$ prowadzi do równości

$$\int_{|y-x|>\delta} G(x-y,t)\, dy = \pi^{-n/2} \int_{|z|>\delta/\sqrt{4t}} e^{-|z|^2}\, dz,$$

gdzie prawa strona dąży jednostajnie do zera gdy $t \longrightarrow 0$. □

Teraz możemy uściślić rozumowanie podane na początku tego rozdziału, gdzie wyprowadzone zostało rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego.

Twierdzenie 5 *Załóżmy, że funkcja* $g = g(x)$ *jest ciągła i ograniczona na* $\mathbb{R}^n$*. Wówczas funkcja*

$$u(x,t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t) g(y)\, dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) g(y)\, dy$$

i) jest klasy C^∞ *dla* $x \in \mathbb{R}^n$ *i* $t > 0$*,*
ii) spełnia równanie $u_t = \Delta u$ *dla* $t > 0$*,*
iii) może być rozszerzona do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ *tak, aby* $u(x,0) = g(x)$*.*

Dowód. Własności jądra ciepła zebrane w Lemacie 2 natychmiast implikują, że $u \in C^\infty(I\!R^b \times (0,\infty))$. Dodatkowo, różniczkując pod znakiem całki wyrażenie definiujące $u = u(x,t)$ otrzymujemy, że spełnia ono równanie ciepła. Aby udowodnić punkt (iii), należy wykazać, że

$$u(x,t) \to g(x_0), \quad \text{gdy} \quad x \to x_0 \quad \text{i} \quad t \to 0.$$

Ustalamy $\varepsilon > 0$ i znajdujemy $\delta > 0$ takie, że

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad |y - x_0| < 2\delta$$

(wykorzystujemy tutaj ciągłość funkcji g). Niech $M = \sup_{y \in I\!R^n} |g(y)|$. Dla wszystkich $x \in I\!R^n$ spełniających $|x - x_0| < \delta$, na mocy Lematu 2 punkt (vi), prawdziwe są oszacowania

$$\begin{aligned}
&|u(x,t) - g(x_0)| = \left| \int_{I\!R^n} G(x-y,t)[g(y) - g(x_0)]\, dy \right| \\
&\le \left(\int_{|y-x|\le\delta} + \int_{|y-x|>\delta} \right) G(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\, dy \\
&\le \int_{|y-x|\le\delta} G(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\, dy + 2M \int_{|y-x|>\delta} G(x-y,t)\, dy \\
&\le \varepsilon \int_{I\!R^n} G(x-y,t)\, dy + 2M \int_{|y-x|>\delta} G(x-y,t)\, dy \\
&\le 2\varepsilon
\end{aligned}$$

dla dostatecznie małych t. □

Uwaga: Takie samo rozumowanie prowadzi do analogicznego twierdzenia przy założeniu, że funkcja $g = g(x)$ jest mierzalna i spełnia nierówność

$$|g(x)| \le M e^{a|x|^2} \quad \text{dla pewnych stałych} \quad M, a > 0.$$

Otrzymujemy wtedy rozwiązanie równania ciepła $u_t = \Delta u$ klasy C^∞ dla $x \in I\!R^n$ i $0 < t < 1/(4a)$. Dodatkowo, $u(x,t) \to g(x_0)$ gdy $x \to x_0$ i $t \to 0$ w każdym punkcie ciągłości x_0 funkcji $g(x)$. □

Gotowi jesteśmy teraz udowodnić podstawowe twierdzenie tego rozdziału.

Twierdzenie 6 *Dla każdego warunku początkowego $g \in C(I\!R^n) \cap L^\infty(I\!R^n)$ zagadnienie Cauchy'ego*

$$\begin{aligned}
&u_t = \Delta u, \quad x \in I\!R^n, t > 0, \\
&u(x,0) = g(x)
\end{aligned}$$

jest dobrze postawione w sensie Hadamarda w przestrzeni

$$\mathcal{X} = C^{2,1}(I\!R^n \times (0,T)) \cap C(I\!R^n \times [0,T]) \cap L^\infty(I\!R^n \times [0,T]). \tag{8}$$

DOWÓD. *Istnienie rozwiązań* zostało już udowodnione w poprzednim twierdzeniu. Przypomnijmy, że rozwiązanie otrzymuje się jako splot warunku początkowego $g(x)$ z jądrem Gaussa-Weierstrassa $G = G(x,t)$. Nie wykazaliśmy tylko, że $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, ale to łatwo wynika z własności jądra $G(x,t)$

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)|g(y)|\,dy \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\,dy\,\|g\|_\infty \\ &= \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Jednoznaczność i stabilność rozwiązań jest konsekwencją następującej wersji zasady maksimum dla *ograniczonych* rozwiązań.

Twierdzenie 7 *Niech przestrzeń $\mathcal{X}$ będzie zdefiniowana równością (8). Jeżeli $u \in \mathcal{X}$ spełnia równanie ciepła $u_t = \Delta u$, to*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,T]} u(x,t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0).$$

Szkic dowodu. Tutaj $\Omega = \mathbb{R}^n$ jest obszarem nieograniczonym, więc nie możemy zastosować bezpośrednio wcześniej udowodnionej zasady maksimum. Niech $m = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0)$. Ponieważ $u(x,t)$ jest ciągła, więc wystarczy udowodnić, że $u(x,t) \leq m$. Ustalamy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i definiujemy

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon(2nt + |x-x_0|^2).$$

Najpierw dowodzimy, że $v(x,t) \leq m$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ i $\varepsilon > 0$. Później przechodzimy do granicy $\varepsilon \to 0$ i otrzymujemy $u(x_0,t) \leq m$. □

Zadanie 1 *Uzupełnij szczegóły tego dowodu. Pamiętaj, że $u(x,t)$ jest ograniczona, więc $v(x,t)$ może być nieujemna tylko na ograniczonym podzbiorze zbioru $\mathbb{R}^n \times [0,T]$.*

Aby dokończyć dowód Twierdzenia 6 (tzn. pokazać jednoznaczność i stabilność rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równania ciepła) należy przepisać odpowiednie dowody przeprowadzone dla obszaru ograniczonego. □

Wniosek 3 *Każde ograniczone rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania ciepła jest dane jako splot warunku początkowego z jądrem Gaussa-Weierstrassa.* □

Przykład: Różniczkując, natychmiast sprawdzamy, że funkcja

$$u(x,t) = 2nt + |x|^2 = 2nt + x_1^2 + \dots + x_n^2$$

jest rozwiązaniem równania ciepła z warunkiem początkowym $u(x,0)=|x|^2$. Wiemy też, na podstawie uwagi sformułowanej po Twierdzeniu 5, że $G(\cdot,t)*|\cdot|^2$ również jest rozwiązaniem. Odpowiedź na pytanie, czy

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)|y|^2\,dy = 2nt + |x|^2$$

będzie można znaleźć poniżej, w Twiedzeniu 8. □

Przykład: Funkcja Tichonowa $u_1(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}\frac{d^k}{dt^k}e^{-1/t^2}$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \quad x\in\mathbb{R}, t>0;\\ &u(x,0)=0. \end{aligned}$$

Dowód zbieżności szeregu definiującego u_1 można znaleźć w książce Johna [8, Rozdział 7]. Oczywiście innym rozwiązaniem jest $u_2(x,t)\equiv 0$. Ten brak jednoznaczności rozwiązań wyjaśniamy poniżej. □

Udowodnimy teraz kolejną zasadę maksimum dla rozwiązań równania ciepła z nieograniczonymi warunkami początkowymi.

Twierdzenie 8 *Załóżmy, że* $u\in C^{2,1}(\mathbb{R}^n\times(0,T))\cap C(\mathbb{R}^n\times[0,t))$ *jest rozwiązaniem zagadnienia (5)-(6) spełniającym dodatkowe oszacowanie*

$$u(x,t)\le Ae^{a|x|^2}$$

dla pewnych stałych $a,A>0$ *oraz wszystkich* $x\in\mathbb{R}^n$ *i* $0\le t\le T$. *Wówczas*

$$\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Pomijam tutaj niezbyt trudny dowód tego twierdzenia ponieważ można go znaleźć w niedawno wydanym tłumaczeniu książki Evansa [6].

