Repetytorium z matematyki elementarnej

Danuta Zaremba

Wstęp

Repetytorium to powstało z myślą o studentach, którzy chcą zdobyć uprawnienia do nauczania matematyki w szkole. Jako przyszli nauczyciele powinni dobrze sobie radzić z zagadnieniami matematyki elementarnej. Prowadząc wielokrotnie zajęcia z metodyki, zauważyłam, że studenci miewają spore kłopoty z procentami, równaniami i nierównościami z modułem, równaniami i nierównościami z parametrem, interpretacją geometryczną równań. W dużej mierze jest to wina edukacji szkolnej, która ciągle pozostawia dużo do życzenia. Dominują w niej reguły i schematy, nadmierna formalizacja i brak myślenia.

Repetytorium ma pomóc studentom pozbyć się złych nawyków. Tylko wtedy będą mogli dobrze nauczać, jeżeli sami dobrze się nauczą.

Spis treści

1 Procenty **4**

1.1 Zdrowy rozsądek zamiast x 4

1.2 Proporcje niepotrzebne 5

1.3 Pułapki procentowe 6

1.4 Jeszcze kilka przykładów 8

1.5 Zadania do samodzielnego rozwiązania 9

2 Równania i nierówności z modułem **12**

2.1 Unikajmy przypadków 12

2.2 Interpretacja geometryczna modułu 13

2.3 Kilka przykładów 15

2.4 Podnoszenie do kwadratu 16

2.5 Interpretacja geometryczna równań na płaszczyźnie 17

2.6 Zadania do samodzielnego rozwiązania 21

3 Równania i nierówności z parametrem **24**

3.1 Równania i nierówności z jedną niewiadomą 24

3.2 Układy równań z dwiema niewiadomymi 27

3.3 Zadania do samodzielnego rozwiazania 28

4 Odpowiedzi do zadań **30**

4.1 Odpowiedzi do zadań rozdziału 1 30

4.2 Odpowiedzi do zadań rozdziału 2 31

4.3 Odpowiedzi do zadań rozdziału 3 33

1 Procenty

1.1 Zdrowy rozsądek zamiast x

Na lekcjach matematyki preferowaną metodą rozwiązywania zadań są równania. Rozwiązując zadanie, w którym trzeba znaleźć pewną liczbę, najczęściej układa się odpowiednie równanie, a potem je rozwiązuje. Tymczasem w wielu wypadkach posługiwanie się równaniami nie tylko nie jest konieczne, ale wręcz komplikuje obliczenia. Tak z reguły jest w obliczeniach procentowych. Zobaczymy to na przykładach. Zacznijmy od zadania:

Telewizor staniał o 7% *i kosztuje teraz* 1767 *zł. Ile kosztował telewizor przed obniżką?*

Absolwenci szkół średnich najczęściej postępują według schematu:

telewizor przed obniżką kosztował x (złotych),

staniał o 7%, czyli cena jest równa $x - \frac{7}{100}x$,

kosztuje 1767 zł, skąd $x - \frac{7}{100}x = 1767$.

Rozwiązują otrzymane równanie: sprowadzają do wspólnego mianownika, odejmują, dzielą przez współczynnik przy niewiadomej. Takie postępowanie wymaga użycia papieru i ołówka, prosty kalkulator nie wystarczy. Obliczenia przeprowadza się jak za króla Ćwieczka.

Tymczasem wystarczy pomyśleć:

Skoro telewizor staniał o 7%, to zostało 93% jego ceny przed obniżką. Zatem zadanie sprowadza się do znalezienia liczby, której 93% jest równe 1767 zł.

A jak taką liczbę znaleźć?

Naturalną drogą jest tu obliczenie najpierw jednego procentu liczby, a potem pomnożenie wyniku przez 100, czyli obliczenie 100 procent.

Rachunki można przeprowadzić na najprostszym nawet kalkulatorze: dzielimy 1767 przez 93, a wynik mnożymy przez 100. Nie ma problemu z iksem.

Te dwa działania sprowadzają się do dzielenia $1767 : 0.93$, ale ono już nie jest intuicyjne.

1.2 Proporcje niepotrzebne

W programach szkolnych sporo miejsca zajmują proporcje. Są one często stosowanym narzędziem do rozwiązywania rozmaitych zadań, w tym zadań związanych z obliczeniami procentowymi. Na przykład w zadaniu:

23% *liczby wynosi* 34.5. *Ile wynosi* 16% *tej liczby?*

rozwiązujący z reguły zaczynają od napisania proporcji

$$\frac{16}{x} = \frac{23}{34.5}.$$

Proporcja jest także stosowana przy obliczaniu, jakim procentem jednej liczby jest inna liczba:

Jakim procentem liczby 13 *jest liczba* 9*?*

Rozwiązuje się tu równanie

$$\frac{9}{13} = \frac{x}{100}.$$

Takie sztywne schematy postępowania wynosimy się ze szkoły i nie zawsze mamy okazję ku temu, aby je zweryfikować. Skutki są różne, najczęściej jednak wiele osób ma problemy z obliczeniami procentowymi.

A przecież można rozwiązać oba zadania zdroworozsądkowo.

W pierwszym zadaniu wystarczy najpierw obliczyć jeden procent liczby, dzieląc 34.5 : 23, a potem wynik pomnożyć przez 16.

W zadaniu drugim również można obyć się bez proporcji. Liczba 9 stanowi $\frac{9}{13}$ liczby 13. Wystarczy zatem zamienić ten ułamek na ułamek o mianowniku 100 (bo tyle procent, ile setnych):

$$\frac{9}{13} = 0.692307692\ldots \approx 0.69 = 69\%.$$

Przeprowadzone rozumowanie można zapisać tak:

$$\frac{9}{13} = (\frac{9}{13} \cdot 100)\%$$

Schemat ten jest podawany najczęściej bez uzasadnienia, przy czym z reguły nie używa się nawiasu. Uczeń ma zapamiętać, niekoniecznie rozumiejąc.

Jak widać, w obliczeniach procentowych proporcje nie są potrzebne. Są one narzędziem dosyć archaicznym, utrudniają posługiwanie się kalkulatorem.

1.3 Pułapki procentowe

Zacznijmy od podchwytliwego zadania:

Większy zarabia o 50% *więcej niż Mniejszy. O ile procent mniej zarabia Mniejszy niż Większy?*

Często można usłyszeć odruchową odpowiedź: Oczywiście o 50%!

I to jest błąd, powstający w wyniku nieprawidłowego zastosowania prawdziwej skądinąd implikacji:

jeżeli liczba a jest większa od liczby b o c, to liczba b jest o c mniejsza od liczby a.

Nieprawidłowość polega na tym, że procentu nie można traktować jako liczby. Nie jest on wielkością absolutną i nie można go rozpatrywać w oderwaniu od wielkości, z której jest wzięty.

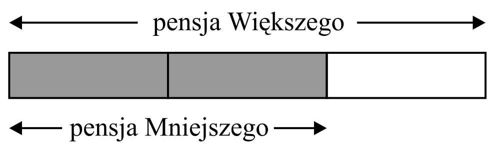
Wielkość, z której jest brany dany procent, nie zawsze jest określona w sposób jawny. Często trzeba zastanowić się, czym ona jest, trzeba znać odpowiednie konwencje.

Zgodnie z przyjętą umową, jeżeli podajemy, o ile procent liczba a jest większa od liczby b, to mamy na myśli procent liczby b; jeżeli natomiast określamy, o ile procent liczba b jest mniejsza od liczby a, to mamy na myśli procent liczby a.

Precyzyjne sformułowanie zadania z Większym i Mniejszym jest więc takie:

Większy zarabia o 50% *pensji Mniejszego więcej niż Mniejszy. O ile procent pensji Większego mniej zarabia Mniejszy niż Większy?*

Sytuację można łatwo przedstawić na rysunku:



Jak widać, pensja Mniejszego stanowi $\frac{2}{3}$ pensji Większego, jest więc od niej mniejsza o $\frac{1}{3}$ (pensji Większego), co stanowi ok. 33%.