Wniosek 4 *Niech* $g\in C(\mathbb{R}^n)$ *spełnia oszacowanie* $|u(x,t)|\le Ae^{a|x|^2}$ *dla pewnych stałych* $A,a>0$ *i wszystkich* $x\in\mathbb{R}^n$. *Zagadnienie początkowe*

$$\begin{aligned} &u_t=\Delta u, \quad x\in\mathbb{R}^n, t>0,\\ &u(x,0)=g(x), \end{aligned}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $u\in C^{2,1}(\mathbb{R}^n\times(0,1/(4a))$ *w klasie funkcji spełniających oszacowanie*

$$|u(x,t)|\le Ae^{a|x|^2}$$

dla wszystkich $x\in\mathbb{R}^n$, $0\le t<1/(4a)$ *i stałych* $A,a>0$. □

Wróćmy do przykładów rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równania ciepła. Przy warunku początkowym $g \equiv 0$ zagadnienie to ma, oprócz rozwiązania trywialnego $u \equiv 0$, nieskończenie wiele innych rozwiązań. Jednym z nich jest funkcja Tichonowa; inne przykłady można znaleźć w książce Johna [8, Rozdział 7]. Na mocy Twierdzenia 8, każde z tych rozwiązań, oprócz $u \equiv 0$, musi rosnąć bardzo szybko gdy $|x| \to \infty$. Rozwiązanie $u \equiv 0$ zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym $g \equiv 0$ nazywa się często *rozwiązaniem fizycznym*, inne rozwiązania są *niefizyczne*.

Okazało się, że bardzo *fizyczny* wynik uzyskał Widder, który zajmował się tylko nieujemnymi rozwiązaniami równania ciepła (temperatura jest wtedy mierzona w stopniach Kelvina).

Twierdzenie 9 (Widder) *Załóżmy, że* $u \in C^{2,1}(I\!R\times(0,T))\cap C(I\!R\times[0,T))$ *jest rozwiązaniem zagadnienia*

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx}, \quad x \in I\!R,\ 0 < t < T, \\
&u(x,0) = g(x), \\
&u(x,t) \geq 0, \quad x \in I\!R, 0 \leq t < T.
\end{aligned}$$

Wówczas $u(x,t)$ *jest jedynym nieujemnym rozwiązaniem. Dodatkowo,* $u(x,t)$ *wyraża się znanym wzorem*

$$u(x,t) = \int_{I\!R} G(x-y,t)g(y)\, dy.$$

□

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w książce Johna [8, Rozdział 7]. Zainteresowanego czytelnika odsyłam również do książek DiBenedetto [4] i Evansa [6], gdzie podane są uogólnienia tego twierdzenia.

4 Kilka uwag o przestrzeniach L^p

Dla każdego $1 \leq p < \infty$ definiujemy przestrzeń funkcyjną

$$L^p(I\!R^n) = \left\{ f : I\!R^n \mapsto I\!R \ :\ f - \text{mierzalna}, \quad \|f\|_p \equiv \left(\int_{I\!R^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

oraz

$$L^\infty(I\!R^n) = \{ f : I\!R^n \mapsto I\!R \ :\ f - \text{mierzalna}, \quad \|f\|_\infty \equiv \text{ess sup}_{x\in I\!R^n} |f(x)| < \infty \}.$$

Oto najważniejsze fakty dotyczące przestrzeni $L^p(I\!R^n)$.

1. $(L^p(I\!R^n), \|\cdot\|_p)$ jest przestrzenią Banacha dla wszystkich $1 \leq p \leq \infty$.

2. Prawdziwa jest nierówność Höldera: dla wszyskich $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ oraz $p, q \in [1, \infty]$ spełniających $1/p + 1/q = 1$ zachodzi nierówność

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

3. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$; dodatkowo, zanurzenie to jest gęste dla każdego $1 \leq p < \infty$. Łatwo tutaj zauważyć, że funkcji stałych (należących do $L^\infty(\mathbb{R}^n)$) nie można przybliżać w normie przestrzeni $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ funkcjami o nośnikach zwartych.

Następujący lemat mówi, że operator przesunięcia jest ciągły na przestrzeniach $L^p(\mathbb{R}^n)$ dla $p \neq \infty$.

Lemat 3 *Dla funkcji f określonej na $\mathbb{R}^n$ i $x \in \mathbb{R}^n$ definiujemy*

$$\nu_x f(y) = f(x + y).$$

Dla każdego $1 \leq p < \infty$ i $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ zachodzi relacja

$$\lim_{t \to 0} \|\nu_x f - f\|_p = 0.$$

Dowód. Niech g będzie funkcją ciągła o zwartym nośniku. Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ takich, że $|x| \leq 1$, nośniki funkcji $\nu_x g$ są zawarte we wspólnym zbiorze ograniczonym. Zatem z jednostajnej ciągłości funkcji g wynika natychmiast, że

$$\|\nu_x g - g\|_p \to 0 \quad \text{gdy} \quad x \to 0.$$

Ustalamy teraz $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i $\varepsilon > 0$. Wybieramy $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tak, aby $\|f - g\| < \varepsilon/3$. Wtedy

$$\|\nu_x f - f\|_p \leq \|\nu_x f - \nu_x g\|_p + \|\nu_x g - g\|_p + \|g - f\|_p.$$

Następnie ustalamy $|x|$ tak małe, aby $\|\nu_x g - g\|_p < \varepsilon/3$ i wtedy

$$\|\nu_x f - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

5 Zagadnienie Cauchy'ego w przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^n)$

Twierdzenie 10 *Załóżmy, że $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wówczas zagadnienie*

$$u_t = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \tag{9}$$
$$u(x, 0) = g(x), \tag{10}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze

$$\mathcal{X} = C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^n)).$$

Zatem warunek początkowy jest tutaj przybierany w sensie normy przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{t \to 0} \|u(\cdot, t) - g(\cdot)\|_1 = 0.$$

Uwaga: Rozwiązanie zagadnienia początkowego traktujemy tutaj jako ciągłe odwzorowanie $u : [0,\infty) \to L^1(I\!\!R^n)$. $\square$

Dowód Twierdzenia 10. *Istnienie.* Rozwiązanie $u(x,t)$ dane jest znanym wzorem

$$u(x,t) = \int_{I\!\!R^n} G(x-y,t)g(y)\, dy. \tag{11}$$

Łatwo jest sprawdzić, że $u \in C^{2,1}(I\!\!R^n \times (0,\infty))$, jeżeli warunek początkowy spełnia $g \in C_c^\infty(I\!\!R^n)$. Taki sam wynik otrzymujemy dla dowolnego $g \in L^1(I\!\!R^n)$, aproksymując g funkcjami gładkimi o nośnikach zwartych, a następnie korzystamy z nierówności (16).

Pozostało jeszcze do udowodnienia, że rozwiązanie dane wzorem (11) należy do przestrzeni $C([0,\infty), L^1(I\!\!R^n))$.

Z twierdzenia Fubiniego wynika

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_1 &\le \int_{I\!\!R^n} \left| \int_{I\!\!R^n} G(x-y,t)g(y)\, dy \right| dx \\
&\le \int_{I\!\!R^n} \int_{I\!\!R^n} G(x-y,t)|g(y)|\, dy\, dx \\
&= \int_{I\!\!R^n} \int_{I\!\!R^n} G(x-y,t)\, dx\, |g(y)|\, dy \\
&= \|g\|_1,
\end{aligned}$$

a więc $u \in L^\infty([0,\infty), L^1(I\!\!R^n))$ i prawdziwe jest oszacowanie

$$\|u(\cdot,t)\|_1 \le \|g\|_1.$$

Przypomnijmy teraz, że zamiany zmiennych, najpierw $y = x - z$, a później $w = z/\sqrt{t}$, prowadzą do równości

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{I\!\!R^n} G(x-y,t)g(y)\, dy \\
&= \int_{I\!\!R^n} t^{-n/2} G(z/\sqrt{t},1) g(x-z)\, dz \\
&= \int_{I\!\!R^n} G(w,1) g(x-\sqrt{t}w)\, dw.
\end{aligned}$$

Ponieważ, $\int_{I\!\!R^n} G(w,1)\, dw = 1$, więc

$$u(x,t) - g(x) = \int_{I\!\!R^n} G(w,1)[g(x-\sqrt{t}) - g(x)]\, dw.$$

Obliczamy teraz normę $L^1(I\!\!R^n)$:

$$\|u(\cdot,t) - g(\cdot)\|_1 \le \int_{I\!\!R^n} G(w,1)\|g(\cdot - \sqrt{t}) - g(\cdot)\|_1\, dw. \tag{12}$$

Całka została tutaj potraktowana jako granica sum częściowych i zastosowano nierówność trójkąta dla normy $\|\cdot\|_1$. Zauważmy teraz, że $\|g(\cdot - \sqrt{t}) - g(\cdot)\|_1 \le 2\|g\|_1$ oraz

$$\|g(\cdot - \sqrt{t}) - g(\cdot)\|_1 \to 0 \quad \text{gdy} \quad t \to 0,$$

gdyż operacja przesunięcia jest ciągła na $L^1(\mathbb{R}^n)$. Zatem prawa strona w nierówności (12) dąży do zera z Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

Dowód faktu, że $\lim_{t\to t_0} \|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_0)\|_1 = 0$ dla każdego $t_0 > 0$ jest analogiczny i dlatego pomijamy go.

Jednoznaczność rozwiązań. Potrzebna nam jest tutaj wersja zasady maksimum dla równań z warunkami początkowymi w $L^1(\mathbb{R}^n)$. Udowodnimy ją stosując, tzw. "metodę obcinania Stampacchii".

Twierdzenie 11 *Niech u będzie rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla równania ciepła z warunkiem początkowym $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dla każdego punktu $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ zachodzą nierówności:*

$$\min\{0, \inf_{\mathbb{R}^n} g\} \le u(x,t) \le \max\{0, \sup_{\mathbb{R}^n} g\}. \tag{13}$$

Dowód. Wprowadźmy oznaczenie $K = \max\{0, \sup_{\mathbb{R}^n} g\}$ i załóżmy, że $K < \infty$. Definiujemy funkcję obcinającą $a \in C^1(\mathbb{R})$ o własnościach:

i. $|a'(s)| \le M$ dla pewnej stałej $M > 0$;

ii. funkcja a jest ściśle rosnąca na $(0,+\infty)$;

iii. dla każdego $s \le 0$ przyjmujemy $a(s) = 0$.

Można powiedzieć, że $a = a(s)$ to "wygładzona" funkcja $y(x) = x$ dla $x \ge 0$ oraz $y(x) = 0$ dla $x < 0$.

Zdefiniujmy funkcję pierwotną $A(s) = \int_0^s a(\tau)\, d\tau$. Łatwo jest zauważyć, wykorzystując własności $a = a(s)$, że funkcja $A(s)$ jest ściśle dodatnia dla $s > 0$ i tożsamościowo równa zeru dla $s \le 0$.

Kładziemy $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} A(u(x,t) - K)\, dx$ i natychmiast sprawdzamy, że $\varphi(0) = 0$ i $\varphi \ge 0$ na $[0,\infty)$. Obliczmy teraz pochodną tej funkcji:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} a(u(x,t) - K) u_t(x,t)\, dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} a(u(x,t) - K)\Delta u(x,t)\, dx = \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} a'(u(x,t) - K)|\nabla u(x,t)|^2\, dx \le 0, \quad \text{gdyż} \quad a' \ge 0.
\end{aligned}$$

Zatem $\varphi' \le 0$ co implikuje, że $\varphi \equiv 0$. Wynika stąd, że $A(u(x,t) - K) = 0$ prawie wszędzie, a więc z własności funkcji A otrzymujemy

$$u(x,t) \le K = \max\{0, \sup_{\mathbb{R}^n} g\}$$

z dokładnością do zbioru miary zero. □

Powyższa zasada maksimum natychmiast implikuje jednoznaczność rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego (9)-(10), i to kończy dowód Twierdzenia 10. $\square$

Uwaga: Dowód zasady maksimum sformułowany w Twierdzeniu 11 wymaga, aby

$$u \in C^1((0,\infty), L^2(I\!R^n)) \quad \text{oraz} \quad \nabla u \in C((0,\infty), L^2(I\!R^n)). \tag{14}$$

Problem ten można ominąć, uzupełniając przestrzeń $\mathcal{X}$ o te dwa warunki lub udowodnić, że każde rozwiązanie zagadnienie (9)-(10) spełnia (14). $\square$

5.1 Stabilność rozwiązań w $L^1(I\!R^n)$

Twierdzenie 12 *Załóżmy, że $u = u(x,t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (9)-(10) z warunkiem początkowym $g \in L^1(I\!R^n)$. Wtedy*

$$\|u(\cdot,t)\|_1 \le \|g\|_1 \quad \textit{dla każdego} \quad t > 0. \tag{15}$$

Podane zostaną dwa różne dowody tego twierdzenia

Dowód 1. Wiemy już, że

$$u(x,t) = \int_{I\!R^n} G(x-y,t)g(y)\,dy.$$

Obliczamy normę $\|\cdot\|_1$, stosujemy nierowność trójkąta dla całek i korzystamy z równości $\|G(\cdot - y,t)\|_1 = 1$ aby otrzymać

$$\|u(\cdot,t)\|_1 \le \int_{I\!R^n} \|G(\cdot - y,t)\|_1 |g(y)|\,dy = \int_{I\!R^n} |g(y)|\,dy = \|g\|_1.$$

$\square$

Dowód 2. Załóżmy, że *nie wiemy*, że funkcja $u(x,t)$ jest dana jako splot warunku początkowego g z jądrem G. Podana metoda dowodzenia stabilności w $L^1(I\!R^n)$ podobna jest do metody obcinania Stampacchii i ma zastosowanie w badaniu różnych nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych.

Definiujemy ciąg funkcji $a_n \in C^1(I\!R)$, ściśle rosnących na $I\!R$, $a_n(0) = 0$, $a_n(s) > 0$ dla $s > 0$ i $a_n(s) < 0$ dla $s < 0$. Dodatkowo wymaga się, aby nieujemne funkcje

$$A_n(s) = \int_0^s a_n(\tau)\,d\tau$$

były zbieżne jednostajnie do funkcji $y(x) = |x|$. Można myśleć, że ciąg $a_n = a_n(x)$ przybliża funkcję sgn $(x) = 1$ dla $x > 0$, sgn $(x) = 0$ dla $x = 0$, sgn $(x) = -1$ dla $x < 0$.

Mnożymy równanie $u_t = \Delta u$ przez $a_n(u(x,t))$ i całkujemy względem x. Proste rachunki powadzą do tożsamości

$$\int_{I\!R^n} a_n(u(x,t))u_t(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_{I\!R^n} A_n(u(x,t))\,dx,$$

$$\int_{I\!R^n} a_n(u(x,t))\Delta u(x,t)\, dx = -\int_{I\!R^n} a_n'(u(x,t))|\nabla u(x,t)|^2\, dx \le 0,$$

ponieważ $a_n' \ge 0$. Zatem $\frac{d}{dt}\int_{I\!R^n} A_n(u(x,t))\, dx \le 0$, a po odcałkowaniu

$$\int_{I\!R^n} A_n(u(x,t))\, dx \le \int_{I\!R^n} A_n(g(x))\, dx.$$

Obliczamy teraz granicę $n \to \infty$ i otrzymujemy (15). □

Uwaga: Stosując powyższe twierdzenie do różnicy dwóch rozwiązań natychmiast otrzymujemy nierówność

$$\|u_1(\cdot,t) - u_2(\cdot,t)\|_1 \le \|g_1 - g_2\|_1 \tag{16}$$

gwarantującą, że mała zmiana w $L^1(I\!R^n)$ warunków początkowych prowadzi do małych zmian rozwiązania. □

Uwaga: Wiemy, że zanurzenie $\mathcal{S}(I\!R^n) \subset L^1(I\!R^n)$ jest gęste. Znaczna część wyników dotycząca zagadnienia początkowego dla równania ciepła może być dowodzona dla warunków początkowych $g \in \mathcal{S}(I\!R^n)$, a następnie każdy z tych wyników rozszerzamy na dowolne warunki początkowe $g \in L^1(I\!R^n)$, aproksymując je funkcjami z $\mathcal{S}(I\!R^n)$ i korzystając z nierówności (16).

□

6 Asymptotyka rozwiązań gdy $t \to \infty$

W rozdziale tym zakładamy, że $u = u(x,t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$u_t = \Delta u, \quad x \in I\!R^n, t > 0, \tag{17}$$

$$u(x,0) = g(x) \in L^1(I\!R^n), \tag{18}$$

danym wzorem

$$u(x,t) = \int_{I\!R^n} G(x-y,t)g(y)\, dy.$$

Oszacowanie normy $L^\infty(I\!R^n)$. Wiemy, że $G(x-y,t) = (4\pi t)^{-n/2}\exp(-|x-y|^2/(4t))$, zatem $|G(x-y,t)| \le (4\pi t)^{-n/2}$. Stąd wynika oszacowanie

$$|u(x,t)| \le \int_{I\!R^n} |G(x-y,t)||g(y)|\, dy \le (4\pi t)^{-n/2}\|g\|_1. \tag{19}$$

Zatem $\|u(\cdot,t)\|_\infty$ dąży do zera gdy $t \to \infty$ tak jak $t^{-n/2}$.

Oszacowanie normy $L^1(I\!R^n)$. Wiemy, że $\|u(\cdot,t)\|_1 \le \|g\|_1$. Łatwo zauważyć, że istnieją warunki początkowe, dla których $\|u(\cdot,t)\|_1$ nie dąży do zera gdy $t \to \infty$. Wystarczy wziąć

$g \in \mathcal{S}(I\!R^n)$ taką, że $g \geq 0$. Wtedy $u(x,t) \geq 0$, co prowadzi do równości

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_1 &= \int_{I\!R^n}\int_{I\!R^n} G(x-y,t)g(y)\,dy\,dx \\
&= \int_{I\!R^n}\int_{I\!R^n} G(x-y,t)\,dx\,g(y)\,dy \\
&= \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Poniżej, w uwagach po Twierdzeniu 13 wyjaśnimy, że $\|u(\cdot,t)\|_1 \to 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\int_{I\!R^n} u_0(x)\,dx = 0$.