Kto woli – może porachować, oznaczając pensje Większego i Mniejszego odpowiednio przez w i m:

$$w = \frac{3}{2}m, \quad m = \frac{2}{3}w, \quad m = w - \frac{1}{3}w.$$

Oto przykład innego podchwytliwego zadania:

100 *ha ziemi dzielimy na dwie działki, z których jedna ma powierzchnię o* 10 *ha większą niż druga. O ile procent działka większa będzie większa od mniejszej?*

Wcale nie o 10%! Wprawdzie 10 stanowi rzeczywiście 10 procent liczby 100, ale nie o to chodzi w zadaniu. Trzeba przecież obliczyć, jakim procentem powierzchni działki mniejszej (45 ha) jest powierzchnia działki większej (55 ha). Jest to w przybliżeniu 122%, czyli o 22% więcej.

Zapytajmy,

co się stanie z ceną towaru, jeżeli najpierw zmaleje o 10%, *a po pewnym czasie wzrośnie o* 10%*?*

Na ogół każdy od razu dostrzega, że cena zmieni się, bo owe 10% jest brane z różnych wielkości.

Rodzi sie więc pytanie, czy w rezultacie tych zmian cena zwiększy się czy zmniejszy?

Odpowiedź można znaleźć bez przeprowadzania rachunków. Wystarczy stwierdzić, że drugie 10% jest wzięte z mniejszej kwoty niż pierwsze, co w konsekwencji powoduje obniżkę ceny.

Zmieńmy teraz sytuację, najpierw cenę podwyższając, a potem obniżając, za każdym razem o 10%. Wtedy też można zauważyć, że obniża się cenę o więcej niż ją podwyższa.

Pytanie, w którym przypadku obniżka jest większa, sprawia często kłopot i pociąga za sobą różne dywagacje, prowadzące do różnych odpowiedzi. Tymczasem wystarczy sytuację ująć rachunkowo.

W pierwszym przypadku cenę mnoży się przez 0.9, a potem mnoży się wynik przez 1.1. W drugim przypadku wystepują te same czynniki, tylko w odwrotnej kolejności. Wynik jest więc taki sam - za każdym razem zostaje 0.99 ceny, czyli jest obniżka o 1%.

Można to też porachować o pamięci: w pierwszym przypadku po obniżce zostaje 90% ceny, którą po podwyżce powiększa się o jej 9%, a w drugim przypadku najpierw otrzymujemy 110% ceny, a potem zmniejszamy ją o 11%.

Na zakończenie zapytajmy,

która liczba jest większa: 13% *z* 27 *czy* 27% *z* 13*?*

Oczywiście liczby te są równe, co jest konsekwencją przemienności mnożenia.

1.4 Jeszcze kilka przykładów

Zacznijmy od dwóch prostych pytań:

Jaka kwotę odbierze po roku Kowalski, jeżeli ulokuje w banku 13 500 *zł, a odsetki wyniosą* 7%*?*

Ile jutro będzie kosztować kamera, który dzisiaj kosztuje 2800 *zł, a jutro stanieje o* 7%*?*

Aby znaleźć odpowiedź, wystarczy za każdym razem wykonać jedno działanie. W pierwszym przypadku

$$13\,500 \cdot 1.07,$$

a w drugim

$$2800 \cdot 0.93.$$

Tymczasem wiele osób rozwiązuje takie zadania dwuetapowo, obliczając najpierw o ile wzrośnie (lub zmaleje) dana kwota, a potem wykonując jeszcze odpowiednie dodawanie (lub odejmowanie). Jest to nawyk wyniesiony często ze szkoły, który niepotrzebnie wydłuża rachunki.

W wielu obliczeniach procenty warto przedstawiać w postaci ułamków zwykłych. Zobaczmy to na przykładzie:

Pewien towar najpierw staniał o 20%*, a następnie podrożał tak, że cena wróciła do wyjściowej. O ile procent podrożał towar za drugim razem?*

Wystarczy zauważyć, że pierwsza zmiana sprowadza się do pomnożenia ceny przez $\frac{4}{5}$, a więc druga zmiana musi spowodować pomnożenie otrzymanego wyniku przez $\frac{5}{4}$. Za drugim razem mamy więc podwyżkę o $\frac{1}{4}$, czyli 25% ceny.

Niekiedy proste zadania, do rozwiązania których wystarczy tylko rozumienie pojęcia procentu, okazują się dla wielu bardzo kłopotliwe. Na przykład:

Cena radia stanowi 10% ceny telewizora. Jakim procentem ceny radia jest cena telewizora? O ile procent telewizor jest droższy od radia? O ile procent radio jest tańsze od telewizora?

Szukając odpowiedzi, niektórzy próbują wykonywać jakieś rachunki. Wtedy często otrzymują nonsensowne odpowiedzi. A tymczasem odpowiedzi są natychmiastowe. Skoro cena radia stanowi 10% ceny telewizora, to cena radia jest równa cenie telewizora pomniejszonej o 90%. Skoro telewizor kosztuje 10 razy tyle co radio, to jego cena stanowi 1000% ceny radia, więc jest od niej o 900% większa.

Na zakończenie rozwiążmy dwa nastepujące zadania:

Bok kwadratu zwiększamy o 20%. O ile procent wzrośnie pole kwadratu?

Krawędź sześcianu zmniejszamy o 50%. O ile procent zmaleje objętość sześcianu?

Oznaczmy literą a długość boku kwadratu z pierwszego zadania. Wtedy po zwiekszeniu o 20% wyniesie ona $\frac{6}{5}a$. Zatem pole kwadratu wzrośnie z a^2 do $(\frac{6}{5})^2 a^2$. Ponieważ $(\frac{6}{5})^2 = \frac{36}{25} = \frac{144}{100}$, więc nowe pole stanowi 144% pola wyjściowego, czyli jest od niego o 44% większe.

Niech teraz a oznacza długość krawędzi szescianu z zadania drugiego. Wtedy po zmniejszeniu o 50% wyniesie ona $\frac{1}{2}a$. Zatem objętość zmaleje z a^3 do $\frac{1}{8}a^3$. Ponieważ $\frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = \frac{12.5}{100}$, więc nowa objętość stanowi 12.5% objętości wyjściowej, czyli jest od niej o 87.5% większa.

1.5 Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. 46% pewnej liczby jest o 3 większe od 21% tej liczby. Jaka to liczba?

2. 37% z 28 wynosi 10.36. Ile wynosi 28% z 37?

3. Cenę towaru obniżono najpierw o 10%, a potem nową cenę obniżono o 15%. O ile procent staniał towar?

4. Pewien towar najpierw podrożał o 20%, a potem staniał o 20%. Jakim procentem ceny wyjściowej jest cena obecna?

5. Cenę towaru zwiększono najpierw o 10%, a potem nową cenę zwiększono o 20%. O ile procent podrożał towar?

6. Sklepikarz kupując towar po cenie hurtowej najpierw dolicza do niej 40% (to jest jego dochód), a potem jeszcze 20% od dochodu (na podatek). W ten sposób powstaje cena detaliczna towaru. Jaka była cena hurtowa towaru, którego cena detaliczna wyniosła 111 zł?

7. Podczas pierwszej jazdy samochodem zużyto 20% benzyny znajdującej się w zbiorniku. W czasie drugiej jazdy zużyto 10% pozostałej benzyny. W baku pozostało 9 litrów benzyny. Ile litrów benzyny było przed pierwszą jazdą?

8. Wczoraj w klasie uczniów obecnych było 8 razy tyle, co nieobecnych. Dziesiaj nie przyszło jeszcze dwóch i teraz nieobecni stanowią 20% uczniów obecnych. Ile uczniów liczy klasa?

9. Dwaj bracia mają razem 273 zł, przy czym jeden ma o 10% więcej niż drugi. Ile pieniędzy ma każdy z nich?

10. Iksińscy zamierzali kupić dywan i odkurzacz. Przy płaceniu okazało się, że na każdą z tych rzeczy otrzymali 3% rabatu. O ile procent mniej zapłacili?