Oszacowanie normy $L^p(I\!R^n)$. Dla dowolnego $1 < p < \infty$ stosujemy definicję normy L^p i oszacowania (15) oraz (19) w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_p &= \left(\int_{I\!R^n} |u(x,t)|^p\,dx\right)^{1/p} \leq \\
&\leq \left(\|u(\cdot,t)\|_\infty^{p-1}\int_{I\!R^n} |u(x,t)|\,dx\right)^{1/p} \leq \\
&= \|u(\cdot,t)\|_\infty^{1-1/p}\|u(\cdot,t)\|_1^{1/p} \leq \\
&\leq (4\pi t)^{-(n/2)(1-1/p)}\|g\|_1.
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy tutaj podstawowe oszacowanie normy $L^p(I\!R^n)$ rozwiązań zagadnienia (17)-(18):

$$\|u(\cdot,t)\|_p \leq (4\pi t)^{-(n/2)(1-1/p)}\|g\|_1 \tag{20}$$

dla dowolnego $t > 0$ i wszystkich $p \in [1,\infty]$.

6.1 Rozwinięcie asymptotyczne rozwiązań

Dla każdej funkcji $h \in \mathcal{S}(I\!R^n)$ prawdziwy jest następujący prosty wzór

$$h(x) - h(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}h(tx)\,dt = \int_0^1 x \cdot \nabla h(tx)\,dt. \tag{21}$$

Równość (21) jest pewną wersją rozwinięcia Taylora funkcji h.

Zastosujmy powyższy wzór do funkcji $h(\xi) = \widehat{g}(\xi)$, a następnie otrzymaną tożsamość pomnóżmy przez $e^{-t|\xi|^2}$:

$$e^{-t|\xi|^2}\widehat{g}(\xi) - e^{-t|\xi|^2}\widehat{g}(0) = e^{-t|\xi|^2}\xi \cdot \int_0^1 (\nabla\widehat{g})(t\xi)\,dt \tag{22}$$

Zauważmy, że

$$\widehat{g}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{I\!R^n} e^{-ix\cdot 0}g(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}M,$$

gdzie $M = \int_{I\!R^n} g(x)\,dx$. Z definicji jądra $G(x,t)$ (por. (7)) otrzymujemy

$$\left(e^{-t|\xi|^2}\widehat{g}(0)\right)\check{}\,(x) = MG(x,t).$$

Dodatkowo, następujące tożsamości wynikają z własności transformaty Fouriera oraz z (7):

$$\left(e^{-t|\xi|^2}\widehat{g}(\xi)\right)\check{}(x) = \int_{I\!R^n} G(x-y,t)g(y)\,dy = u(x,t),$$

$$\left(\xi e^{-t|\xi|^2}\right)\check{}(x) = \frac{1}{i}\nabla G(x,t),$$

$$(\nabla\widehat{g}(\xi))\check{} = ixg(x).$$

Zatem obliczenie odwrotnej transformaty Fouriera ze wzoru (22) prowadzi do równości

$$u(x,t) - MG(x,t) = \int_0^1 \int_{I\!R^n} (\nabla G)(x-y,t)\cdot txg(tx)\,dx\,dt. \tag{23}$$

Możemy teraz udowodnić jedno z najważniejszych twierdzeń dotyczących asymptotyki rozwiązań równania ciepła na $I\!R^n$.

Twierdzenie 13 *Zakładamy, że $u = u(x,t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (17)-(18) z warunkiem początkowym spełniającym $g \in L^1(I\!R^n)$ oraz $xg(x) \in L^1(I\!R^n)$. Oznaczmy $M = \int_{I\!R^n} g(x)\,dx$. Dla każdego $p \in [1,\infty]$ istnieje stała $C = C(p)$ taka, że*

$$\|u(\cdot,t) - MG(\cdot,t)\|_p \le Ct^{-(n/2)(1-1/p)-1/2}\|xg(x)\|_1 \tag{24}$$

dla wszystkich $t > 0$.

Dowód. Wystarczy obliczyć normę $L^p(I\!R^n)$ z wyrażenia (23) i oszacować normę splotu po prawej stronie. Zauważmy, że

$$\|\nabla G(\cdot,t)\|_p = t^{-(n/2)(1-1/p)-1/2}\|\nabla G(\cdot,1)\|_p = Ct^{-(n/2)(1-1/p)-1/2}$$

i dlatego

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^1 \int_{I\!R^n} (\nabla G)(\cdot-y,t)\cdot txg(tx)\,dx\,dt\right\|_p &\le \|\nabla G(\cdot,t)\|_p \left\|\int_0^1 txg(tx)\,dt\right\|_1 \\ &\le Ct^{-(n/2)(1-1/p)-1/2}\|xg(x)\|_1.\end{aligned}$$

□

Uwaga: Bezpośredni rachunek oparty na zamianie zmiennych prowadzi do równości

$$\|G(\cdot,t)\|_p = \left(\int_{I\!R^n} \left(t^{-n/2}G(x/\sqrt{t},1)\right)^p\,dx\right)^{1/p} = t^{-(n/2)(1-1/p)}\|G(\cdot,1)\|_p.$$

Twierdzenie 13 mówi, że norma L^p różnicy $u(x,t) - MG(x,t)$ dąży do zera szybciej – tak jak $t^{-(n/2)(1-1/p)-1/2}$. Oznacza to, że dla $t \to \infty$ rozwiązanie $u = u(x,t)$ zaczyna coraz bardziej przypominać jądro Gaussa-Weierstrassa $G = G(x,t)$. □

Uwaga: Jeżeli g spełnia założenia Twierdzenia 13 oraz dodatkowo $M = \int_{I\!R^n} g(x)\, dx = 0$, to

$$\|u(\cdot,t)\|_1 \le Ct^{-1/2} \to 0 \quad \text{gdy} \quad t \to \infty.$$

Porównaj ten fakt z uwagą dotyczącą braku malenia normy $L^1(I\!R^n)$ sformułowaną na początku tego rozdziału. $\square$

Uwaga: Wiemy już, że zazwyczaj $\|u(\cdot,t)\|_1$ nie dąży do zera gdy $t \to \infty$. To samo możemy wywnioskować z Twierdzenia 13 o ile $M \neq 0$. Wynika to z nierówności

$$\Big| \|u(\cdot,t)\|_1 - \|MG(\cdot,t)\|_1 \Big| \le \|u(\cdot,t) - MG(\cdot,t)\|_1 \le Ct^{-1/2}.$$

Ponieważ $\|MG(\cdot,t)\|_1 = |M| \|G(\cdot,t)\|_1 = |M|$, więc

$$\|u(\cdot,t)\|_1 \to |M| \quad \text{gdy} \quad t \to \infty.$$

$\square$

Uwaga: Twierdzenie 13 można uogólnić na dowolne warunki początkowe $g \in L^1(I\!R^n)$. Jeżeli nie założymy, że $xg(x) \in L^1(I\!R^n)$, to otrzymamy słabszą zbieżność do zera normy L^p

$$t^{(n/2)(1-1/p)} \|u(\cdot,t) - MG(\cdot,t)\|_p \to 0 \quad \text{gdy} \quad t \to \infty. \tag{25}$$

Aby to udowodnić, wystarczy aproksymować $g \in L^1(I\!R^n)$ funkcjami $g_n \in \mathcal{S}(I\!R^n)$ tak, aby $\int_{I\!R^n} g_n(x)\, dx = M$ oraz

$$\|g_n(\cdot) - g(\cdot)\|_1 \to 0 \quad \text{i} \quad \|xg_n(x) - xg(x)\|_1 \to 0,$$

gdy $n \to \infty$. Następnie należy zastosować nierówność (16). $\square$

Uwaga: Asymptotyczny wynik zawarty w (25) można zinterpretować jeszcze w inny sposób. Zdefiniujmy przeskalowane rozwiązanie

$$u_\lambda(x,t) = \lambda^n u(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \text{dla każdego } \lambda > 0.$$

Zastosujmy niezmienniczość jądra $G(x,t)$ na to skalowanie

$$G_\lambda(x,t) = \lambda^n G(\lambda x, \lambda^2 t) = \frac{\lambda^n}{(4\pi\lambda^2 t)^{n/2}} e^{-|\lambda x|^2/(4\lambda^2 t)} = G(x,t).$$

Dlatego ustalając $t = t_0 > 0$ i robiąc prostą zamianę zmiennych w całkach definiujących normy L^p otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda(\cdot,t_0) - MG(\cdot,t_0)\|_p &= \|\lambda^n G(\lambda\cdot, \lambda^2 t_0) - \lambda^n MG(\lambda\cdot, \lambda^2 t_0)\|_p \\
&= \lambda^{n-n/p} \|u(\cdot, \lambda^2 t_0) - MG(\cdot, \lambda^2 t_0)\|_p \\
&= t_0^{-(n/2)(1-1/p)} t^{(n/2)(1-1/p)} \|u(\cdot,t) - MG(\cdot,t)\|_p
\end{aligned}$$

po podstawieniu $\lambda = \sqrt{t/t_0}$. Ponieważ $\lambda \to \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $t \to \infty$, więc otrzymaliśmy, że wynik zawarty w (25) jest równoważny następującemu faktowi

$$\forall\, t_0 > 0 \ \ \forall\, p \in [1, \infty] \quad u_\lambda(\cdot, t_0) \to MG(\cdot, t_0) \quad \text{w przestrzeni} \quad L^p(I\!R^n) \tag{26}$$

gdy $\lambda \to \infty$. □

Uwaga: Więcej informacji na temat asymptotycznych rozwinięć rozwiązań równania ciepła można znaleźć w pracy Duoandikoetxea i Zuazua [5]. □

7 Równanie Fokkera-Plancka

Aby uprościć rachunki, będę w tym rozdziale ograniczał się do zagadnienia jednowymiarowego mimo, że wszystkie prezentowane wyniki są prawdziwe w $I\!R^n$.

Niech $u = u(x,t)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia początkowego dla jednowymiarowego równania ciepła

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in I\!R, t > 0, \tag{27}$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{28}$$

Definiujemy nową funkcję

$$v(x,t) = e^t u(xe^t, 2(e^{2t} - 1)). \tag{29}$$

Twierdzenie 14 *Jeżeli $u = u(x,t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (27)-(28), to funkcja $v = v(x,t)$ dana wzorem (29) jest rozwiązaniem zagadnienia*

$$v_t = v_{xx} + (xv)_x \tag{30}$$

$$v(x, 0) = v_0(x) = u_0(x). \tag{31}$$

DOWÓD. Bezpośredni rachunek. □

Równanie $v_t = v_{xx} + (xv)_x$ jest najprostszym przykładem równania typu Fokkera-Plancka, które wykorzystywane jest m.in. w teorii równań stochastycznych. Celem kolejnych wykładów będzie zbadanie zachowania się rozwiązań, gdy $t \to \infty$. Zacznijmy od najprostszych uwag.

- Zagadnienie (30)-(31) ma dokładnie jedno rozwiązanie w przestrzeni $\mathcal{X} = C([0, \infty), L^1(I\!R))$. Możemy otrzymać v stosując transformatę Fouriera lub też przypominamy sobie, że v otrzymuje się przeskalowując rozwiązania równania ciepła.

- Warunek $v_0(x) \geq 0$ implikuje $v(x,t) \geq 0$ dla wszystkich $x \in I\!R$ i $t > 0$. Można to udowodnić metodą obcinania Stampacchii lub znowu stosujemy odpowiedni wynik dla równanie ciepła.

- Dla wszystkich $t > 0$ zachodzi równość

$$\int_{I\!R} v(x,t)\, dx = \int_{I\!R} v_0(x)\, dx.$$

Tak było dla równania ciepła. Możemy też otrzymać tę równość bezpośrednio z równania (30) całkując je względem x

$$\frac{d}{dt}\int_{I\!R} v(x,t)\, dx = \int_{I\!R} v_t(x,t)\, dx = \int_{I\!R} (v_x + xv)_x\, dx = (v_x + xv)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0,$$

przy założeniu, że $\lim_{|x|\to\infty} (v_x(x,t) + xv(x,t)) = 0$.

- Będziemy zakładać, że

$$\int_{I\!R} v(x,t)\, dx = 1 \quad \text{dla każdego} \quad t \geq 0.$$

Jeżeli tak nie jest, to wystarczy podzielić równanie (30) przez $M = \int_{I\!R} v_0(x)\, dx$.

Uwaga: W rozdziale tym będziemy zawsze zakładać, że

$$v_0 \in L^1(I\!R), \quad v_0 \geq 0, \quad \int_{I\!R} v_0(x)\, dx = 1,$$

co na podstawie powyższych uwag natychmiast implikuje

$$v(\cdot,t) \in L^1(I\!R), \quad v(x,t) \geq 0, \quad \int_{I\!R} v(x,t)\, dx = 1$$

dla każdego $t \geq 0$. Założenie to jest zgodne z probabilistyczną interpretacją równania, gdyż w tym przypadku, dla każdego ustalonego $t \geq 0$, funkcja $v = v(x,t)$ jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej. $\square$

7.1 Rozwiązania stacjonarne

Szukamy rozwiązań zagadnienia (30)-(31) niezależnych od t. Takie rozwiązania nazywamy *rozwiązaniami stacjonarnymi* lub *stanami stacjonarnymi*. W tym przypadku $v_t = 0$, mamy więc do rozwiązania równanie różniczkowe zwyczajne

$$(v_x + xv)_x = 0.$$

Po jednokrotnym przecałkowaniu otrzymujemy $v_x + xv = C$, gdzie C jest dowolną stałą całkowania. Jeszcze raz całkujemy równoważne równanie $(ve^{x^2/2})_x = Ce^{x^2/2}$, aby dostać

$$v(x) = v(0)e^{-x^2/2} + Ce^{-x^2/2}\int_0^x e^{s^2/2}\, ds.$$

Ponieważ wymagamy aby $v \in L^1(I\!R)$, więc $C = 0$. Dodatkowo, chcemy aby $\int_{I\!R} v(x)\, dx = 1$, więc

$$1 = \int_{I\!R} v(x)\, dx = v(0)\int_{I\!R} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}v(0).$$

Ostatecznie otrzymujemy dokładnie jeden stan stacjonarny

$$v_\infty(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \tag{32}$$

spełniający warunek $\int_{\mathbb{R}} v_\infty \, dx = 1$.

Twierdzenie 15 *Niech $v = v(x,t)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia (30)-(31) z warunkiem początkowym v_0 spełniającym $\int_{\mathbb{R}} v_\infty(x)\, dx = 1$. Dla każdego $p \in [1,\infty]$*

$$\|v(\cdot,t) - v_\infty\|_p \to 0 \quad gdy \quad t \to \infty. \tag{33}$$

Dowód. Przypomnijmy, że $v = v(x,t)$ powstało z rozwiązania równania ciepła $u = u(x,t)$ zgodnie ze wzorem

$$v(x,t) = e^t u(xe^t, 2(e^{2t} - 1)).$$

W dalszej części dowodu zakładać będziemy, że $1 \le p < \infty$. Dowód dla $p = \infty$ wymaga oczywistych modyfikacji.

Powyższy związek pomiędzy v i u oraz prosta zamiana zmiennych prowadzą do równości:

$$\begin{aligned} \|v(\cdot,t) - v_\infty\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left| v(x,t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &= e^{t(1-1/p)} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| u(y, 2(e^{2t}-1)) - \frac{1}{e^t\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/(2e^{2t})} \right|^p \, dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Podstawiamy teraz w powyższym wyrażeniu $s = 2(e^{2t} - 1)$. Wtedy $e^{2t} = s/2 + 1$ oraz $e^t = \sqrt{s/2+1}$. Zauważmy, że w tych nowych zmiennych

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^t\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/(2e^{2t})} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(s/2+1)}} \exp\left(\frac{-y^2}{2(s/2+1)} \right) \\ &= G\left(y, (s/2+1)/2\right) = G(y, s/4 + 1/2), \end{aligned}$$

gdzie, przypomnijmy, jądro Gaussa-Weierstrassa ma postać $G(y,t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-y^2/(4t)}$.

Wykazaliśmy więc, że

$$\|v(\cdot,t) - v_\infty\|_p = (s/2+1)^{(1/2)(1-1/p)} \|u(\cdot,s) - G(\cdot, s/4+1/2)\|_p. \tag{34}$$

Przypomnijmy teraz podstawowy wynik dotyczący rozwiązań równania ciepła (zob. (25))

$$s^{(1/2)(1-1/p)} \|u(\cdot,s) - G(\cdot,s)\|_p \to 0 \quad \text{gdy} \quad s \to \infty.$$

ponieważ $M = \int_{\mathbb{R}} u(y,s)\, dy = \int_{\mathbb{R}} v(x,t)\, dx = 1$.

Oczywiście $t \to \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s \to \infty$. Aby zakończyć dowód opierając się na równości (34), należy jeszcze wykazać, że

$$s^{(1/2)(1-1/p)} \|G(\cdot, s/4+1/2) - G(\cdot,s)\|_p \to 0 \quad \text{gdy} \quad s \to \infty.$$

Wynika to jednak znowu z asymptotyki rozwiązań równania ciepła (25), ponieważ $w(y,s) = G(y, s/4+1/2)$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$w_s = w_{yy}, \quad w(y,0) = G(y,1/2)$$

oraz $\int_{I\!R} w(y,s)\,dy = 1$. □

Istotną wadą powyższego rozumowania jest to, że opieramy się na związku rozwiązań zagadnienia (30)-(31) z rozwiązaniami równania ciepła. Powyższy fakt jest prawdziwy w znacznie ogólniejszym przypadku, a dowody wymagają wielu zaawansowanych narzędzi matematycznych.