11. Liczba a stanowi 20% liczby b. Jakim procentem liczby a jest liczba b?

12. X zarabia 4 razy tyle co Y.

a) O ile procent więcej zarabia X od Y?

b) O ile procent mniej zarabia Y od X?

13. Większy zarabia 125% tego, co Mniejszy.

a) Jaki procent zarobków Większego stanowią zarobki Mniejszego?

b) O ile procent mniej zarabia Mniejszy od Większego?

c) O ile procent więcej zarabia Większy od Mniejszego?

14. Cena magnetowidu stanowi 40% ceny telewizora.

a) Jakim procentem ceny magnetowidu jest cena telewizora?

b) O ile procent telewizor jest droższy od magnatowidu?

c) O ile procent magnetowid jest tańszy od telewizora?

15. Bok kwadratu zwiększamy o 5%. O ile procent zwiększy się:

a) pole kwadratu, b) obwód kwadratu?

16. Krawędź sześcianu zwiększamy o 10%. O ile procent wzrośnie objętość sześcianu?

17. Jeden bok kwadratu zwiększono o 20%, a drugi zmniejszono o 20%, otrzymując prostokąt. Czy pole prostokąta jest mniejsze czy większe od pola kwadratu? O ile procent?

18. Państwo Iksińscy chcą kupić działkę. Mają do wyboru dwie. Obie są w kształcie kwadratu, przy czym bok jednej z nich jest o 10% mniejszy od boku drugiej. Cena jest proporcjonalna do powierzchni działki. Obliczyć:

a) o ile procent mniej zapłacą, jeżeli zdecydują się kupić działkę mniejszą,

b) o ile procent więcej zapłacą, jeżeli zdecydują się kupić działkę większą.

19. Dwaj uczniowie, Wysoki i Niski, wyszli jednocześnie z tego samego domu i poszli do tej samej szkoły. Niski miał krok o 20% krótszy od kroku Wysokiego, ale za to robił o 20% kroków więcej w tym samym czasie. Który z nich przyjdzie wcześniej do szkoły?

20. Ilu procentowy roztwór otrzymamy, jeżeli zmieszamy 2 litry roztworu 7.5-procentowego i 3 litry roztworu 10-procentowego?

21. Z 30 kg 10-procentowego roztworu soli odparowano 10 kg wody. Ilu procentowy roztwór otrzymano?

22. Ile soli trzeba dosypać do 2 kilogramów 2-procentowego roztworu soli, aby dostać roztwór 12-procentowy? (Odpowiedź podać z dokładnością do grama.)

23. Woda morska zawiera 5% soli. Ile kilogramów słodkiej wody należy dodać do 40 kg wody morskiej, aby otrzymać wodę o zawartości 2% soli?

24. 20–procentowy roztwór kwasu siarkowego zmieszano z 10–procentowym roztworem tego kwasu, uzyskując 10 litrów roztworu 14–procentowego. Ile było każdego z tych dwóch roztworów?

25. 100 g stopu złota próby 800 stopiono z 50 g stopu złota nieznanej próby i otrzymano stop próby 750. Jaka była próba nieznanego stopu?
(Próba 800 oznacza, że złoto stanowi 80% stopu.)

26. W jakim stosunku należy zmieszać 5-procentowy i 12-procentowy roztwór kwasu siarkowego, aby otrzymać 9-procentowy roztwór tego kwasu?

27. Zebrano pewną ilość grzybów, które zawierały 80% wody. Po wysuszeniu otrzymano 1 kg grzybów zawierających już tylko 10% wody. Ile grzybów zebrano?

2 Równania i nierówności z modułem

2.1 Unikajmy przypadków

Jak wiadomo, moduł liczby rzeczywistej, inaczej zwany wartością bezwzględną tej liczby, definiuje się tak:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0, \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Rozwiązując równania lub nierówności z modułem, nie zawsze trzeba odwoływać się bezpośrednio do definicji. Często znacznie prościej jest skorzystać z różnych włsności modułu. W szkole jednak regułą jest korzystanie z definicji modułu i rozważanie przypadków:

- liczba pod modułem nieujemna,

- liczba pod modułem ujemna.

Jeżeli w równaniu lub nierówności występuje więcej niż jeden moduł, to liczba przypadków jest większa. Na przykład w równaniu

(*) $\quad |x-1| = |3x+1|$

są formalnie cztery przypadki:

I. $x-1 \geqslant 0$ i $3x+1 \geqslant 0$, II. $x-1 \geqslant 0$ i $3x+1 < 0$,

III. $x-1 < 0$ i $3x+1 \geqslant 0$, IV. $x-1 < 0$ i $3x+1 < 0$.

Jeżli zauważymy, że nierówności w przypadku II wzajemnie się wykluczają, to zostaną do rozważenia trzy przypadki, odpowiadające nierównościom

$$x < -\frac{1}{3}, \qquad -\frac{1}{3} \geqslant x < 1, \qquad x \geqslant 1.$$

W każdym przypadku otrzymuje się równanie już bez modułu, rozwiązuje się je, a potem sprawdza, czy znaleziony pierwiastek mieści się w rozważanym przedziale.

Tymczasem można prościej. Wystarczy skorzystać z własności, że moduły dwóch liczb są równe wtedy i tylko wtedy, kiedy liczby są równe lub przeciwne. Stąd wynika, że równanie (*) jest równoważne alternatywie równań

$$x - 1 = 3x + 1 \quad \text{lub} \quad 1 - x = 3x + 1,$$

skąd $x = -1$ lub $x = 0$.

Tak samo można rozwiązać równanie

$$|2x - 1| = 3,$$

ponieważ oznacza ono, że

$$2x - 1 = 3 \quad \text{lub} \quad 2x - 1 = -3.$$

Są oczywiście równania, które trudno było by rozwiązać bez bezpośredniego skorzystania z definicji modułu. Na przykład przystępując do rozwiązywania równania

$$|x + 2| + |2x - 5| = |x - 3|$$

w sposób naturalny dzielimy dziedzinę na przedziały, w których liczby pod modułami mają stałe znaki. W tym celu znajdujemy tzw. miejsca zerowe poszczególnych modułów, otrzymujemy trzy liczby, dzielące zbiór liczb rzeczywistych na cztery przedziały. Są tu więc cztery przypadki.

Niech jednak takie postępowanie nie będzie regułą. Zawsze warto szukać możliwie prostego sposobu rozwiązania zadania. Metoda skomplikowana, w której rozważa się wiele przypadków, jest nie tylko pracochłonna, ale także sprzyja popełnianiu błędów.

2.2 Interpretacja geometryczna modułu

Z definicji modułu otrzymujemy

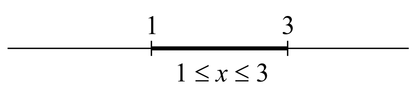
$$|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{dla } a \geqslant b, \\ b - a & \text{dla } a < b, \end{cases}$$

co oznacza, że moduł różnicy dwóch liczb jest równy odległości (na prostej) między nimi. Warto o tym pamiętać, rozwiązując równania czy nierówności.

Równanie

$$|x - 1| + |x - 3| = 2$$

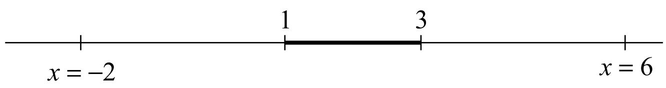
można wtedy interpretować jako warunek, że suma odległości punktu x od punktów 1 i od 3 jest równa 2. Warunek ten jest spełniony dokładnie przez punkty odcinka domkniętego o końcach 1 i 3:



Taką samą metodą można rozwiązać równanie

$$|x-1|+|x-3|=8.$$

Nietrudno zauważyć, że są dwa punkty, których suma odległości od 1 i 3 jest równa 8:

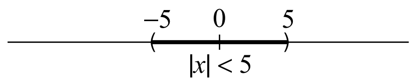


Rozwiązując nierówności

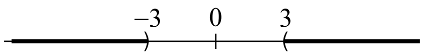
$$|y|<5, \qquad |y|>3,$$

skorzystajmy z interpretacji modułu liczby jako jej odległości od zera:

gdzie leżą liczby, których odległość od zera jest mniejsza niż 5?



gdzie leżą liczby odległe od zera o więcej niż 3?



Zatem

$$|y|<5 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, kiedy} \quad -5<y<5,$$
$$|y|>3 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, kiedy} \quad y>3 \text{ lub } y<-3.$$

Na przykład nierówność

$$|x+3|<5$$

jest równoważna koniunkcji nierówności

$$-5<x+3<5,$$

co oznacza, że

$$-8<x<2;$$

nierówność

$$|x-2|>3$$

jest równoważna alternatywie nierówności

$$x-2>3 \quad \text{lub} \quad x-2<-3,$$

czyli

$$x>5 \quad \text{lub} \quad x<-1.$$

2.3 Kilka przykładów

Zacznijmy od rozwiązania równania

$$|3x - 1| = 1 - 3x.$$

Wystarczy zauważyć, że liczba $1 - 3x$ jest przeciwna do liczby $3x - 1$. Zatem na mocy definicji modułu równanie jest równoważne nierówności

$$3x - 1 \leqslant 0,$$

czyli

$$x \leqslant \frac{1}{3}.$$

Analogicznie równanie

$$|3 - 2x| = 3 - 2x$$

jest równoważne nierówności

$$3 - 2x \geqslant 0,$$

czyli

$$x \leqslant \frac{3}{2}.$$

Równanie

$$|3x - 2| = |2 - 3x|$$

jest spełnione dla wszystkich x rzeczywistych, co wynika z parzystości funkcji moduł, a równanie

$$|x^2 + \frac{1}{3}| = \frac{1}{4}$$

nie ma żadnych rozwiązań, bo lewa strona jest równa co najmniej $\frac{1}{3}$.

Równanie

$$|2x - 1| = x - 3$$

jest spełnione, jeżeli

$$x - 3 \geqslant 0$$

oraz

$$2x - 1 = x - 3 \quad \text{lub} \quad 2x - 1 = 3 - x,$$

co w konsekwencji oznacza, że

$$x = 4.$$

Nierówność
$$|3x-1| \geqslant 3x-1$$
jest spełniona dla wszystkich x, a nierówność
$$||x|+2| < 1$$
nie jest spełniona dla żadnego x.

2.4 Podnoszenie do kwadratu

Jak uzasadnić, że

(*) $\quad |a+b| \leqslant |a|+|b|$?

Czy koniecznie trzeba rozważać przypadki różnych znaków liczb wystepujących pod modułami?

Zauważmy, że nierówność, której obie strony są nieujemne, można podnieść stronami do kwadratu, tzn.
$$|x| \leqslant |y| \quad \text{wtedy i tylko wtedy} \quad |x|^2 \leqslant |y|^2.$$
Korzystając z tej własności oraz z równości $|x|^2 = x^2$, otrzymujemy równoważną postać nierówności (*):
$$(a+b)^2 \leqslant a^2 + 2|a||b| + b^2.$$
Po przekształceniu otrzymamy
$$ab \leqslant |a||b|.$$
Ta ostatnia nierówność jest spełniona dla wszystkich a i b, co wynika z warunku $x \leqslant |x|$.

Podnoszenia do kwadratu nie można zastosować do nierówności
$$|a-b| \geqslant |a|-|b|,$$
ponieważ prawa strona nie musi być dodatnia. Nierówność tę można wyprowadzić z (*):
$$|a| = |(a-b)+b| \leqslant |a-b| + |b|,$$
skąd
$$|a|-|b| \leqslant |a-b|.$$

Równości

$$|ab| = |a||b| \quad \text{i} \quad |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$$

udowodnimy natychmiast, stosując własność

$$|x| = |y| \quad \text{wtedy i tylko wtedy} \quad x^2 = y^2.$$

Odnotujmy na koniec, że metodą podnoszenia do kwadratu można rozwiązywać niektóre równania i nierówności z modułem. Na przykład równanie

$$|x + 2| = |x - 3|$$

jest równoważne równaniu

$$(x + 2)^2 = (x + 3)^2,$$

a rozwiązanie nierówności

$$|2x + 1| < |x - 1|$$

sprowadza się do rozwiązania nierówności kwadratowej

$$(2x + 1)^2 < (x - 1)^2.$$

2.5 Interpretacja geometryczna równań na płaszczyźnie

Zacznijmy od równania

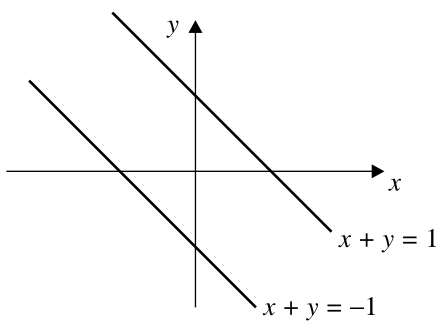
$$|x + y| = 1$$

i zapytajmy, jaki podzbiór płaszczyzny ono przedstawia.

Odpowiedź nie jest trudna. Równanie oznacza, że

$$x + y = 1 \quad \text{lub} \quad x + y = -1,$$

więc w konsekwencji mamy dwie proste:



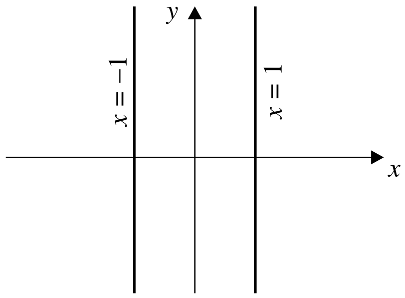
Nieco podchwytliwe jest równanie zawierające tylko jedną współrzędną. Na przykład uczniowie nagminnie sądzą, że równanie

$$|x| = 1$$

przedstawia dwa punkty: $x = 1$ i $x = -1$. Taki błąd zdarza się też studentom.

Tymczasem brak warunku na współrzędną y powoduje, że może ona przyjmować dowolne wartości: $-\infty < y < \infty$

Zatem również mamy dwie proste:



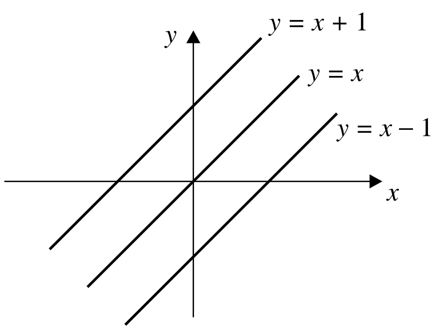
A jaka jest interpretacja geometryczna równania

$$|x - y| = (x - y)^2?$$

Zauważamy, że wszystkie punkty prostej $x = y$ spełniają to równanie. Jeżeli $x \neq y$, to dzieląc obie strony równania przez $|x - y|$ otrzymamy równanie równoważne

$$1 = |x - y|,$$

które przedstawia dwie proste: $x - y = 1$ i $x - y = -1$. W konsekwencji otrzymujemy trzy proste:



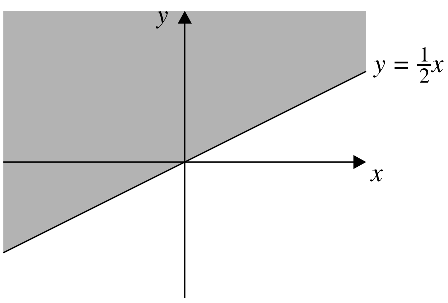
Równanie

$$|x - 2y| = 2y - x$$

jest równoważne nierówności

$$x - 2y \leqslant 0,$$

a ta nierówność przedstawia półpłaszczyznę $y \geqslant \frac{1}{2}x$:

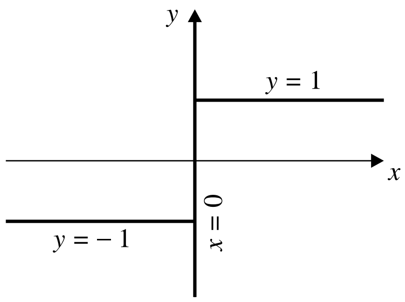


Jaki zbiór punktów płaszczyzny jest przedstawiony równaniem

$$|x|y = x?$$

Rozpatrzmy trzy przypadki: $x = 0$, $x > 0$ i $x < 0$.