8 Metoda entropijna

Chciałbym przedstawić najnowsze metody badania asymptotyki rozwiązań równań typu Fokkera-Plancka na przykładzie równania (30). Opieram się tutaj na następujących pracach:

- G. Toscaniego [13], gdzie bada się asymptotykę rozwiązań równania ciepła $u_t = \Delta u$ i wprowadza się tzw. *metodę kinetyczną* czasami zwaną też *metodą entropijną*.
- A. Arnolda *et al.* [1], gdzie uogólnia się pomysły Toscaniego na przypadek równania $v_t = \nabla \cdot (D(x)\nabla v + v\nabla A(x))$.
- J.A. Carrillo i G. Toscaniego [3], gdzie bada się asymptotykę nieliniowego równania $v_t = \nabla \cdot (\nabla v^m + xv)$ stosując metody kinetyczne.

8.1 Relatywna entropia

Zacznijmy od podstawowych definicji.

Definicja 6 *Mówimy, że funcja $\psi \in C([0,\infty)) \cap C^4((0,\infty))$ generuje relatywną entropię, jeżeli spełnia założenia*

i) $\psi(1) = 0$;

ii) $\psi'' \geq 0$ *oraz* $\psi'' \not\equiv 0$ *na* $(0,\infty)$;

iii) $(\psi''')^2 \leq \frac{1}{2}\psi''\psi^{iv}$.

Definicja 7 *Dla dowolnych $f, g \in L^1(I\!R)$, $f \geq 0$, $g \geq 0$, takich, że $\int_{I\!R} f(x)\,dx = \int_{I\!R} g(x)\,dx = 1$ definiujemy relatywną entropię f względem g wzorem*

$$\Sigma_\psi(f,g) = \Sigma(f,g) \equiv \int_{I\!R} \psi\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) g(x)\,dx.$$

Uwaga: Dowolna funcja ψ generująca entropię jest wypukła, dlatego stosując nierówność Jensena, można wykazać, że $\Sigma(f,g) \geq 0$. Dowodzi się tego w następujący sposób

$$0 = \psi(1) = \psi\left(\int f\ dx\right) = \psi\left(\int \frac{f(x)}{g(x)} g(x)\ dx\right) \overset{\text{Jensen}}{\leq} \int \psi\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) g(x)\ dx.$$

□

Uwaga: Jeżeli funkcja ψ generuje relatywną entropię, to też generuje ją funkcja $\tilde{\psi}(s) = \psi(s) - \psi'(1)(s-1)$. Dodatkowo, dla dowolnych $f, g \in L^1(I\!R)$, takich, że $\int f = \int g = 1$, zachodzi równość

$$\Sigma_{\tilde{\psi}}(f,g) = \int_{I\!R} \psi\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) g(x)\ dx - \psi'(1) \underbrace{\int_{I\!R} \left(\frac{f}{g} - 1\right) g\ dx}_{=0} = \Sigma_\psi(f,g)$$

Dlatego zawsze możemy zakładać, że $\psi'(1) = 0$. □

Podamy teraz najważniejsze przykłady funkcji generujących entropię. Najbardziej znane to (entropia fizyczna)

$$\psi(s) = s \log s \quad \text{oraz} \quad \psi(s) = s \log s - s + 1.$$

Z powyższej uwagi wynika, że obie funkcje generują tę samą relatywną entropię. Przykład te uogólnia się następująco

$$\psi_1(s) = \alpha(s+\beta) \log\left(\frac{s+\beta}{1+s}\right) - \alpha(s-1) \quad \text{dla dowolnych} \quad \alpha > 0, \beta \geq 0.$$

Dla $1 < p < 2$ mamy

$$\psi_p(s) = \alpha[(s+\beta)^p - (1+\beta)^p - p(1+\beta)^{p-1}(s-1)] \quad \text{dla dowolnych} \quad \alpha > 0, \beta \geq 0,$$

a w szczególności $\psi_p(s) = s^p - 1 - p(s-1)$. Dla $p = 2$ funkcją generującą relatywną entropię jest

$$\psi_2(s) = \alpha(s-1)^2 \quad \text{dla dowolnego} \quad \alpha > 0.$$

Podstawowe twierdzenie mówi, że dowolna relatywna entropia rozwiązania względem rozwiązania stacjonarnego maleje w czasie.

Twierdzenie 16 *Niech $v = v(x,t)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia (30)-(31) z warunkiem początkowym v_0 spełniającym $v_0 \in L^1(I\!R)$, $v_0 \geq 0$, $\int v_0\ dx = 1$. Przypomnijmy, że v_∞ oznacza rozwiązanie stacjonarne dane wzorem $v_\infty(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$. Dla dowolnej funkcji ψ generującej entropię mamy*

$$\frac{d}{dt} \Sigma_\psi(v(\cdot,t), v_\infty) \leq 0.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$v_t = (v_x + xv)_x = \left(v_\infty \left(\frac{v}{v_\infty} \right)_x \right)_x .$$

Wykorzystamy ten wzór obliczając pochodną względem t:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Sigma_\psi(v(t), v_\infty) &= \frac{d}{dt}\int_{I\!R} \psi \left(\frac{v(t)}{v_\infty} \right) v_\infty \, dx \\
&= \int_{I\!R} \psi' \left(\frac{v(t)}{v_\infty} \right) v_t(t) \, dx \\
&= \int_{I\!R} \psi' \left(\frac{v(t)}{v_\infty} \right) \left(v_\infty \left(\frac{v}{v_\infty} \right)_x \right)_x \, dx \\
&= -\int_{I\!R} \psi'' \left(\frac{v(t)}{v_\infty} \right) \left[\left(\frac{v}{v_\infty} \right)_x \right]^2 v_\infty \, dx \le 0,
\end{aligned}$$

ponieważ $\psi'' \ge 0$. □

Udowodniliśmy więc, że funkcja $\Sigma(t) = \Sigma_\psi(v(t), v_\infty)$ maleje monotonicznie gdy t rośnie. Ponieważ $\Sigma \ge 0$, więc istnieje granica $\lim_{t\to\infty} \Sigma(t) = c_* \ge 0$. Celem kolejnego twierdzenia jest pokazanie, że $c_* = 0$.

Twierdzenie 17 *Przy założeniach Twierdzenia 16*

$$\lim_{t\to\infty} \Sigma(t) = 0.$$

Dowód. Aby maksymalnie uprościć dowód będziemy zakładać, że $v_0 \in C_c^\infty(I\!R)$. Można rozważać mniej regularne warunki początkowe, jednak w tym przypadku rozumowanie jest dużo bardziej skomplikowane.

Wiemy już, że $\lim_{t\to\infty} v(x,t) = v_\infty(x)$ dla prawie wszystkich $x \in I\!R$. Chcemy zastosować Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej do całki $\int \psi \left(\frac{v(t)}{v_\infty} \right) v_\infty \, dx$. To zakończy dowód ponieważ $\psi \left(\frac{v_\infty}{v_\infty} \right) = \psi(1) = 0$.

Zauważmy, że $v_\infty \in L^1(I\!R)$, więc wystarczy udowodnić, że $\psi \left(\frac{v(x,t)}{v_\infty(x)} \right)$ jest jednostajnie ograniczone względem x i t. W tym celu wybieramy $A > 0$ tak duże, aby

$$0 \le v_0(x) \le A v_\infty(x) \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in I\!R.$$

Jest to możliwe, ponieważ v_0 jest ciągłe i ma nośnik zwarty. Z zasady maksimum dla równania (30) wynika, że

$$0 \le v(x,t) \le A v_\infty(x) \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in I\!R, t > 0,$$

bo Av_∞ jest rozwiązaniem równania (30) dla każdego $A \in I\!R$. Stąd $\left| \frac{v(x,t)}{v_\infty(x)} \right| \le A$, a zatem

$$\left| \psi \left(\frac{v(x,t)}{v_\infty(x)} \right) \right| \le \sup_{0 \le s \le A} |\psi(s)| < \infty,$$

co kończy dowód. $\square$

W dalszej części naszych rozważań kluczową rolę odgrywa nierówność Csiszára-Kullbacka

$$\|v(t) - v_\infty\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{K}}\sqrt{\Sigma_\psi(v(t), v_\infty)}, \tag{35}$$

gdzie K jest pewną dodatnią stała. Dowód nierówności (35) podamy w Dodatku, na końcu tych wykładów. Teraz tylko podkreślimy, że nierówność (35) to nic innego jak rozwinięcie Taylora drugiego rzędu nierówności Jensena.

Zauważmy, że stosując Twierdzenie 17 do nierówności (35) otrzymamy, że $v(t) \to v_\infty$ w $L^1(I\!R)$ gdy $t \to \infty$. To jednak już wiemy na podstawie Twierdzenia 15. Naszym kolejnym celem będzie udowodnienie, że zbieżność ta jest wykładnicza.