W pierwszym przypadku równanie jest spełnione przez każdą liczbę y – mamy więc oś y. W drugim i trzecim przypadku podzielmy równanie obustronnie przez x. Otrzymamy odpowiednio $y = 1$ i $y = -1$, a więc dwie półproste. Zatem równanie ma interpretację jak na rysunku:

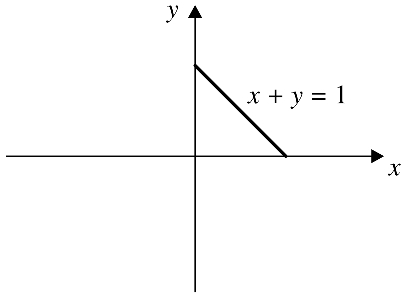


Znajdując podzbiór płaszczyzny przedstawiony równaniem

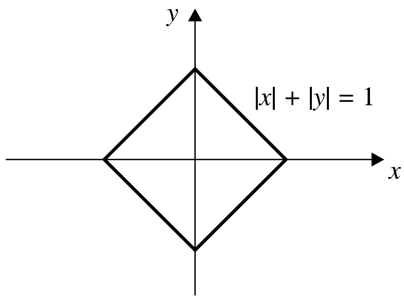
$$|x| + |y| = 1,$$

warto skorzystać z tego, że znaki obu współrzędnych nie są tu istotne. Jeżeli punkt (x, y) spełnia równanie, to także spełniają je punkty $(-x, y)$ i $(x, -y)$.

Oznacza to, że rownanie przedstawia zbiór symetryczny wzgledem każdej osi ukladu współrzednych. Wystarczy zatem znaleźć część zbioru leżącą na przykład w pierwszej ćwiartce ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$)



i uzupełnić ją do zbioru symetrycznego względem każdej osi:

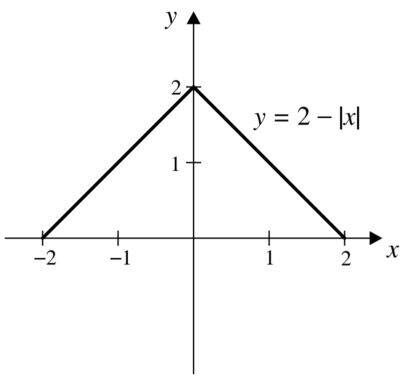


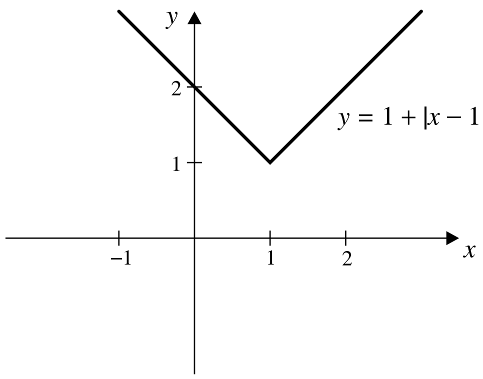
Interpretacja geometryczna równań pozwala zobaczyć liczbę rozwiązań układu równań. Niekiedy można nawet odczytać rozwiązania z rysunku.

Rozważmy układ

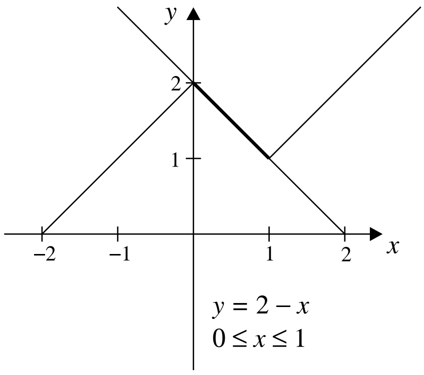
$$\begin{cases} y + |x| = 2 \\ y - |x - 1| = 1 \end{cases}$$

Narysujmy łamane przedstawione tymi rownaniami:





Rozwiązaniami układu równań są punkty części wspólnej obu łamanych:



2.6 Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Rozwiązać równania:

a) $|5x-1| = 1-5x$, b) $|2-|2-|x||| = 2$, c) $|5x+2| = |4-x|$.

2. Rozwiązać równania:

a) $|2x+7| = 2x+7$, b) $|x^2-5| = 3$, c) $|x^2+5| = 3$.

3. Rozwiązać równania:

a) $|x-1| = 3-x$, b) $|3x^2+\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$, c) $|2-|x|| = 2-|x|$.

4. Rozwiązać równania:

a) $|3-|3-x|| = 3$, b) $|3x^2+\frac{1}{4}| = \frac{1}{8}$, c) $|x-3| = x-5$.

5. Rozwiązać równania:

a) $|x-1| = 2-x$, b) $|x-1| = x-2$, c) $|3x+1| = |3x+2|$.

6. Rozwiązać równania, korzystając z interpretacji geometrycznej modułu:

a) $|x-3|+|x-5| = 1$, b) $|x-1|+|2-x| = 3$, c) $|x+3|+|x-2| = 5$.

7. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą równanie

$$|x-3|+2|x+1| = 4,$$

nie rozwiązując tego równania.

8. Rozwiązać nierówności:

a) $|x+1|<4$, b) $|3-2x|>6$, c) $|x^2+1|<4$.

9. Rozwiązać nierówności:

a) $|3x^2-5|>2$, b) $|x-4|<5$, c) $||x|-2|>10$.

10. Rozwiązać nierówności, korzystając z interpretacji geometrycznej modułu:

a) $|x-1|+|x-4|<5$, b) $|x-1|+|x-4|<3$, c) $|x-1|+|x-4|\leqslant 3$.

11. Rozwiązać nierówności:

a) $|x+1|\geqslant x+1$, b) $|x-3|\leqslant 3-x$, c) $|5-x|>x-5$.

12. Znaleźć dziedzinę funkcji:

a) $y=\sqrt{3-|3-|x||}$, b) $y=\frac{\ln(|x|+1)}{\ln(|x|-1)}$, c) $y=\frac{\ln(|x|-1)}{\ln(|x|+1)}$.

13. Jakie podzbiory płaszczyzny sa przedstawione równaniami:

a) $|x^2+y^2|+|x^2-y^2|=0$, b) $|x^2+y^2||x^2-y^2|=0$, c) $|x^2+y^2-1|+|x^2-y^2|=0$?

14. Jakie podzbiory płaszczyzny sa przedstawione równaniami:

a) $|x-y|=5$, b) $|x|-|y|=5$, c) $|x||y|=5$?

15. Jakie podzbiory płaszczyzny sa przedstawione równaniami:

a) $|x+y|=|x-y|$, b) $|x-y|=(x-y)^3$, c) $|x-3y|=x-3y$?

16. Jakie podzbiory płaszczyzny są przedstawione równaniami:

a) $|x^2+y^2|=|x^2-y^2|$, b) $|x|(x-y)=x^2$, c) $||x|-|y||=1$?

17. Jakie podzbiory płaszczyzny są przedstawione równaniami:

a) $(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)=0$, b) $|x-y|+|x^2+y^2-1|=0$, c) $|x^2+1|+|x^2-y^2|+|x^2+y^2-1|=\frac{1}{2}$?

18. Napisać równanie, które przedstawia zbiór złożony z obu osi współrzędnych i prostej prostopadłej do osi y przechodzącej przez punkt $(9,-9)$.

19. Narysować wykresy funkcji:

a) $y=\frac{1}{x-1}$, b) $y=\frac{1}{|x-1|}$, c) $y=\frac{1}{|x|-1}$.