Twierdzenie 18 *Niech $v(t)$, v_0 i v_∞ będą takie jak w Twierdzeniu 16. Oznaczmy*

$$I(t) = -\int_{I\!R} \psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)\left[\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)_x\right]^2 v_\infty\, dx = \frac{d}{dt}\int_{I\!R}\psi\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right) v_\infty\, dx.$$

Wtedy

$$\frac{d}{dt}|I(t)| \leq -2|I(t)|. \tag{36}$$

Dowód. Uwaga: ponieważ $-I(t) \geq 0$, więc wystarczy udowodnić, że $\frac{d}{dt}I(t) \geq -2I(t)$. Wprowadźmy nową funkcję

$$K(t) = \left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)_x,$$

która spełnia równość $v_t = (v_\infty K)_x$. Obliczamy pochodną

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(t) &= -\frac{d}{dt}\int_{I\!R}\psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)K^2 v_\infty\, dx \\ &= \int_{I\!R}\psi'''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)(v_\infty K)_x K^2\, dx \\ &\quad -2\int_{I\!R}\psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)K_t K v_\infty\, dx \\ &\equiv A + B. \end{aligned}$$

Składnik A całkujemy przez części. Ponieważ rozwiązanie $v(x,t)$ szybko dąży do 0, gdy $|x| \to \infty$, więc możemy zakładać, że wyrazy brzegowe dla $x = +\infty$ i $x = -\infty$ są równe zeru. Stąd

$$A = \int_{I\!R}\psi^{iv}\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)K^4 v_\infty\, dx + \int_{I\!R}\psi'''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)2K_x K^2 v_\infty\, dx.$$

Aby zająć się składnikiem B, przekształcimy najpierw wyrażenie $K_t K v_\infty$. Zauważmy, że z jawnego wzoru na v_∞ wynika równość $(v_\infty)_x = -x v_\infty$. Wiemy też, że $v_t = (v_\infty K)_x$. Dlatego mamy

$$\begin{aligned} K_t &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)_x = \left(\frac{v_t(t)}{v_\infty}\right)_x = \left(\frac{(v_\infty K)_x}{v_\infty}\right)_x \\ &= (-xK + K_x)_x = -K - xK_x + K_{xx}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} K_t K v_\infty &= -K^2 v_\infty - x v_\infty K_x K + K_{xx} K v_\infty \\ &= \frac{1}{2}(v_\infty (K^2)_x)_x - K^2 v_\infty - (K_x)^2 v_\infty. \end{aligned}$$

Przecałkujmy jeszcze przez części całkę

$$\begin{aligned} -2\int_{\mathbb{R}} \psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)\frac{1}{2}[v_\infty (K^2)_x]_x\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \psi'''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right) K (K^2)_x v_\infty\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi'''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right) 2K_x K^2 v_\infty\,dx. \end{aligned}$$

Teraz możemy już zapisać składnik B w nowej postaci

$$\begin{aligned} B &= -2\int_{\mathbb{R}} \psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right) K_t K v_\infty\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi'''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right) 2K_x K^2 v_\infty\,dx \\ &\quad +2\int_{\mathbb{R}} \psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right) K^2 v_\infty\,dx + 2\int_{\mathbb{R}} \psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)(K_x)^2 v_\infty\,dx. \end{aligned}$$

Pogrupujmy teraz powyższe równości w następujący sposób

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(t) &= A + B \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left[\psi^{iv}\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)K^4 + \psi'''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)4K_x K^2 + 2\psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)(K_x)^2\right] v_\infty\,dx \\ &\quad +2\int_{\mathbb{R}} \psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right) K^2 v_\infty\,dx. \end{aligned}$$

Drugi składnik po prawej stronie to oczywiście $-2I(t)$. Pierwszy składnik jest nieujemny, ponieważ $v_\infty \geq 0$ oraz wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe $\mathrm{Tr}(X \cdot Y)$ (ślad iloczynu macierzy), gdzie

$$X = \begin{pmatrix} 2\psi'' & 2\psi''' \\ 2\psi''' & \psi^{iv} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} (K_x)^2 & K^2 K_x \\ K^2 K_x & K^4 \end{pmatrix}.$$

Macierz X jest dodatnio określona ponieważ $2\psi'' \geq 0$ i $\det X = 2\psi''\psi^{iv} - 4(\psi''')^2 \geq 0$ z założeń o funkcji ψ. Łatwo sprawdza się dodatnią określoność macierzy Y. To implikuje $\mathrm{Tr}(X \cdot Y) \geq 0$.

Zatem $\frac{d}{dt}I(t) \geq -2I(t)$, a ponieważ $-I(t) \geq 0$, więc natychmiast otrzymujemy nierówność (36). $\square$

Wniosek 5 *Przy założeniach Twierdzenie 18, zachodzi nierówność*

$$|I(t)| \leq |I(0)|e^{-2t}.$$

DOWÓD. Nierówność (36) zapisaną w postaci

$$\frac{d}{dt}|I(t)| + 2|I(t)| \leq 0$$

mnożymy przez e^{2t} otrzymując

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2t}|I(t)|\right) \leq 0$$

i całkujemy po przedziale $[0, t]$. $\square$

Wykładnicze malenie relatywnej entropii natychmiast wynika z Twierdzenia 18. Jest to najważniejszy wynik w tym rozdziale i formułujemy go poniżej jako wniosek.

Wniosek 6 *Przy założeniach Twierdzenia 18*

$$\Sigma_\psi(v(t), v_\infty) \leq \sigma(v_0, v_\infty)e^{-2t}.$$

DOWÓD. Przypomnijmy, że pokazaliśmy już (zob. Twierdzenie 16 oraz nierówność (36)), że

$$\frac{d}{dt}\Sigma(t) = I(t) \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt}I(t) \geq -2I(t) \tag{37}$$

oraz $\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} \Sigma(t) = 0$. Całkujemy $\int_t^\infty ...\, ds$ nierówność

$$\frac{d}{dt}I(t) \geq -2\frac{d}{dt}\Sigma(t),$$

będącą wnioskiem z (37) i otrzymujemy

$$-I(t) \geq 2\Sigma(t).$$

Stosując znów równość z (37) dostajemy

$$\frac{d}{dt}\Sigma(t) \leq -2\Sigma(t),$$

której całkowanie (tak jak w dowodzie Wniosku 5) kończy dowód. $\square$

Uwaga: Nierówność Csiszára-Kullbacka (35) implikuje natychmiast wykładniczą zbieżność rozwiązań do rozwiązań stacjonarnych

$$\|v(t) - v_\infty\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\Sigma(v_0, v_\infty)}e^{-t}.$$

W ten sposób cel tej części wykładu został osiągnięty. $\square$

9 Wypukłe nierówności typu Sobolewa

Okazuje się, że dowodząc wykładniczego malenia relatywnej entropii, otrzymaliśmy całą klasę nierówności zwanych wypukłymi nierównościami typu Sobolewa. Przypomnijmy najpierw, że klasyczna nierówność Sobolewa mówi, że dla dowolnej funkcji $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(I\!R^n)$ takiej, że $\nabla u \in L^2(I\!R^n)$ zachodzi nierówność

$$\|u\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq A\|\nabla u\|_2,$$

gdzie $n \geq 3$ i stała A zależy tylko od n. Podobnego typu jest nierówność Poincaré'go dla *ograniczonych* obszarów $\Omega \subset I\!R^n$. Mówi ona, że istnieje stała $K = K(\Omega)$ taka, że dla każdej funkcji $v \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq K\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Przy okazji naszych rozważań udowodniliśmy całą klasę podobnych nierówności.

Twierdzenie 19 *Niech ψ będzie funkcją generującą relatywną entropię. Oznaczmy*

$$F_\psi(z) = \int_1^z \sqrt{\psi''(s)}\, ds.$$

Przypomnijmy, że $v_\infty(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$. Dla każdej funkcji $v_0 \in L^1(I\!R)$, $v_0 \geq 0$, takiej, że $\int_{I\!R} v_0(x)\, dx = 1$ zachodzi nierówność

$$\int_{I\!R} \psi\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right) v_\infty\, dx \leq \frac{1}{2}\int_{I\!R}\left(\frac{\partial}{\partial x}F_\psi\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)\right)^2 v_\infty\, dx. \tag{38}$$

Dowód. Jest to nasza nierówność $-I(t) \geq 2\Sigma(t)$ używana w dowodzie Wniosku 6 i wyliczona w punkcie $t = 0$. Aby to zobaczyć należy tylko przekształcić $-I(t)$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
-I(t) &= \int_{I\!R} \psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)\left[\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)_x\right]^2 v_\infty\, dx \\
&= \int_{I\!R} \sqrt{\psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)}\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)_x \sqrt{\psi''\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)}\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)_x v_\infty\, dx \\
&= \int_{I\!R} \left(F_\psi\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)\right)_x \left(F_\psi\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right)\right)_x v_\infty\, dx.
\end{aligned}$$

□

Podstawiając w nierówności (38) $u = v_0/v_\infty$ otrzymujemy

$$\int_{I\!R} \psi(u) v_\infty\, dx \leq \frac{1}{2}\int_{I\!R}(F(u)_x)^2 v_\infty\, dx$$

dla dowolnej funckji $u \in L^1(I\!R)$, $u \geq 0$ spełniającej

$$\int u v_\infty\, dx = \int v_\infty\, dx = 1.$$

Jest to tzw. *Wypukła nierówność typu Sobolewa.*

Podstawiamy teraz $u = w/(\int wv_\infty\, dx)$, aby otrzymać inną wersję tej nierówności

$$\int_{I\!R} \psi\left(\frac{w}{\int wv_\infty\, dx}\right) v_\infty\, dx \le \frac{1}{2}\int_{I\!R} (F\left(\frac{w}{\int wv_\infty\, dx}\right)_x)^2 v_\infty\, dx$$

dla każdej funkcji $w \in L^1(I\!R, v_\infty(x)\, dx)$, $w \ge 0$.