20. Narysować wykresy funkcji:

a) $y = |\ln|x||$, b) $y = \ln(|x| + 1)$, c) $y = \ln(|x| - 1)$, d) $y = \ln|x - 1|$.

21. Rozwiązać układy równań, korzystając z interpretacji geometrycznej:

a) $\begin{cases} y = |x - 1| \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} |x - y| = 1 \\ x|y| = y \end{cases}$.

3 Równania i nierówności z parametrem

3.1 Równania i nierówności z jedną niewiadomą

Zacznijmy od prostego równania

$$ax + 2 = a - x$$

z niewiadomą x. Przekształcamy:

$$ax + x = a - 2$$

$$(a + 1)x = a - 2$$

W tym miejcu przeciętny absolwent szkoły średniej na ogół robi założenie, że $a + 1 \neq 0$, oblicza

$$x = \frac{a - 2}{a + 1}$$

i uważa, że to jest koniec zadania.

Tymczasem jest to tylko rozwiązanie równania dla $a \neq -1$. Nie wiadomo, jak jest w przeciwnym przypadku. Trzeba uzupełnić tę lukę.

Jeśli $a = -1$, to otrzymujemy

$$(-1 + 1)x = -1 - 2,$$

czyli

$$0 \cdot x = -3,$$

a to rownanie nie ma żadnego rozwiązania.

Zatem pełne rozwiązanie wyjściowego równania wygląda tak:

jeżeli $a = -1$, to nie ma rozwiązań; jeżeli $a \neq -1$, to jest jedno rozwiązanie postaci $x = \frac{a-2}{a+1}$.

Rozwiązanie równania zależy więc od stałej a w nim występującej. Jest to tzw. parametr. Rozwiązując równanie z parametrem, trzeba uwzględnić całą dziedzinę zmienności parametru. W rozważanym równaniu parametr a może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Podobnie jest z rozwiązywaniem nierówności z parametrem. Rozwiązując nierówność

$$2x < 5 + ax,$$

otrzymujemy

$$(2-a)x < 5$$

i rozważamy dwa przypadki: $a = 2$ i $a \neq 2$.

Jeśli $a = 2$, to mamy nierówność $0 \cdot x < 5$, spełnioną przez wszystkie liczby rzeczywiste; jeśli $a \neq 2$, to dla $a < 2$ otrzymujemy $x < \frac{5}{a-2}$, a dla $a > 2$ otrzymujemy $x > \frac{5}{a-2}$.

Rozważmy jeszcze kilka przykładów równań z parametrami, wszystkie z niewiadomą x. Zacznijmy od równania

$$a^2x - 2 = a + 4x.$$

Po przekształceniu otrzymamy równanie równoważne

$$(a-2)(a+2)x = a + 2.$$

Rozpatrzmy dwa przypadki: $a + 2 = 0$ i $a + 2 \neq 0$.

W pierwszym przypadku otrzymujemy równanie spełnione tożsamościowo, a w drugim, po podzieleniu stronami przez $a + 2$, otrzymujemy równanie

$$(a-2)x = 1,$$

którego rozwiązywanie zależy od tego, czy współczynnik przy x jest czy nie jest zerem. Trzeba więc uwzględnić dwa podprzypadki: $a = 2$ i $a \neq 2$. W pierwszym z nich równanie nie ma rozwiązań, a w drugim ma jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{a-2}$.

Podsumujmy:

dla $a = -2$ każda liczba spełnia równanie; dla $a = 2$ równanie nie ma rozwiązań; dla pozostałym wartości parametru równanie ma jedno rozwiązanie wyrażające się wzorem $x = \frac{1}{a-2}$.

Rozwiążmy równanie

$$|a|(3-x) = x + 2|a|.$$

Przekształacając je do równania równoważnego, otrzymamy

$$(1 + |a|)x = |a|.$$

Ponieważ $(1 + |a|) > 0$ dla każdego a, więc równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{|a|}{1+|a|}$ dla każdej wartości parametru a.

Rozwiążmy teraz równanie

$$a|x| - 9 = 3|x| - a^2.$$

Po przekształceniu otrzymamy

$$(a-3)|x| = 9 - a^2.$$

Jeżeli $a = 3$, to równanie jest spełnione tożsamosciowo.

Dla $a \neq 3$ otrzymujemy równanie równoważne

$$|x| = 3 + a,$$

które nie ma rozwiązań dla $a < -3$, ma jedno rozwiązanie $x = 0$ dla $a = -3$ i ma dwa rozwiązania $x = 3 + a$ i $x = -3 - a$ dla $a > -3$ (oczywiście z wyjątkiem $a = 3$).

Rozwiązując równanie

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-a} = 0,$$

trzeba zauważyć, że implikuje ono warunek $x \neq a$. Jeśli więc $a \neq 1$ i $a \neq 2$, to są $x = 1$ lub $x = 2$; jeśli $a = 1$, to $x = 2$; jeśli $a = 2$, to $x = 1$.

Aby rozwiązać równanie

$$\frac{a^2 - a}{x - 1} = 1,$$

wystarczy rozwiązać równanie

$$a^2 - a = x - 1$$

i dołaczyć warunek $x \neq 1$.

Zatem

$$x = a^2 - a + 1 \quad \text{i} \quad a^2 - a + 1 \neq 1,$$

skąd

$$a \neq 0 \quad \text{oraz} \quad a \neq 1.$$

Oznacza to, że dla $a = 1$ i dla $a = 0$ równanie nie ma rozwiązań, a dla pozostałych wartości a ma jedno rozwiązanie.

Na zakończenie rozwiążmy nierówność

$$\frac{x-3}{x-a} < 1.$$

Można tu oddzielnie znaleźć rozwiązania spełniające warunek $x > a$ i oddzielnie rozwiązania spełniające warunek $x < a$. Można uniknąć rozważania tych przypadków, jeżeli nierówność sprowadzimy do postaci

$$\frac{a-3}{x-a} < 0.$$

Odczytujemy stąd, że dla $a > 3$ nierówność jest spełniona dla $x \epsilon (-\infty, a)$, a dla $a < 3$ nierówność jest spełniona dla $x \epsilon (a, \infty)$; dla $a = 3$ nierówność nie ma rozwiązania.

3.2 Układy równań z dwiema niewiadomymi

Rachunkowe rozwiązywanie układu równań z parametrem jest na ogół dosyć skomplikowane. Niekiedy warto posłużyć się interpretacją geometryczną tych równań, szczególnie w przypadku, kiedy chcemy poznać tylko liczbę rozwiązań.

Zacznijmy od układu równań liniowych z dwoma parametrami:

$$\begin{cases} ax + y = b \\ x + y = a \end{cases}$$

W przypadku $a = 1$ są to dwie proste równoległe. Jeżeli dodatkowo $b = 1$, to proste się pokrywają, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, a jeżeli $b \neq 1$, to proste są różne, więc układ nie ma rozwiązań.

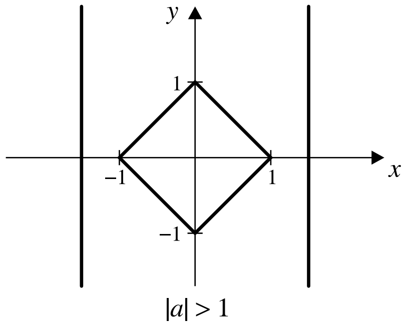
Natomiast w przypadku $a \neq 1$ proste przecinają się, więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Korzystając z interpretacji geometrycznej, rozwiążmy układ równań

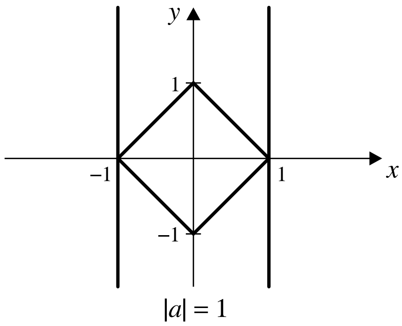
$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 = a^2 \end{cases}$$

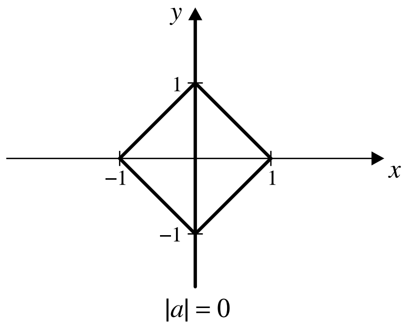
Jak wiemy (por. s. 20) pierwsze z tych równań przedstawia kwadrat o wierzchołkach: $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0$ i $(0, -1)$, a drugie – dwie proste równoległe do osi y: $x = a$ i $x = -a$.

Zatem:

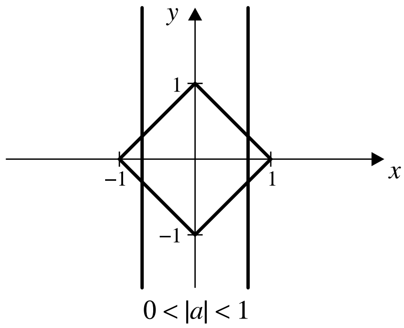


Jeżeli $|a| > 1$, to układ nie ma rozwiązań.





Jeżeli $|a| = 1$ lub $a = 0$, to układ ma dwa rozwiązania.



Jeżeli $0 < |a| < 1$, to układ ma cztery rozwiązania.

3.3 Zadania do samodzielnego rozwiazania

1. Rozwiązać równania z parametrem a:

a) $a(|x| + 1) = 0$, b) $(|a| + 1)(x + 1) = 0$, c) $a^2x + 3 = 9x + a$.

2. Rozwiązać równania z parametrem a:

a) b) $|a|(x+1) = x - a$, b) $|a|(3-x) = x + 2|a|$, c) $|a|x^2 + 1 = -|a| - 2x^2$.

3. Rozwiązać równanie $x(y+1)(y-1) = 0$, traktując je jako:

a) równanie z parametrem x, b) równanie z parametrem y.

4. Rozwiązać równanie $(|x|+1)(|y|-2)(|y|+2) = 0$, traktując je jako

a) równanie z parametrem x, b) równanie z parametrem y.

5. Rozwiązać równania z parametrem a:

a) $|a|(x+3) = 3(x+3)$, b) $a|x| + 4 = 2|x| - a^2$, c) $\frac{(x-1)(x+1)}{x+a} = 0$.

6. Rozwiązać nierówności z parametrem a:

a) $x|a^2 - 2| < 2$, b) $|a|(3+x) < x + 2|a|$, c) $\frac{x}{x-a} \geqslant 1$.

7. Rozwiązać równania z parametrem a:

a) $|5 + ax| = 5 + ax$, b) $\frac{x-2a}{x-4} = a$, c) $(x-1)(x-2) = (a-1)(a-2)$.

8. Rozwiązać równania z parametrem a:

a) $(a^2-1)x = a^3 + 1$, b) $(|a-2| - 2)x = 2$, c) $(1 - |a|)(1 + |x|) = |x| + |a|$.

9. Zbadać liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru a, korzystając z interpretacji geometrycznej:

a) $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ y = x + a \end{cases}$, b) $\begin{cases} |x| + |y| = a \\ x + y = 2 \end{cases}$, c) $\begin{cases} y + ax = 2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

10. Zbadać liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru a, korzystając z interpretacji geometrycznej:

a) $\begin{cases} |x - y| = 1 \\ |y| = x + a \end{cases}$, b) $\begin{cases} y^2 = a \\ y = |x| + a \end{cases}$, c) $\begin{cases} y = |y|(x^2 - 1) \\ y = x + a \end{cases}$.

11. Zbadać liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru a, korzystając z interpretacji geometrycznej:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = a \end{cases}$, b) $\begin{cases} a^2x + y = 1 \\ x + y = a \end{cases}$, c) $\begin{cases} y = |y|x \\ y = x + a \end{cases}$.

4 Odpowiedzi do zadań

4.1 Odpowiedzi do zadań rozdziału 1

1. 12. (wsk. $46\% - 21\% = 25\%$)

2. 10.36.

3. 23.5%.

4. 96%.

5. 32%

6. 75 zł.

7. 12.5 l.

8. 36.

9. 130 zł i 143 zł.

10. O 3%.

11. 500%.

12. a) O 300%, b) o 75%.

13. a) 80%, b) o 20%, c) o 25%.

14. a) 250%, b) o 150%, c) o 60%.

15. a) O 10.25%, b) o 5%.

16. O 33.1%.

17. Pole prostokąta jest mniejsze od pola kwadratu o 4%.

18. O 19%, b) o ok. 23%.

19. Wysoki.

20. 9%.

21. 15%.

22. Ok. 0.227 kg.

23. 60 kg. (Zadanie łatwo rozwiązać w pamięci.)

24. 6 l i 4 l.

25. 650.

26. 3 : 4.

27. 4.5 kg.

4.2 Odpowiedzi do zadań rozdziału 2

1. a) $x \leqslant \frac{1}{5}$, b) $x = -2$ lub $x = 2$ lub $x = -6$ lub $x = 6$, c) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = -\frac{3}{2}$.

2. a) $x \geqslant -\frac{7}{2}$, b) $x = -2\sqrt{2}$ lub $x = 2\sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$, c) nie ma rozwiązań.

3. a) $x = 2$, b) $x = 0$, c) $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

4. a) $x = 3$ lub $x = -3$ lub $x = 9$, b) nie ma rozwiązań, c) nie ma rozwiązań.

5. a) $x = \frac{3}{2}$, b) nie ma rozwiązań, c) $x = -\frac{1}{2}$.

6. a) Nie ma rozwiązań, b) $x = 0$ lub $x = 3$, c) $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

7. -1 (wsk. $|x+1|$ może być równy 0 lub 1).

8. a) $-5 < x < 3$, b) $x < -\frac{3}{2}$ lub $x > \frac{9}{2}$, c) $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

9. a) $x < -\sqrt{\frac{7}{3}}$ lub $x > \sqrt{\frac{7}{3}}$ lub $-1 < x < 1$ b) $-1 < x < 9$, c) $x < -12$ lub $x > 12$.

10. a) $0 < x < 5$, b) nie ma rozwiązań, c) $1 \leqslant x \leqslant 4$.

11. a) x jest dowolną liczbą, b) $x \leqslant 3$, c) $x < 5$.

12. a) $-6 \leqslant x \leqslant 6$, b) dziedzina jest sumą przedziałów $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$, c) $x < -1$ lub $x > 1$.

13. a) Punkt $(0, 0)$, b) punkt $(0, 0)$ i proste $y = x$ i $y = -x$, c) cztery punkty: punkty wspólne okręgu $x^2 + y^2 = 1$ z prostą $y = x$ lub z prostą $y = -x$.

14. a) Proste $x - y = 5$ i $y - x = 5$, b) cztery półproste: w pierwszej ćwiartce jest półprosta $x - y = 5$, a zbiór jest symetryczny względem każdej osi współrzędnych, c) dwie hiperbole: $xy = 5$ i $xy = -5$.

15. a) Osie współrzędnych, b) proste $x = y$ i $x - y = 1$, c) półpłaszczyzna $x \geqslant 3y$.

16. a) Osie współrzędnych, b) oś y, dodatnia część osi x, półprosta $y = 2x$ dla $x < 0$ (wsk. rozważyć przypadki: $x = 0$, $x > 0$ i $x < 0$), c) osiem półprostych: w pierwszej ćwiartce są to półproste $x - y = 1$ i $y - x = 1$, a zbiór jest symetryczny względem każdej osi współrzędnych.

17. a) Okrąg $x^2 + y^2 = 1$ i punkt $(0, 0)$, b) dwa punkty: punkty wspólne okręgu $x^2 + y^2 = 1$ i prostej $y = x$, c) zbiór pusty.