Jeszcze jedno podstawienie $w = f^2$ daje nierówność

$$\int_{I\!R} \psi\left(\frac{f^2}{\|f\|^2_{L^2(v_\infty\, dx)}}\right) v_\infty\, dx \le 2\int_{I\!R} \frac{f^2}{\|f\|^4_{L^2(v_\infty\, dx)}} \psi''\left(\frac{f^2}{\|f\|^2_{L^2(v_\infty\, dx)}}\right)(f_x)^2 v_\infty\, dx \qquad (39)$$

dla każdej funkcji $f \in L^2(I\!R, v_\infty\, dx)$.

Rozważmy teraz pewną szczególną funkcję ψ generującą relatywną entropię. Dla $\psi(s) = s\log s - s + 1$, mamy $\psi''(s) = 1/s$. Wtedy $F(s) = \int_1^s /\sqrt{z}\, dz = 2\sqrt{s} - 2$. Wówczas nierówność (39) przybiera postać

$$\int_{I\!R} f^2 \log\left(\frac{f^2}{\|f\|^2_{L^2(v_\infty)}}\right) v_\infty\, dx \le 2\int_{I\!R} (f_x)^2 v_\infty\, dx.$$

Jest to szczególny przypadek logarytmicznej nierówności Sobolewa udowodnionej przez L. Grossa (Amer. J. Math. **97** (1975), 1061–1083).

Dla kwadratowych funkcji $\psi(s) = (s-1)^2$ otrzymujemy nierówność Becknera (Proc. Amer. Math. Soc. **105**, 397–400)

$$\int_{I\!R} v^2 v_\infty\, dx - \left(\int_{I\!R} v v_\infty\, dx\right)^2 \le \frac{1}{2}\int_{I\!R} |v_x|^2 v_\infty\, dx$$

dla każdej funkcji $v \in L^1(I\!R, v_\infty\, dx)$.

10 Dodatek: Nierówność Csiszára-Kullbacka

W rozdziale tym udowodnimy nierówność Csiszára-Kullbacka, która sformułujemy tutaj w trochę ogólniejszym przypadku.

Twierdzenie 20 *Załóżmy, że*

- $\Omega \subset I\!R^n$ *jest otwarty,*
- $\psi \in C^2((0,\infty))$ *jest nieujemna i wypukła na* $[0,\infty)$*;*
- μ *jest nieujemną miarą na* Ω*;*
- f *i* g *są nieujemnymi i* μ*–mierzalnymi funkcjami na* Ω*;*
- $M = \int_\Omega f(x)\, d\mu = \int_\Omega g(x)\, d\mu$.

Wówczas istnieje pewna stała $K > 0$ taka, że

$$\int_\Omega \psi\left(\frac{f}{g}\right) g\, d\mu \geq \frac{K}{M} \|f-g\|^2_{L^1(\Omega, d\mu)}. \tag{40}$$

Dowód. Ustalmy zbiór $\omega \subset \Omega$ i całkowalną funkcję $k = k(x) \geq 0$ na ω. Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza wynika

$$\int_\omega |f-g|\, d\mu = \int_\omega \frac{|f-g|}{\sqrt{k}}\sqrt{k}\, d\mu \leq \left(\int_\omega \frac{|f-g|^2}{k}\, d\mu\right)^{1/2} \left(\int_\omega k\, d\mu\right)^{1/2},$$

czyli

$$\int_\omega \frac{|f-g|^2}{k}\, d\mu \geq \frac{\left(\int_\omega |f-g|\, d\mu\right)^2}{\int_\omega k\, d\mu}. \tag{41}$$

Dla ułatwienia, możemy założyć, że $f > 0$ i $g > 0$. Niech

$$h = \frac{f-g}{g} \quad \text{czyli} \quad \frac{f}{g} = 1 + h.$$

Rozwijamy funkcję $\psi(s)$ ze wzoru Taylora wokół punktu $s = 1$. Pamiętając, że $\psi(1) = 0$ otrzymujemy

$$\psi\left(\frac{f}{g}\right)\psi(1+h) = \psi'(1)h + \frac{1}{2}\psi''(1+\theta h)h^2,$$

gdzie $\theta = \theta(x) \in (0,1)$. Zauważmy jeszcze, że

$$\int_\Omega \psi'(1)hg\, d\mu = \psi'(1)\int_\Omega \frac{f-g}{g} g\, d\mu = \psi'(1)(M-M) = 0.$$

Dlatego, stosując powyższe rozwinięcie Taylora, otrzymamy tożsamość

$$\int_\Omega \psi\left(\frac{f}{g}\right) g\, d\mu = \int_\Omega \psi''(1+\theta h)h^2 g\, d\mu,$$

i teraz powinniśmy oszacować prawą stronę.

Wykorzystując nierówność (41) otrzymujemy najpierw

$$\begin{aligned}
\int_{f<g} \psi''(1+\theta h)h^2 g\, d\mu &= \int_{f<g} \psi''(1+\theta h)\frac{|f-g|^2}{g}\, d\mu \\
&\geq K_1 \int_{f<g} \frac{|f-g|^2}{g}\, d\mu \geq K_1 \frac{\left(\int_{f<g} |f-g|\, d\mu\right)^2}{\int_{f<g} g\, d\mu}\, d\mu,
\end{aligned}$$

gdzie $K_1 = \min_{s\in(0,1)} \psi''(s)$.

Podobnie otrzymujemy drugie oszacowanie

$$\begin{aligned}
\int_{f>g} \psi''(1+\theta h)h^2 g\, d\mu &= \int_{f>g} \psi''(1+\theta h)(1+h)\frac{|f-g|^2}{f}\, d\mu \\
&\geq K_2 \int_{f>g} \frac{|f-g|^2}{f}\, d\mu \geq K_2 \frac{\left(\int_{f>g} |f-g|\, d\mu\right)^2}{\int_{f>g} f\, d\mu}\, d\mu,
\end{aligned}$$

gdzie $K_2 = \min_{\theta\in(0,1), h>0} \psi''(1+\theta h)(1+h)$.

Łącząc obydwa oszacowania otrzymujemy nierówność (40). □

11 Literatura

[1] A. Arnold, P. Markowich, G. Toscani, A. Unterreiter, *On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker-Planck type equations*, Comm. Partial Differential Equations **26** (2001), no. 1-2, 43–100.
http://www.math.tu-berlin.de/~tmr/preprint

[2] H. Brézis, "Analyse fonctionnelle. Théorie et applications", Wydanie II, Dunod, Paris, 1999.

[3] J.A. Carrillo, G. Toscani, *Asymptotic L^1-decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), no. 1, 113–142.
http://www.math.tu-berlin.de/~tmr/preprint

[4] E. DiBenedetto, "Partial Differential Equations", Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1995.

[5] J. Duoandikoetxea, E. Zuazua, *Moments, masses de Dirac et décomposition de fonctions,* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **315** (1992), 693–698.

[6] L.C. Evans, "Partial Differential Equations", American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998. Polskie tłumaczenie: L.C. Evans, "Równania różniczkowe cząstkowe", PWN, Warszawa, 2002.

[7] G.B. Folland, "Introduction to Partial Differential Equations", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.

[8] F. John, "Partial Differential Equations", Fourth Edition, Springer-Verlag, NewYork, Berlin, 1981.

[9] H. Marcinkowska, "Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe", PWN, Warszawa, 1993.

[10] R. McOwen, "Partial Differential Equations. Methods and Applications", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.

[11] E. Stein, G. Weiss, "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces", Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[12] W.A. Strauss, "Partial Differential Equations. An Introduction", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.

[13] G. Toscani, *Kinetic approach to the asymptotic behaviour of the solution to diffusion equations*, Rend. di Matematica **16** (1996), 329–346.

[14] N.A. Watson, "Parabolic Equations on an Infinite Strip", Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1988.

[15] K. Yosida, “Functional Analysis”, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1968.