18. Na przykład: $xy(x + 9) = 0$.

19. a) Hiperbola symetryczna względem prostej $x = 1$, b) wykres powstaje przez odbicie względem osi x lewej (tzn. dla $x < 1$) gałęzi hiperboli z punktu a), c) wykres jest symetryczny względem osi y, przy czym dla $x \geqslant 0$ pokrywa się z częścią hiperboli z punktu a).

20. a) Wykres otrzymamy, jeżeli do wykresu funkcji $y = \ln x$ dodamy jego odbicie symetryczne względem osi y (wtedy $y = \ln |x|$), a następnie części wykresu leżące pod osią x odbijemy symetryczne względem tej osi, b) wystarczy narysować wykres dla $x \geqslant 0$ i dodać jego odbicie symetryczne względem osi y, c) wystarczy narysować wykres dla $x > 1$ i dodać jego odbicie symetryczne względem osi y (funkcja nie jest określona dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$), d) wystarczy narysować wykres funkcji $y = \ln(x - 1)$ i dodać jego odbicie symetryczne względem prostej $x = 1$.

21. a) $x = 1, y = 0$ lub $x = -1, y = 2$ lub $x = 3, y = 2$, b) $x = -1, y = 0$ lub $x = 1, y = 2$ lub $x = -1, y = -2$ lub $x = 1, y = 0$.

4.3 Odpowiedzi do zadań rozdziału 3

1. a) Dla $a = 0$ każda liczba spełnia równanie, a dla $a \neq 0$ nie ma rozwiązań, b) dla $a = -1$ i dla $a = 1$ równanie jest spełnione tożsamościowo, a dla pozostałych wartości a jest jedno rozwiązanie: $x = -1$, c) dla $a = 3$ równanie jest spełnione tożsamościowo, dla $a = -3$ żadna liczba nie spełnia równania, a dla pozostałych wartości a jest jedno rozwiązanie: $x = \frac{1}{a+3}$.

2. a) Dla $a = -1$ każda liczba jest rozwiązaniem, dla $a = 1$ nie ma rozwiązań, a dla pozostałych wartości a jest jedno rozwiązanie: $x = \frac{a+|a|}{1-|a|}$, b) dla każdego a jest jedno rozwiązanie: $x = \frac{|a|}{1+|a|}$, c) nie ma rozwiązań dla żadnej wartości a.

3. a) Dla $x = 0$ każda liczba y spełnia równanie, dla $x \neq$ są dwa rozwiązania: $y = -1$ i $y = 1$, b) dla $y = -1$ lub $y = 1$ każda liczba x spełnia równanie, a dla pozostałych wartości y jest jedno rozwiązanie: $x = 0$.

4. a) Dla każdego x są dwa rozwiązania: $y = -2$ i $y = 2$, b) dla $y = -2$ lub $y = 2$ każda liczba x jest rozwiązaniem, a dla pozostałych wartości y nie ma rozwiązań.

5. a) Jeżeli $a = -3$ lub $a = 3$, to każda liczba spełnia równanie; dla pozostałych wartości a jest jedno rozwiązanie: $x = -3$, b) dla $a \geqslant 2$ równanie nie ma rozwiązań, dla $a < 2$ są dwa rozwiązania: $x = \frac{4+a^2}{2-a}$ i $x = \frac{4+a^2}{a-2}$, c) dla $a = -1$ jest jedno rozwiązanie: $x = -1$, dla $a = 1$ jest jedno rozwiązanie: $x = 1$, a dla pozostałych wartości a są dwa rozwiązania: $x = -1$ i $x = 1$.

6. a) Jeżeli $a = -\sqrt{2}$ lub $a = \sqrt{2}$, to nierówność jest spełniona tożsamościowo, dla pozostałych wartości a nierówność jest spełniona dla każdej liczby $x < \frac{2}{|a^2-2|}$, b) jeżeli $a = -1$ lub $a = 1$, to nie ma rozwiązań, jeżeli $-1 < a < 1$, to nierówność jest spełniona dla każdego $x > \frac{a}{1-|a|}$, a dla pozostałych wartości a nierówność spełniona przez liczby $x < \frac{a}{1-|a|}$, c) dla $a = 0$ nierówność jest spełniona dla dowolnego $x \neq 0$, dla $a > 0$ nierówność jest spełniona dla dowolnego $x > a$, a dla $a < 0$ nierówność jest spełniona dla dowolnego $x < a$.

7. a) Dla $a = 0$ równanie jest spełnione tożsamościowo, dla $a > 0$ rozwiązaniem jest każda liczba $x \geqslant \frac{-5}{a}$, a dla $a < 0$ rozwiązaniem jest każda liczba $x \leqslant \frac{-5}{a}$, b) jeżeli $a = 1$ lub $a = 2$, to nie ma rozwiązań, dla pozostałych wartości a jest jedno rozwiązanie: $x = \frac{2a}{a-1}$, c) dla $a = -\frac{3}{2}$ jest jedno rozwiązanie: $x = \frac{3}{2}$, dla $a \neq \frac{3}{2}$ są dwa rozwiązania: $x = a$ i $x = 3 - a$ (wsk. mamy równanie kwadratowe z wyróżnikiem nieujemnym).

8. a) Dla $a=-1$ każda liczba jest rozwiązaniem, dla $a=1$ nie ma rozwiązań, dla pozostałych wartości a jest jedno rozwiązanie: $x=\frac{x^2-a+1}{a-1}$, b) jeżeli $a=0$ lub $a=4$, to nie ma rozwiązań, dla pozostałych wartości a jest jedno rozwiązanie: $x=\frac{2}{|a-2|-2}$, c) jeżeli $a=0$ lub $a<-\frac{1}{2}$ lub $a>\frac{1}{2}$, to nie ma rozwiązań, jeżeli $a=\frac{1}{2}$ lub $a=-\frac{1}{2}$, to jest jedno rozwiązanie: $x=0$, dla pozostałych wartości a są dwa rozwiązania: $x=\frac{1-2|a|}{|a|}$ i $x=\frac{2|a|-1}{|a|}$.

9. a) Jeżeli $a<-2$ lub $a>2$, to nie ma rozwiązań, jeżeli $a=-2$ lub $a=2$, to jest nieskończenie wiele rozwiązań, jeżeli $-2<a<2$, to są dwa rozwiązania, b) dla $0\leqslant a<2$ nie ma rozwiązań, dla $a=2$ jest nieskończenie wiele rozwiązań, dla $a>2$ są dwa rozwiązania (pierwsze równanie ma sens tylko dla $a\geqslant 0$), c) dla $a=0$ jest jedno rozwiązanie, dla $-\infty<a<0$ nie ma rozwiązań, dla $0<a<\infty$ są dwa rozwiązania.

10. a) Jeżeli $a=-1$ lub $a=1$, to jest nieskończenie wiele rozwiązań, jeżeli $a<-1$, to są dwa rozwiązania, jeżeli $-1<a<1$, to jest jedno rozwiązanie, jeżeli $a>1$, to nie ma rozwiązań, b) dla $a>1$ nie ma rozwiązań, dla $a=1$ jest jedno rozwiązaie, dla $-1<a<1$ są dwa rozwiązania, dla $a=-1$ są trzy rozwiązania, dla $a<-1$ są cztery rozwiązania, c) jeżeli $a\leqslant-\sqrt{2}$ lub $0\leqslant a<\leqslant\sqrt{2}$, to są dwa rozwiązania, jeżeli $-\sqrt{2}<a<0$ lub $a>\sqrt{2}$, to są trzy rozwiązania.

11. a) Dla $a=2$ jest nieskończenie wiele rozwiązań, dla $a\neq 2$ nie ma rozwiązań, b) dla $a=1$ jest nieskończenie wiele rozwiązań, dla $a=-1$ nie ma rozwiązań, dla pozostałych wartości a są dwa rozwiązania, c) dla $a\leqslant -1$ są dwa rozwiązania, dla $-1<a<1$ są trzy rozwiązania, dla $a\geqslant 1$ są dwa rozwiązania.